

OPÉRADES COMBINATOIRES ET ALGÈBRES AMASSÉES

Frédéric Chapoton

26 mai 2009

1 D'abord un peu de combinatoire

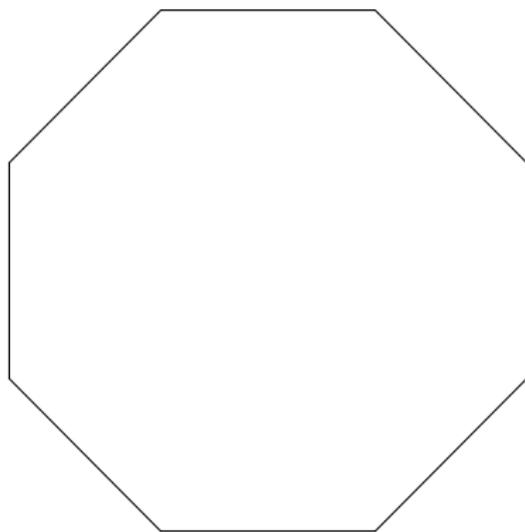
- Des triangulations
- Des arbres binaires plans

2 Ensuite un peu d'algèbre

- Des algèbres amassées
- Des algèbres dendriformes

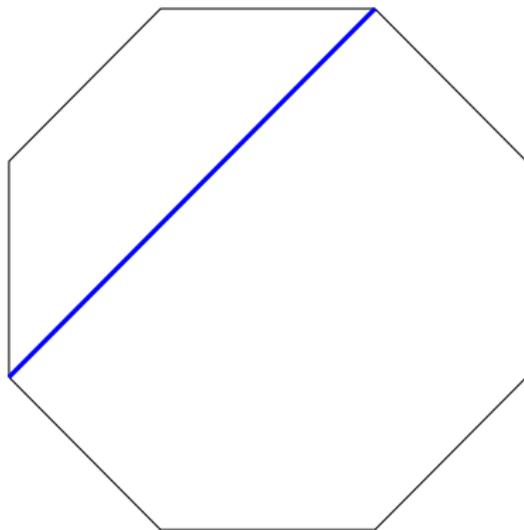
3 Cadre général et perspectives

Un polygone



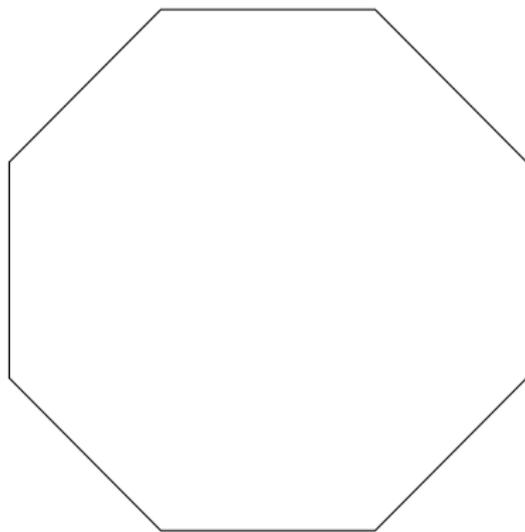
On considère un polygone régulier, par exemple un octogone.

Une diagonale



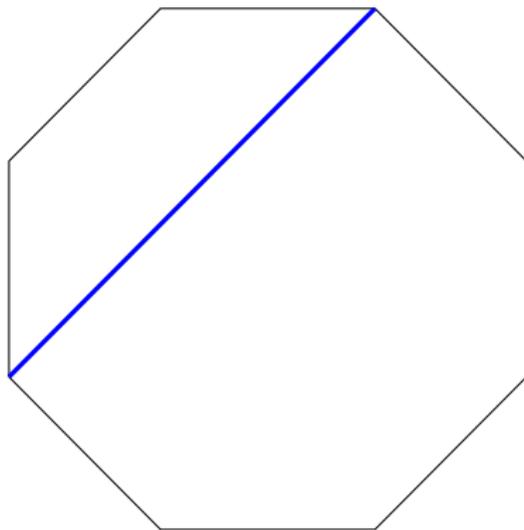
Une **diagonale** est un segment de droite joignant deux sommets non-consécutifs.

Une triangulation



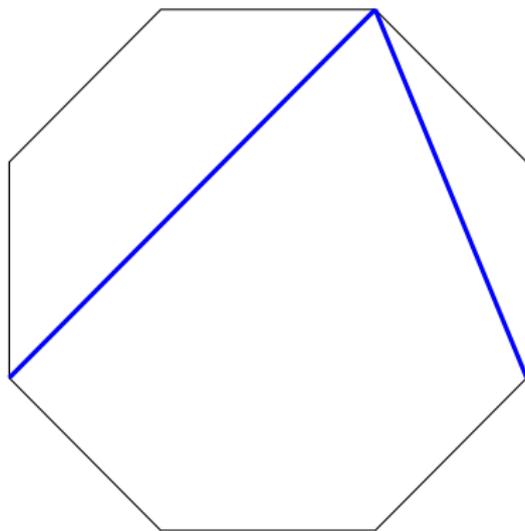
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Une triangulation



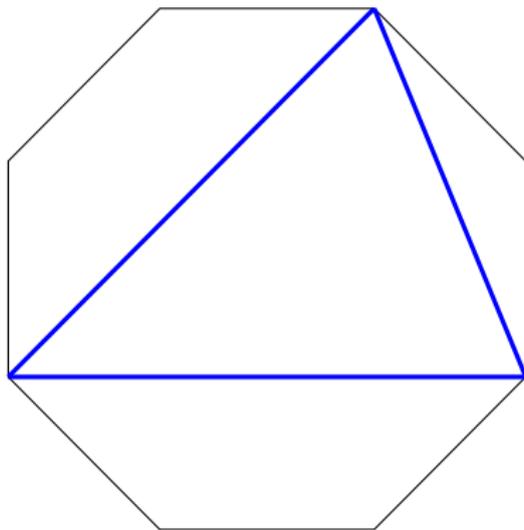
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Une triangulation



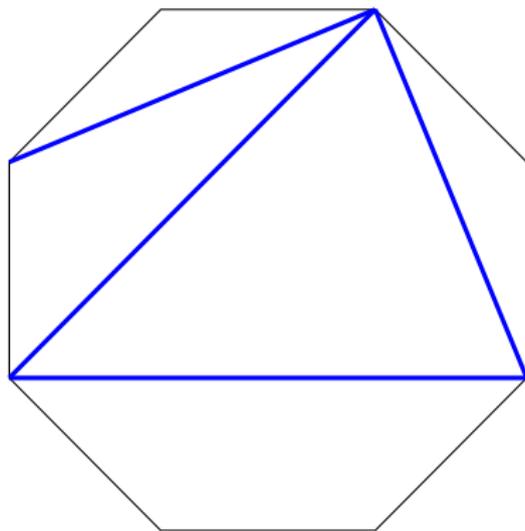
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Une triangulation



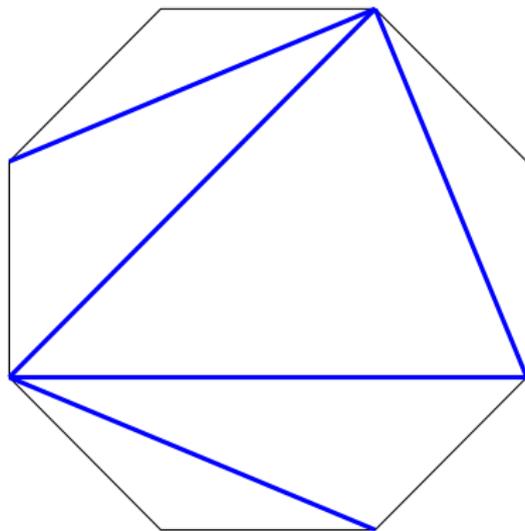
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Une triangulation



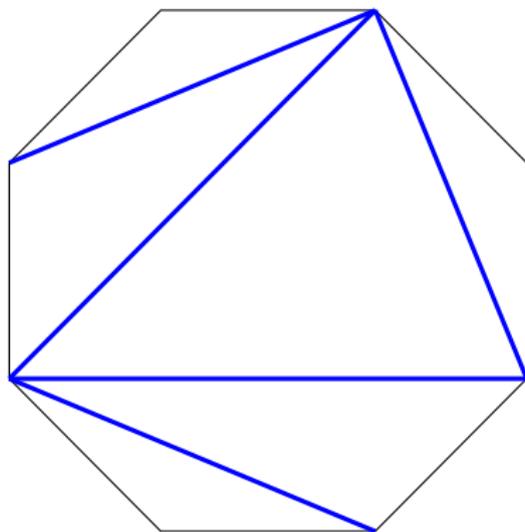
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Une triangulation



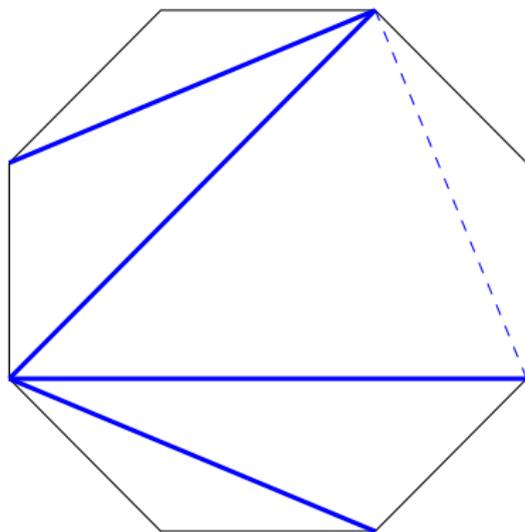
Une **triangulation** est un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas et découpent le polygone en triangles.

Mutation des triangulations



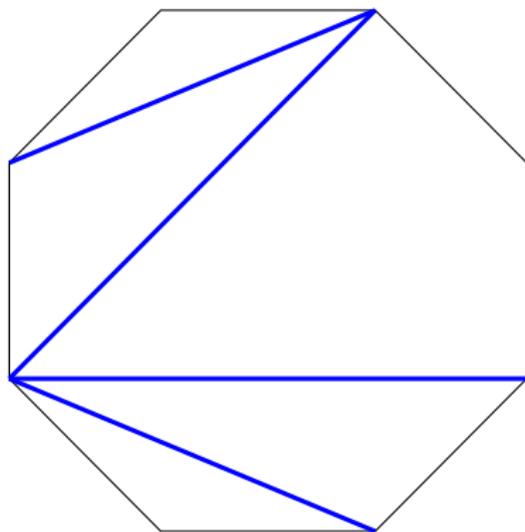
Si on enlève une diagonale, il apparaît un carré. On peut découper ce carré en triangles par une autre diagonale. Cette opération est appelée un « flip » ou une mutation.

Mutation des triangulations



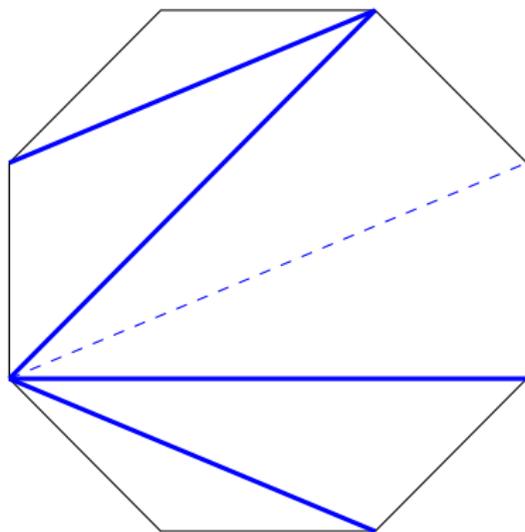
Si on enlève un diagonale, il apparaît un carré. On peut découper ce carré en triangles par une autre diagonale. Cette opération est appelée un « flip » ou une mutation.

Mutation des triangulations



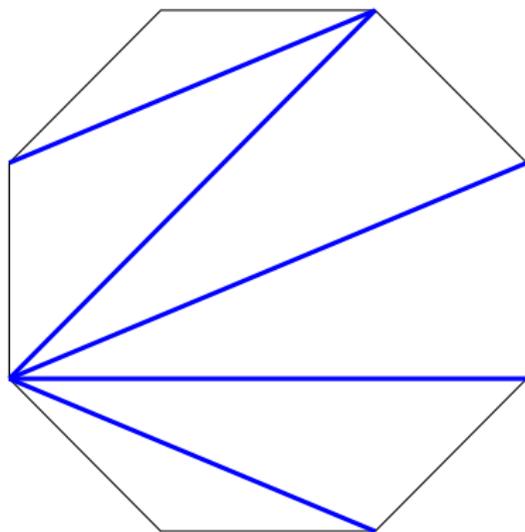
Si on enlève une diagonale, il apparaît un carré. On peut découper ce carré en triangles par une autre diagonale. Cette opération est appelée un « flip » ou une mutation.

Mutation des triangulations



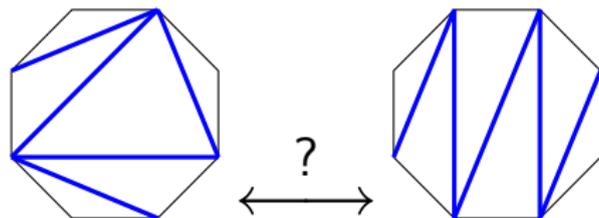
Si on enlève un diagonale, il apparaît un carré. On peut découper ce carré en triangles par une autre diagonale. Cette opération est appelée un « flip » ou une mutation.

Mutation des triangulations



Si on enlève un diagonale, il apparaît un carré. On peut découper ce carré en triangles par une autre diagonale. Cette opération est appelée un « flip » ou une mutation.

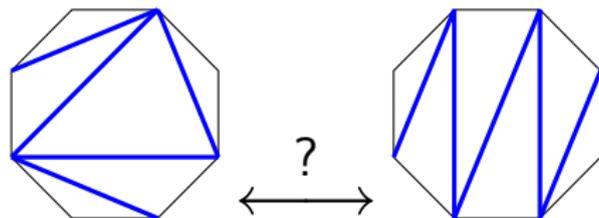
Triangulations et arbres



Question

Peut-on relier deux triangulations quelconques par une suite de mutations ?

Triangulations et arbres

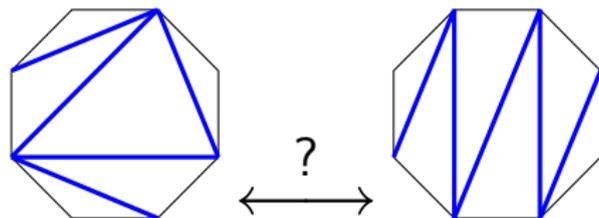


Question

Peut-on relier deux triangulations quelconques par une suite de mutations ?

Ceci revient à étudier la connexité du graphe des mutations, ayant pour sommets les triangulations et pour arêtes les mutations.

Triangulations et arbres

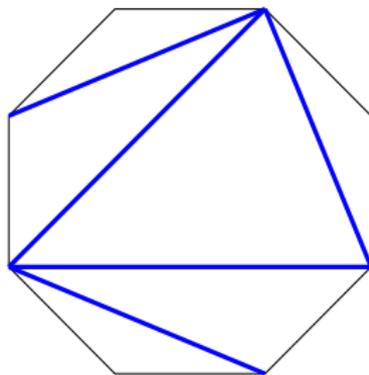


Question

Peut-on relier deux triangulations quelconques par une suite de mutations ?

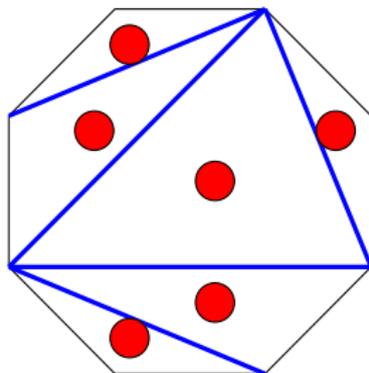
Ceci revient à étudier la connexité du graphe des mutations, ayant pour sommets les triangulations et pour arêtes les mutations.
La réponse est oui. Pour voir cela, on utilise un autre point de vue, celui des arbres binaires plans.

Triangulations et arbres : la correspondance



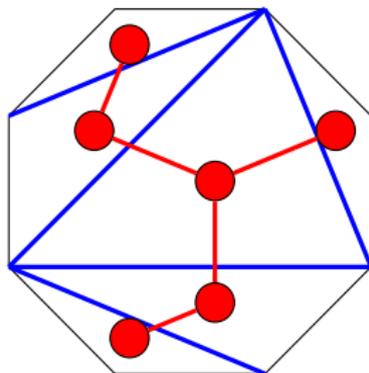
On part d'une triangulation.

Triangulations et arbres : la correspondance



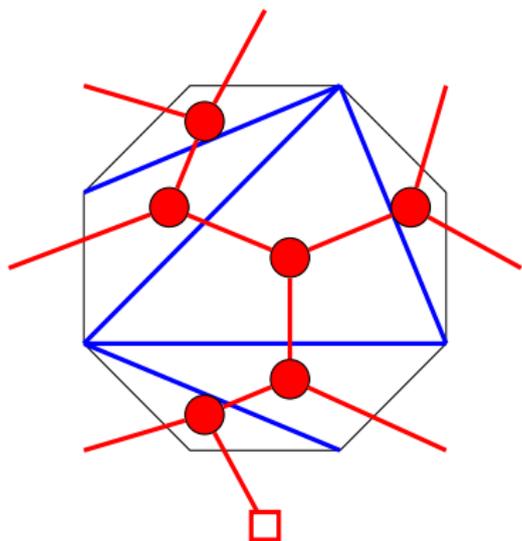
On place un sommet dans chaque triangle de la triangulation.

Triangulations et arbres : la correspondance



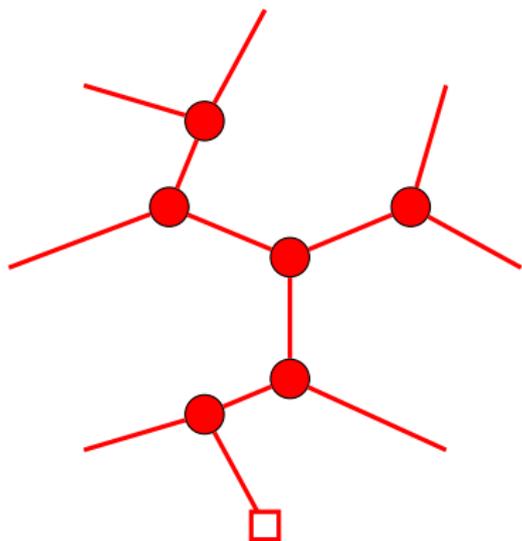
On relie les sommets séparés par une diagonale.

Triangulations et arbres : la correspondance



On ajoute des arêtes extérieures et une racine (en bas).

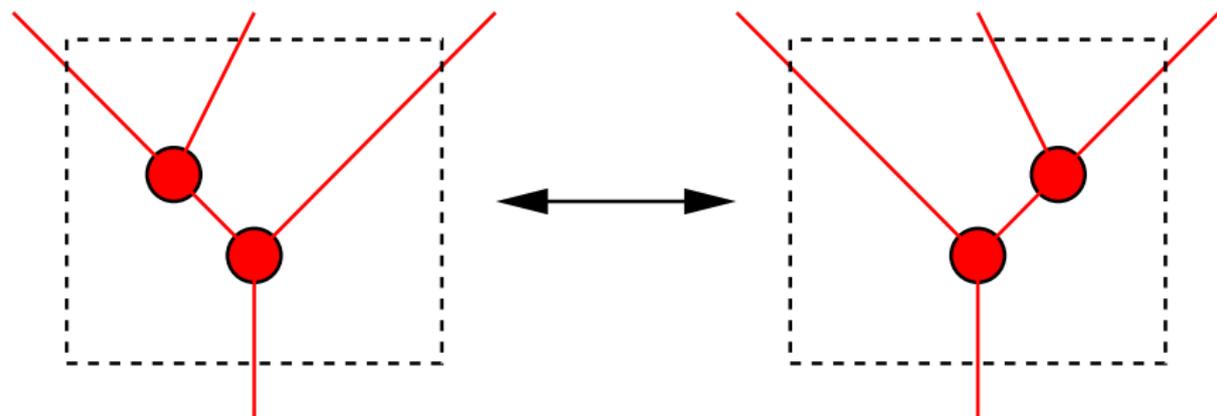
Un arbre binaire



On obtient un graphe sans boucles, c'est-à-dire un arbre.
Chaque triangulation correspond ainsi à un arbre binaire plan.
C'est une bijection entre triangulations et arbres binaires plans.

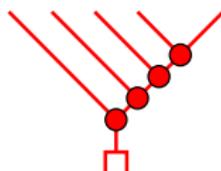
Mutation des arbres binaires plans

La mutation des triangulations se traduit sur les arbres binaires plans par une transformation locale des arbres.



On peut alors choisir d'orienter cette opération de gauche à droite.

En effectuant des mutations de gauche à droite, on aboutit toujours au même arbre binaire plan.



Par conséquent, tout arbre binaire plan est relié par une suite de mutations à cet arbre maximal.

Ceci montre la connexité du graphe des mutations.

Un ordre partiel sur les arbres binaires plans

Définition

Si T et T' sont deux arbres binaires plans, on dit que T est inférieur à T' ($T \leq T'$) si on peut passer de T à T' par une suite de mutations de gauche à droite.

Un ordre partiel sur les arbres binaires plans

Définition

Si T et T' sont deux arbres binaires plans, on dit que T est inférieur à T' ($T \leq T'$) si on peut passer de T à T' par une suite de mutations de gauche à droite.

Ceci définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des arbres binaires plans ayant un nombre de sommets fixés.

Un ordre partiel sur les arbres binaires plans

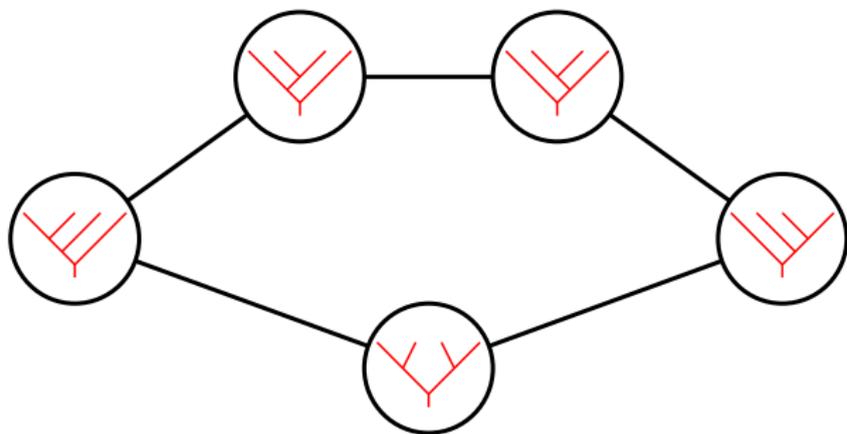
Définition

Si T et T' sont deux arbres binaires plans, on dit que T est inférieur à T' ($T \leq T'$) si on peut passer de T à T' par une suite de mutations de gauche à droite.

Ceci définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des arbres binaires plans ayant un nombre de sommets fixés.

Cet ensemble partiellement ordonné a été étudié par Dov Tamari, qui a montré que c'est un treillis. On l'appelle le **poset de Tamari**.

Le poset de Tamari pour les arbres à 4 feuilles

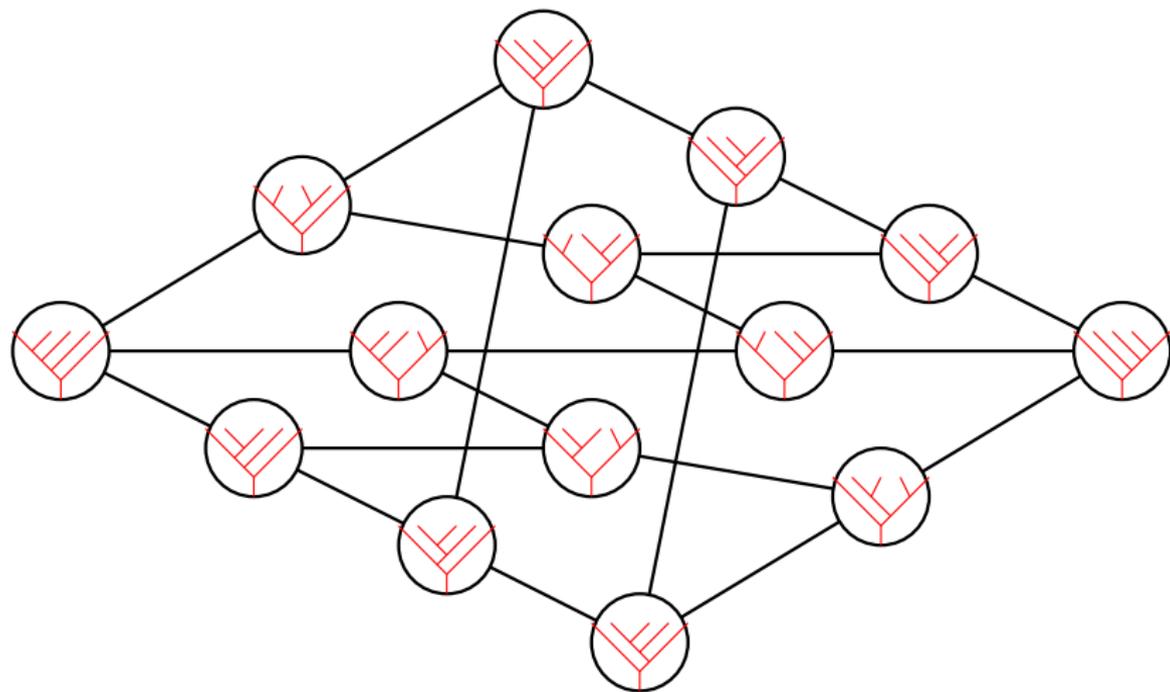


minimum \leq

...

\leq maximum

Le poset de Tamari pour les arbres à 5 feuilles



Intervalles dans le poset de Tamari

On note \mathbf{Y}_n l'ensemble des arbres binaires plans à n sommets.

Les nombres de Catalan

Le cardinal de \mathbf{Y}_n est le nombre de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ceci est un résultat classique, obtenu par Leonhard Euler.

Intervalles dans le poset de Tamari

On note \mathbf{Y}_n l'ensemble des arbres binaires plans à n sommets.

Les nombres de Catalan

Le cardinal de \mathbf{Y}_n est le nombre de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ceci est un résultat classique, obtenu par Leonhard Euler.

Théorème [C., 2006]

Le nombre d'intervalles dans le poset de Tamari \mathbf{Y}_n est donné par

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$$

Intervalles dans le poset de Tamari

On note \mathbf{Y}_n l'ensemble des arbres binaires plans à n sommets.

Les nombres de Catalan

Le cardinal de \mathbf{Y}_n est le nombre de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ceci est un résultat classique, obtenu par Leonhard Euler.

Théorème [C., 2006]

Le nombre d'intervalles dans le poset de Tamari \mathbf{Y}_n est donné par

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$$

Cette formule avait été conjecturée par Christian Germain & Jean Pallo en 1995. Une autre preuve a été obtenue depuis par Olivier Bernardi & Nicolas Bonichon, qui relie cette formule aux cartes planes.

1 D'abord un peu de combinatoire

- Des triangulations
- Des arbres binaires plans

2 Ensuite un peu d'algèbre

- Des algèbres amassées
- Des algèbres dendriformes

3 Cadre général et perspectives

Algèbres amassées

La théorie des **algèbres amassées** a été introduite par Sergey Fomin et Andrei Zelevinski en 2000, afin notamment d'étudier les bases canoniques des groupes quantiques et la notion de positivité totale dans les groupes réductifs.

Algèbres amassées

La théorie des **algèbres amassées** a été introduite par Sergey Fomin et Andrei Zelevinski en 2000, afin notamment d'étudier les bases canoniques des groupes quantiques et la notion de positivité totale dans les groupes réductifs.

Les algèbres amassées sont des algèbres commutatives munies de structures supplémentaires

- Des éléments distingués, les variables d'amas,
- Des « paquets » de variables d'amas, appelés les amas.

Ces amas doivent satisfaire des relations entre eux, sous la forme d'une notion d'adjacence entre amas (mutation) et de formules de transition entre amas adjacents.

Un exemple simple d'algèbre amassée peut être décrit à l'aide de triangulations d'un polygone régulier.

Dans le cas d'un polygone à $n + 3$ cotés, chaque triangulation contient n diagonales.

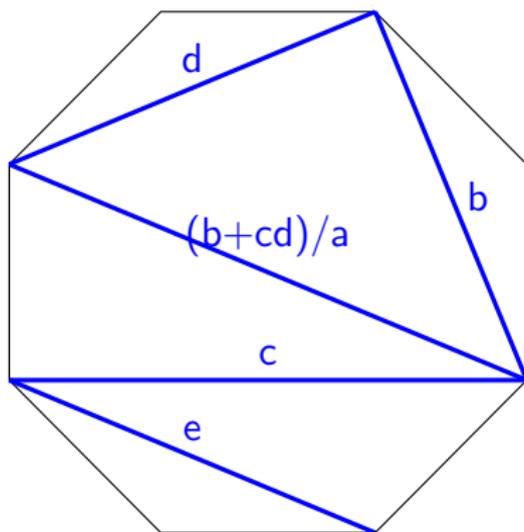
L'algèbre amassée correspondante est une sous-algèbre du corps de fractions $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$.

- Les variables d'amas correspondent aux diagonales.
- Les amas correspondent aux triangulations.

Il s'agit donc d'associer des fractions aux diagonales.

Retour aux triangulations

On va considérer maintenant des triangulations avec étiquettes.

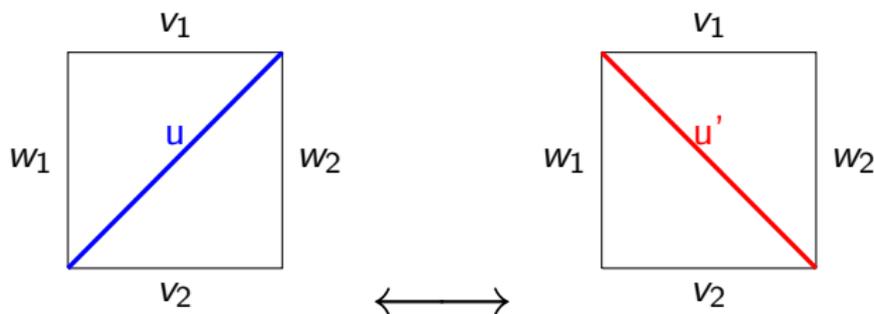


On suppose que chaque diagonale est étiquetée par une fraction en les variables $\{a, b, c, d, e\}$. On associe aussi la valeur 1 à chaque segment du bord.

Mutation avec étiquettes

Considérons deux triangulations t et t' qui s'obtiennent l'une de l'autre par une mutation.

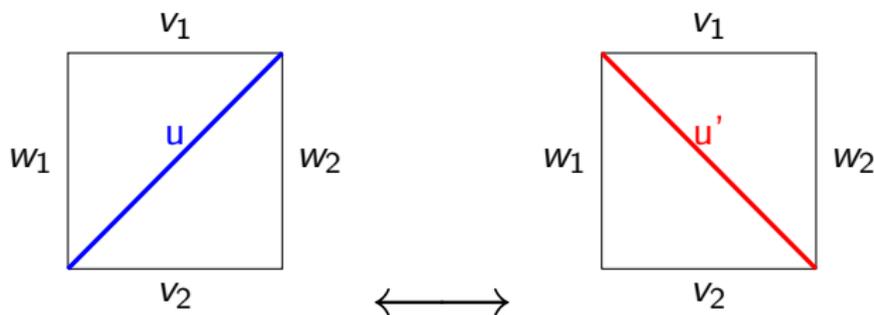
Alors t et t' diffèrent seulement dans un carré. On obtient t en ajoutant la diagonale u dans ce carré et t' en ajoutant la diagonale u' dans ce carré.



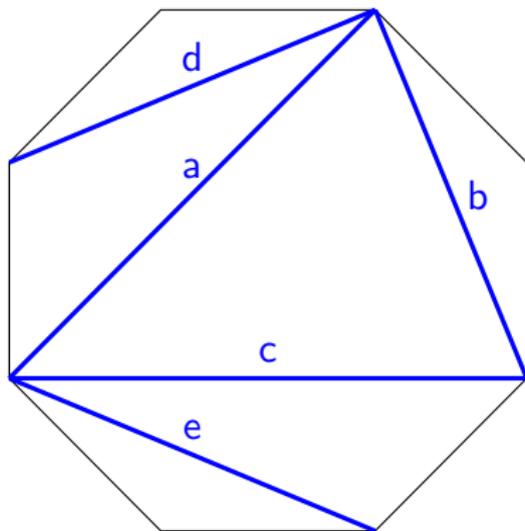
Règle de mutation pour les étiquettes

Voici une règle pour définir les étiquettes de t' si on connaît les étiquettes de t .

- Les diagonales communes à t et t' gardent la même étiquette dans t et dans t' .
- On impose la relation $uu' = v_1v_2 + w_1w_2$,
ce qui équivaut à $u' = (v_1v_2 + w_1w_2)/u$.



Une triangulation fixée



On choisit maintenant une triangulation de base, et on associe une lettre à chaque diagonale de cette triangulation.

Calcul récursif par mutation

Par la connexité du graphe des mutations, on peut utiliser la procédure de mutation avec étiquettes et la donnée d'une triangulation de base étiquetée pour obtenir des étiquettes pour chaque triangulation.

En général, pour chaque triangulation t , il existe plusieurs suites de mutations différentes qui partent de la triangulation de base et aboutissent à la triangulation t .

Il faut donc se demander si le résultat dépend de la suite de mutations choisie.

Théorème de cohérence et phénomène de Laurent

Théorème [Fomin & Zelevinsky]

- En partant de la triangulation de base, les étiquettes d'une triangulation quelconque ne dépendent pas de la suite de mutations effectuées.

Théorème de cohérence et phénomène de Laurent

Théorème [Fomin & Zelevinsky]

- En partant de la triangulation de base, les étiquettes d'une triangulation quelconque ne dépendent pas de la suite de mutations effectuées.
- Chaque diagonale a la même étiquette dans toutes les triangulations auxquelles elle participe.

Théorème de cohérence et phénomène de Laurent

Théorème [Fomin & Zelevinsky]

- En partant de la triangulation de base, les étiquettes d'une triangulation quelconque ne dépendent pas de la suite de mutations effectuées.
- Chaque diagonale a la même étiquette dans toutes les triangulations auxquelles elle participe.
- Les étiquettes des diagonales sont des polynômes de Laurent en les variables initiales, *i.e.* le dénominateur est un monôme.

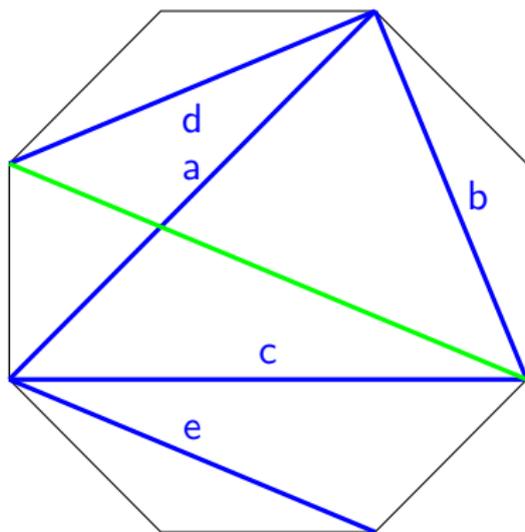
Théorème de cohérence et phénomène de Laurent

Théorème [Fomin & Zelevinsky]

- En partant de la triangulation de base, les étiquettes d'une triangulation quelconque ne dépendent pas de la suite de mutations effectuées.
- Chaque diagonale a la même étiquette dans toutes les triangulations auxquelles elle participe.
- Les étiquettes des diagonales sont des polynômes de Laurent en les variables initiales, *i.e.* le dénominateur est un monôme.

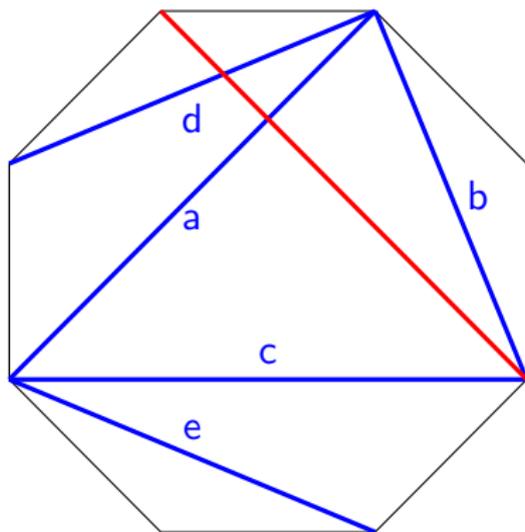
A priori, les étiquettes sont des fractions quelconques. La troisième propriété est donc surprenante : c'est le phénomène de Laurent.

Exemple : étiquette d'une diagonale



L'étiquette de la diagonale verte est $\frac{b+cd}{a}$.

Exemple : étiquette d'une diagonale



L'étiquette de la diagonale rouge est $\frac{ab+b+cd}{ad}$.

Théorème du dénominateur

On obtient donc un polynôme de Laurent pour chaque diagonale : ce sont les variables d'amas.

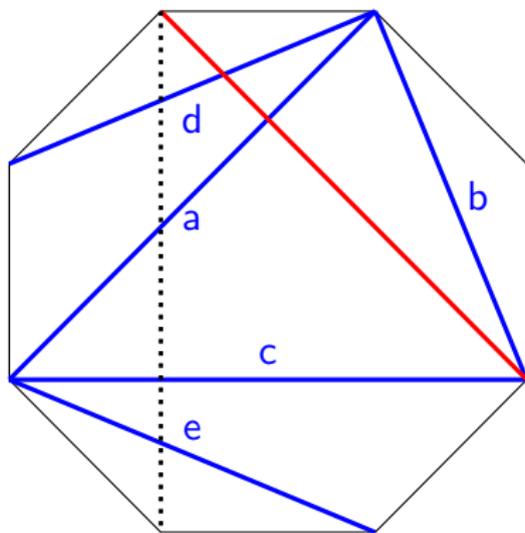
Soit α une diagonale. On note x_α la variable d'amas associée. On peut décrire assez facilement le **dénominateur** de x_α .

Théorème [Caldero, C. & Schiffler]

Le dénominateur de x_α est le produit des variables associées aux diagonales de la triangulation initiale qui coupent α .

Ce théorème généralise un résultat antérieur de S. Fomin et A. Zelevinsky, valable seulement pour un choix particulier de triangulation initiale.

Illustration du théorème



L'étiquette de la diagonale rouge est $\frac{ab+b+cd}{ad}$. Son dénominateur est bien ad .

Le dénominateur de l'étiquette de la diagonale noire est $acde$.

La catégorie amassée

Le cadre utilisé pour démontrer ce théorème du dénominateur utilise la **catégorie amassée de type \mathbb{A}** .

C'est une catégorie triangulée, qui est définie de manière combinatoire en termes de diagonales et de pivots.

Cette catégorie est équivalente à un cas particulier d'une construction plus générale due à Aslak Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten et Gordana Todorov, qui associe une catégorie amassée à chaque diagramme de Dynkin.

Quid du numérateur ?

On voudrait pouvoir décrire aussi le **numérateur** des variables d'amas. En particulier, dans le cadre des algèbres amassées, on s'attend à ce que le numérateur soit une **somme positive** (aucun signe moins).

Quid du numérateur ?

On voudrait pouvoir décrire aussi le **numérateur** des variables d'amas. En particulier, dans le cadre des algèbres amassées, on s'attend à ce que le numérateur soit une **somme positive** (aucun signe moins).

Avec Philippe Caldero, nous avons obtenu, pour certaines triangulations initiales, une formule complète pour les variables d'amas, en termes de représentations de carquois.

Quid du numérateur ?

On voudrait pouvoir décrire aussi le **numérateur** des variables d'amas. En particulier, dans le cadre des algèbres amassées, on s'attend à ce que le numérateur soit une **somme positive** (aucun signe moins).

Avec Philippe Caldero, nous avons obtenu, pour certaines triangulations initiales, une formule complète pour les variables d'amas, en termes de représentations de carquois.

La variable d'amas associée à une diagonale est donnée comme une somme de monômes. Le coefficient de chaque monôme est donné par la caractéristique d'Euler de certaines variétés, les grassmanniennes de sous-modules.

Quelques détails sur la formule

On choisit une triangulation de départ t (vérifiant une condition d'acyclicité) et une diagonale α qui n'est pas parmi les diagonales de t .

A cette situation, on peut associer un carquois Q_t et un module M_α sur ce carquois.

Alors on a la description suivante :

$$x_\alpha = \sum_e \chi(\text{Gr}_e(M_\alpha)) \underbrace{\prod_i x_i^{-\langle e, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, m-e \rangle}}_{\text{un monôme}}.$$

C'est une somme finie, qui porte sur les dimensions possibles des sous-modules de M_α .

Quelques détails sur la formule

On choisit une triangulation de départ t (vérifiant une condition d'acyclicité) et une diagonale α qui n'est pas parmi les diagonales de t .

A cette situation, on peut associer un carquois Q_t et un module M_α sur ce carquois.

Alors on a la description suivante :

$$x_\alpha = \sum_e \chi(\text{Gr}_e(M_\alpha)) \underbrace{\prod_i x_i^{-\langle e, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, m-e \rangle}}_{\text{un monôme}}.$$

C'est une somme finie, qui porte sur les dimensions possibles des sous-modules de M_α .

Cette formule a été la source de nombreux travaux, en particulier ceux de P. Caldero et Bernhard Keller et de P. Caldero et M. Reineke.

De nombreux développements depuis

- Ralf Schiffler a obtenu une description complète des variables d'amas associées aux diagonales, pour toute triangulation initiale, de manière combinatoire.

De nombreux développements depuis

- Ralf Schiffler a obtenu une description complète des variables d'amas associées aux diagonales, pour toute triangulation initiale, de manière combinatoire.
- La théorie a été généralisée des triangulations du disque aux triangulations de surfaces avec bords et points marqués, notamment par S. Fomin, Michael Schapiro et Dylan Thurston.

De nombreux développements depuis

- Ralf Schiffler a obtenu une description complète des variables d'amas associées aux diagonales, pour toute triangulation initiale, de manière combinatoire.
- La théorie a été généralisée des triangulations du disque aux triangulations de surfaces avec bords et points marqués, notamment par S. Fomin, Michael Schapiro et Dylan Thurston.
- La théorie des algèbres amassées continue à se développer rapidement, notamment en relation avec la théorie des représentations. En particulier, un rôle important est joué par les catégories amassées, qui sont des catégories de Calabi-Yau de dimension 2.

De nombreux développements depuis

- Ralf Schiffler a obtenu une description complète des variables d'amas associées aux diagonales, pour toute triangulation initiale, de manière combinatoire.
- La théorie a été généralisée des triangulations du disque aux triangulations de surfaces avec bords et points marqués, notamment par S. Fomin, Michael Schapiro et Dylan Thurston.
- La théorie des algèbres amassées continue à se développer rapidement, notamment en relation avec la théorie des représentations. En particulier, un rôle important est joué par les catégories amassées, qui sont des catégories de Calabi-Yau de dimension 2.
- Plus récemment, Bernard Leclerc a introduit une catégorification multiplicative des algèbres amassées, en relation avec les groupes quantiques affines.



Motivé par des considérations en K-théorie, Jean-Louis Loday a introduit une nouvelle notion algébrique.

Définition

Une **algèbre dendriforme** est un espace vectoriel V muni de deux opérations bilinéaires \succ et \prec de $V \otimes V$ dans V qui vérifient les relations suivantes :

$$x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z) = (x \prec y) \prec z,$$

$$x \succ (y \prec z) = (x \succ y) \prec z,$$

$$x \succ (y \succ z) = (x \succ y) \succ z + (x \prec y) \succ z.$$



Motivé par des considérations en K-théorie, Jean-Louis Loday a introduit une nouvelle notion algébrique.

Définition

Une **algèbre dendriforme** est un espace vectoriel V muni de deux opérations bilinéaires \succ et \prec de $V \otimes V$ dans V qui vérifient les relations suivantes :

$$x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z) = (x \prec y) \prec z,$$

$$x \succ (y \prec z) = (x \succ y) \prec z,$$

$$x \succ (y \succ z) = (x \succ y) \succ z + (x \prec y) \succ z.$$

En faisant la somme des trois axiomes, on voit que le produit $x * y = x \succ y + x \prec y$ est associatif.

Un exemple : la moitié du mélange

Un exemple simple d'algèbre dendriforme est l'espace vectoriel

$$T(V) = V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots \quad (1)$$

des tenseurs sur un espace vectoriel V , muni d'un produit commutatif appelé produit de mélange.

On peut définir deux opérations de demi-mélange, dont la somme est le produit de mélange et qui forment une algèbre dendriforme.

Ces opérations ont notamment été considérées par Marcel-Paul Schützenberger en 1958.

Relation avec les arbres binaires plans

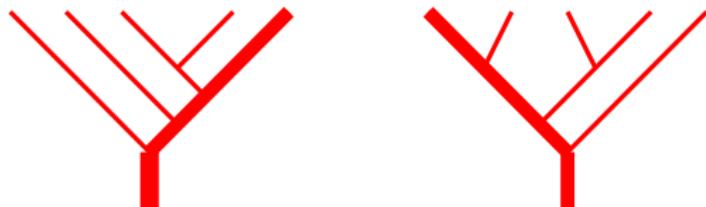
Soit $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$ l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} de base l'ensemble \mathbf{Y}_n .

Soit $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$ la somme directe des espaces vectoriels $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$ pour $n \geq 1$.

Théorème [Loday]

Il existe une structure naturelle d'algèbre dendriforme sur $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$.
Cette algèbre dendriforme est libre sur un générateur.

Les opérations \succ et \prec sur les arbres binaires plans ont une description combinatoire, via une forme de mélange d'arbres.



Formule pour le produit associatif $*$

J.-L. Loday et Maria Ronco ont donné une formule qui décrit le produit associatif $*$, somme des deux produits \succ et \prec , en utilisant le poset de Tamari.

Théorème [Loday & Ronco]

Soient S et T deux arbres binaires plans. Alors

$$S * T = \sum_{S/T \leq U \leq S \setminus T} U.$$

Dans cette formule, S/T est l'arbre binaire plan obtenu en greffant la racine de S sur la feuille gauche de T . De même, $S \setminus T$ est l'arbre binaire plan obtenu en greffant la racine de T sur la feuille droite de S .

L'algèbre dendriforme des fractions

Les résultats qui suivent ont été inspirés par le **formalisme des moules** de Jean Ecalle, qui a son origine dans l'étude de la resommation et des fonctions résurgentes.

Il existe aussi une structure d'algèbre dendriforme sur l'espace vectoriel \mathbb{M} qui est la somme directe des corps de fractions $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n)$ pour $n \geq 1$.

Théorème [C., 2006]

Soit $f \in \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_m)$ et $g \in \mathbb{Q}(u_{m+1}, \dots, u_n)$. Les opérations

$$f \succ g = f(u_1, \dots, u_m)g(u_{m+1}, \dots, u_n) \frac{u_{m+1} + \dots + u_{m+n}}{u_1 + \dots + u_{m+n}},$$

$$f \prec g = f(u_1, \dots, u_m)g(u_{m+1}, \dots, u_n) \frac{u_1 + \dots + u_m}{u_1 + \dots + u_{m+n}},$$

définissent une algèbre dendriforme sur \mathbb{M} .

Inclusion des arbres binaires plans dans les fractions

Théorème [C.]

Il existe une unique inclusion de l'algèbre dendriforme $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$ des arbres binaires plans dans l'algèbre dendriforme \mathbb{M} des fractions, telle que l'arbre  soit envoyé sur la fraction $1/u_1$ dans $\mathbb{Q}(u_1)$.

Inclusion des arbres binaires plans dans les fractions

Théorème [C.]

Il existe une unique inclusion de l'algèbre dendriforme $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$ des arbres binaires plans dans l'algèbre dendriforme \mathbb{M} des fractions, telle que l'arbre  soit envoyé sur la fraction $1/u_1$ dans $\mathbb{Q}(u_1)$.

L'existence et l'unicité d'un tel morphisme résulte immédiatement de la liberté de $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$. On montre l'injectivité par un calcul de résidu.

Inclusion des arbres binaires plans dans les fractions

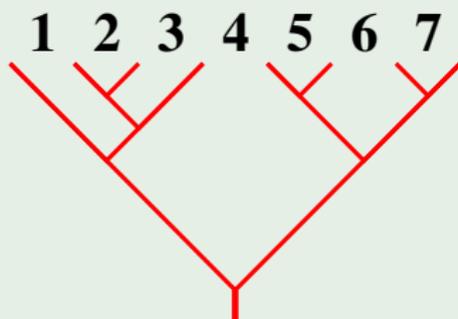
Théorème [C.]

Il existe une unique inclusion de l'algèbre dendriforme $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$ des arbres binaires plans dans l'algèbre dendriforme \mathbb{M} des fractions, telle que l'arbre  soit envoyé sur la fraction $1/u_1$ dans $\mathbb{Q}(u_1)$.

L'existence et l'unicité d'un tel morphisme résulte immédiatement de la liberté de $\mathbb{Q}\mathbf{Y}$. On montre l'injectivité par un calcul de résidu. En fait, étant donné un arbre binaire plan, on peut décrire explicitement la fraction qui est son image par cette inclusion.

Exemple de fraction associée à un arbre binaire plan

Exemple



La fraction correspondante dans $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_7)$ est

$$\frac{1}{(u_1 + u_2 + u_3)(u_2)(u_2 + u_3)(u_1 + \dots + u_7)(u_5)(u_5 + u_6 + u_7)(u_7)}.$$

Action de la rotation sur les fractions

Sur le corps de fractions $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n)$, il existe une transformation θ d'ordre $n + 1$, définie par la substitution

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \mapsto u_2, \\ u_2 \mapsto u_3, \\ \dots \\ u_{n-1} \mapsto u_n, \\ u_n \mapsto -(u_1 + \dots + u_n). \end{array} \right.$$

Théorème [C.]

L'image de $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$ dans $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n)$ est stable par cette transformation θ .

Relation entre la rotation et le poset de Tamari

Il existe donc une application linéaire θ d'ordre $n + 1$ sur $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$.

Propriétés

- Il existe une application linéaire τ sur $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$ telle que

$$\theta = (-1)^n \tau^2.$$

- L'application τ est fortement liée au poset de Tamari. C'est la « transformation de Coxeter » du poset de Tamari (action de la translation d'Auslander-Reiten sur le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules sur le poset).
- Les valeurs propres de θ sont connues.
- Une conjecture décrit les valeurs propres de τ .

1 D'abord un peu de combinatoire

- Des triangulations
- Des arbres binaires plans

2 Ensuite un peu d'algèbre

- Des algèbres amassées
- Des algèbres dendriformes

3 Cadre général et perspectives

La théorie des opérades

- Le cadre approprié pour l'étude des algèbres dendriformes est la théorie des **opérades**.

La notion d'opérade est apparue en topologie algébrique dans les années 1970. Elle permet de donner un sens précis à la notion de « type d'algèbre ». Par exemple, il existe des opérades Assoc, Comm et Lie correspondant aux algèbres associatives, aux algèbres commutatives et aux algèbres de Lie.

La théorie des opérades

- Le cadre approprié pour l'étude des algèbres dendriformes est la théorie des **opérades**.

La notion d'opérade est apparue en topologie algébrique dans les années 1970. Elle permet de donner un sens précis à la notion de « type d'algèbre ». Par exemple, il existe des opérades Assoc, Comm et Lie correspondant aux algèbres associatives, aux algèbres commutatives et aux algèbres de Lie.

- Il existe une opérade des algèbres dendriformes (Loday).

La théorie des opérades

- Le cadre approprié pour l'étude des algèbres dendriformes est la théorie des **opérades**.

La notion d'opérade est apparue en topologie algébrique dans les années 1970. Elle permet de donner un sens précis à la notion de « type d'algèbre ». Par exemple, il existe des opérades Assoc, Comm et Lie correspondant aux algèbres associatives, aux algèbres commutatives et aux algèbres de Lie.

- Il existe une opérade des algèbres dendriformes (Loday).
- J'ai montré que l'opérade des algèbres dendriformes est une **opérade anticyclique** : il existe une rotation θ sur $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$.

La théorie des opérades

- Le cadre approprié pour l'étude des algèbres dendriformes est la théorie des **opérades**.

La notion d'opérade est apparue en topologie algébrique dans les années 1970. Elle permet de donner un sens précis à la notion de « type d'algèbre ». Par exemple, il existe des opérades Assoc, Comm et Lie correspondant aux algèbres associatives, aux algèbres commutatives et aux algèbres de Lie.

- Il existe une opérade des algèbres dendriformes (Loday).
- J'ai montré que l'opérade des algèbres dendriformes est une **opérade anticyclique** : il existe une rotation θ sur $\mathbb{Q}\mathbf{Y}_n$.
- J'ai montré que l'opérade anticyclique des algèbres dendriformes est contenue dans l'opérade anticyclique des moules (une opérade sur les fractions).

Catégorification de l'opérade dendriforme

Les structures dendriformes sont intrinsèquement liées aux posets de Tamari. Le produit associatif $*$ et la rotation θ ont une description en termes de la relation d'ordre.

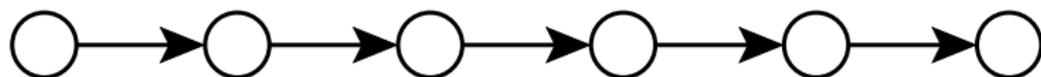
Catégorification de l'opérade dendriforme

Les structures dendriformes sont intrinsèquement liées aux posets de Tamari. Le produit associatif $*$ et la rotation θ ont une description en termes de la relation d'ordre.

Il paraît possible de catégorifier l'opérade anticyclique dendriforme en utilisant les posets de Tamari.

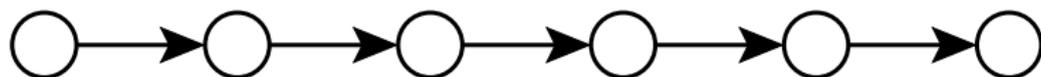
Il s'agit de remplacer le groupe abélien $\mathbb{Z}\mathbf{Y}_n$ par la catégorie des modules sur le poset \mathbf{Y}_n et de définir des foncteurs entre ces catégories de modules qui redonnent (par passage au groupe de Grothendieck) les morphismes qui définissent l'opérade dendriforme. C'est un travail en cours.

La théorie des représentations des carquois



- Les posets de Tamari ont une définition en termes de **modules basculants** pour les carquois de type \mathbb{A} . Cette définition se généralise bien aux autres carquois de Dynkin (Dieter Happel et Luise Unger).

La théorie des représentations des carquois



- Les posets de Tamari ont une définition en termes de **modules basculants** pour les carquois de type \mathbb{A} . Cette définition se généralise bien aux autres carquois de Dynkin (Dieter Happel et Luise Unger).
- Les posets de Tamari ont aussi une définition en termes de la catégorie amassée de type \mathbb{A} . Pour les autres carquois de Dynkin, la même définition donne les **treillis cambriens** introduits par Nathan Reading.

Extension des propriétés du poset de Tamari

- Il semble que de nombreuses propriétés des posets de Tamari s'étendent à ces deux familles de posets (posets de modules basculants et treillis cambriens), pour tous les carquois de Dynkin. Ainsi la transformation de Coxeter devrait être périodique.

Extension des propriétés du poset de Tamari

- Il semble que de nombreuses propriétés des posets de Tamari s'étendent à ces deux familles de posets (posets de modules basculants et treillis cambriens), pour tous les carquois de Dynkin. Ainsi la transformation de Coxeter devrait être périodique.
- Sur ma suggestion, Sefi Ladkani a obtenu notamment le résultat suivant.

Théorème (Ladkani)

Si Q et Q' sont deux carquois de même graphe de Dynkin sous-jacent, alors les catégories dérivées des modules sur les treillis cambriens associés sont équivalentes.

Vers une catégorie des suites exceptionnelles ?

Les **suites exceptionnelles** généralisent les modules basculants. La notion a été introduite par Alexei Rudakov pour étudier les catégories dérivées de faisceaux cohérents.

Les suites exceptionnelles pour le carquois de type \mathbb{A} et leurs mutations interviennent dans la catégorification de l'opérade des algèbres dendrifformes.

Il semble possible de définir en général, pour tout diagramme de Dynkin, une catégorie fondée sur la combinatoire des suites exceptionnelles et de leurs mutations.

FIN

