M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 9

Exercice 1.

Montrer que la restriction de la représentation S^λ de S_n à S_{n-1} est sans multiplicité. Décrire les partitions λ telles que cette restriction est irréductible.

Montrer que le produit par p_1 correspond à l'induction de S_n à S_{n+1}.

Montrer que l'opérateur adjoint de p_1 est la dérivation ∂_{p_1}.

En déduire que ∂_{p_1} correspond à la restriction de S_n à S_{n-1}.

Exercice 2.

Soit $c^\nu_{\lambda,\mu}$ le coefficient de Littlewood-Richardson $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu$. Décrire les symétries des $c^\nu_{\lambda,\mu}$. Montrer que

$$\Delta(s_\lambda) = \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu,\nu} s_\nu.$$

Calculer les produits $s_{3,2}s_2$ et $s_{4,2}s_{1,1}$ en utilisant la règle de L.-R.

Exercice 3.

Référence : Savitt & Stanley, Electronic Journal of Combinatorics 7 (2000)

`math.arizona.edu/~savitt/papers/published/symmet-new.ps`

Soit V la représentation naturelle de S_n sur $\mathbb{C}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Pour $n \geq 0$, on note $S^N V$ la puissance symétrique d'ordre N de V et χ_N son caractère.

On veut étudier la dimension $D(n)$ du sous-espace engendré par les χ_N dans l'espace des fonctions centrales sur S_n.

a) Soit $\lambda \vdash n$ et σ une permutation de type cyclique λ . Montrer que $\chi_N(\sigma)$ est le nombre de solutions de

$$x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_k = N \tag{1}$$

où les inconnues x_i sont des entiers positifs ou nuls.

b) Montrer que $D(n)$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[[q]]$ engendré par les

$$f^\lambda(q) = \frac{1}{(1-q^{\lambda_1})\dots(1-q^{\lambda_k})}. \tag{2}$$

Trouver le dénominateur commun des f^λ. En déduire que $D(n) \leq n(n-1)/2 + 1$.

c) Montrer que f^λ est une spécialisation de p_λ. Décrire la même spécialisation pour e_λ.

d) Trouver des bornes supérieure et inférieure pour $D(n)$ pour n petit.