Modélisation L1S2P : Contrôle continu 1 - Quelques corrigés

Il y a eu deux types de sujets.

- Le sujet 1 ci-dessous est celui que vous avez traité si vous avez passé votre épreuve lors de la semaine du 6 mars, à quelques constantes ou notations près (il y avait 4 variations en tout).
- Le sujet 2 ci-dessous est celui que vous avez traité si vous avez passé votre épreuve lors de la semaine du 13 mars. Il y avait deux variations. Le premier exercice était en gros le même à quelques constantes ou notations près dans les deux variations. Le second exercice variait sensiblement, donc il est corrigé deux fois ci-dessous.

Exercice 1. Pour r réel positif, on considère la fonction

$$f(x) = rxe^{-x}$$

1. Calculer les solutions de l'équation $f(x) = x$.

> ▶ *Solution : Il y en a deux :* 0 *et* $\ln(r)$.

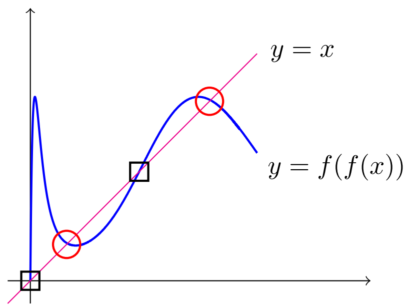
2. Pour chacune d'entre elles, donner les valeurs de r pour lesquelles ces points fixes sont attractifs/répulsifs.

> ▶ *Réponse :*
>
> - 0 *est attractif ssi* $0 \leq r < 1$, *et répulsif ssi* $r > 1$,
> - $\ln(r)$ *est attractif ssi* $1 < r < e^2$, *et répulsif ssi* $r \in]0, 1[\cup]e^2, +\infty[$.
>
> ▶ *Justification (non demandée) : On calcule* $f'(x) = r(1-x)e^{-x}$. *Un théorème du cours affirme qu'un point fixe* x_0 *est attractif si et seulement si on a l'inégalité* $|f'(x_0)| < 1$. *On calcule donc* $f'(0)$ *et* $f'(\ln(r))$ *pour trouver la réponse.*

3. Voici le graphe de $f \circ f$ pour $r = 10$. On observe la présence de 4 points fixes.

   a) Entourer chaque point fixe attractif avec un cercle, et chaque point fixe répulsif avec un carré.

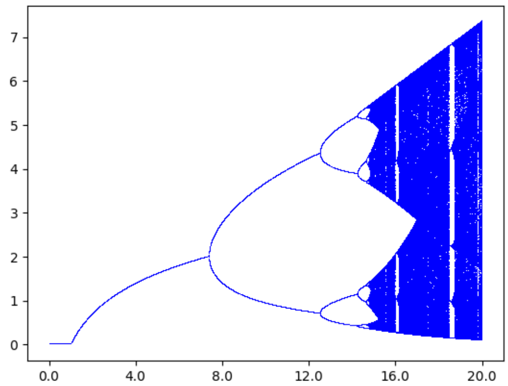
   b) A votre avis, quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ dans ce cas ?



> ▶ *Justification (non demandée) pour la question a) :*
>
> - *Les deux points fixes de* f *sont aussi des points fixes de* g. *On les retrouve donc, et comme* $r = 10 > e^2$, *ils sont tous deux répulsifs.*
> - *On voit sur le dessin deux points fixes attractifs proches des deux extrema locaux de* $f \circ f$. *La pente de la dérivée y est petite en valeur absolue, ce sont donc des points fixes attractifs.*
> - *Conclusion : on retrouve les deux points fixes de* f *qui sont répulsifs, et deux nouveaux points fixes qui sont attractifs.*
>
> ▶ *Réponse à la question b) :*
>
> - *Posons* $v_0 = 1$ *et* $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$. *On a donc* $v_n = u_{2n}$.
> - *Posons* $w_0 = f(1)$ *et* $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. *On a donc* $w_n = u_{2n+1}$.
> - *Alors* v *et* w *convergent chacune vers l'un des deux points fixes attractifs de* $f \circ f$. *Ce n'est pas le même, sinon* u *elle-même convergerait vers l'un de ces points fixes, qui serait du coup un point fixe de* f, *ce qui est impossible puisque ceux-ci sont répulsifs.*
> - *Donc une de ces suites tend vers le premier point fixe attractif, et l'autre tend vers le second.*
> - *Donc* u_n *a un comportement asymptotique périodique d'ordre 2.*

4. Le programme ci-dessous à gauche fournit l'image ci-dessous à droite. Commentez.

```
eps=20/500
pour i = 1 , ... , 500 :
     u=1
     r=i*eps
     pour j = 1 , ... , 100000 :
          u=r*u*exp(-u)
     pour j = 1 , ... , 100 :
          u=r*u*exp(-u)
          afficher le point (r,u)
```



▶ *Trouvé dans les copies :*

- *Pour 500 valeurs de r entre 0 et 20, le programme part de $u_0 = 1$ puis calcule u_1, u_2, ..., u_{100000} puis affiche les points (r, u_{100001}), (r, u_{100002}), $\dots (r, u_{100100})$.*
- *On observe donc, au dessus du point d'abscisse $(r, 0)$, les valeurs que prend u_n pour n très grand.*
- *On reconnait ce qu'on a trouvé : pour $r \in [0, 1]$, la suite tend vers 0, pour $r \in [1, e^2]$, la suite converge vers $\ln(r)$, pour $r = 10$, la suite oscille entre deux valeurs (période d'ordre 2).*
- *Pour $r = 13$, la suite devient périodique d'ordre 4. Pour r un peu plus grand, périodique d'ordre 8, puis 16 etc., et très rapidement, on aboutit à une situation chaotique.*
- *Ca a l'air fractal.*
- *C'est le même dessin que celui obtenu pour la suite logistique !!!*

Exercice 2. On pose $f(x) = x^4 - x^2$.
Mener une étude qualitative de l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$, et en rechercher des solutions explicites.

▶ *Fait en td.*

Sujet 2

Exercice 1.

Montrer que le polynôme $X^3 - 4X^2 + X - 3$ admet une racine réelle $\rho > 3$ et deux racines complexes ω_1 et ω_2 de module strictement inférieur à 1.

► *Solution :*

• *On étudie brièvement la fonction* $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 + x - 3$ *sur* $\mathbf{R}$.

Sa dérivée est $x \mapsto 3x^2 - 8x + 1$ *qui s'annule en deux valeurs* $\alpha_\pm = \frac{4\pm\sqrt{13}}{3}$. *La fonction* f *est donc croissante sur* $]-\infty, \alpha_-[$ *et sur* $]\alpha_+, +\infty[$ *et décroissante sur* $]\alpha_-, \alpha_+[$.

• *Pour montrer qu'il n'y a qu'une racine réelle, il suffit donc de montrer que* $f(\alpha_-)$ *est négatif. On trouve* $f(\alpha_-) = \frac{26\sqrt{13}-173}{27} < \frac{26\sqrt{16}-173}{27} = \frac{104-173}{27} < 0$. *Donc il n'y a bien qu'une racine réelle.*

• *De plus* $f(3) = -9$ *est négatif, donc cette racine est dans l'intervalle* $]3, +\infty[$.

• *Les deux autres racines de notre polynôme sont donc complexes conjuguées, notons les* ω_1 *et* ω_2. *On a l'égalité* $X^3 - 4X^2 + X - 3 = (X - \omega_1)(X - \omega_2)(X - \rho)$. *Le produit des racines vaut donc* 3. *On a donc* $|\omega_1|.|\omega_2|.|\rho| = 3$. *Comme* ω_1 *et* ω_2 *sont conjuguées, elles ont le même module. On a donc* $|\omega_i|^2 = \frac{3}{\rho} < 1$, *d'où* $|\omega_i| < 1$.

L'évolution d'une population de bactéries obéit à la loi suivante : si p_n est la population au jour n, alors $p_{n+3} = 4p_{n+2} - p_{n+1} + 3p_n$. Justifier qu'en fonction de p_0, p_1 et p_2, cette population peut tendre vers l'infini, ou bien tendre vers 0.

► *Solution : le théorème du cours sur les suites récurrentes linéaires implique ici qu'une suite vérifie la relation* $p_{n+3} = 4p_{n+2} - p_{n+1} + 3p_n$ *si et seulement si elle est de la forme*

$$p_n = \alpha_1.\omega_1^n + \alpha_2.\omega_2^n + \beta.\rho^n$$

pour certaines constantes α_1, α_2 *et* β, *qui déterminent complètement, et sont complètement déterminées par,* p_0, p_1 *et* p_2.

• *Si l'on choisit* α_1 *et* α_2 *égales à* 1 *et* β *égale à 0, la suite sera de la forme* $p_n = \omega_1^n + \omega_2^n$ *: c'est bien une suite (de réels) qui tend vers* 0.

• *Si l'on choisit* α_1 *et* α_2 *égales à* 0 *et* β *égale à 1, la suite sera de la forme* $p_n = \rho^n$, *qui tend vers* $+\infty$.

Exercice 2.

Voici 5 équations différentielles, et 5 dessins de solutions. Relier chaque équation à ses solutions.

► *Justification (non demandée) :*

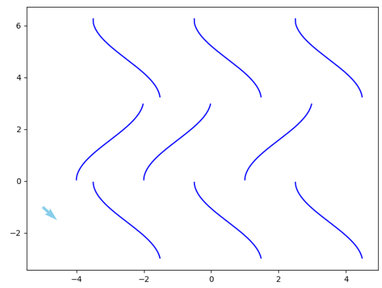
• *Parmi les 5 équadiffs, il y en a 4 du type autonome* $y' = f(y)$, *et une (e) de type intégral* $y' = f(t)$. *On a vu en cours que les graphes des solutions des équadiffs autonomes sont des translatés horizontaux les uns des autres, tandis que les graphes des solutions des équadiffs intégrales sont des translatés verticaux les uns des autres. Le seul graphe à avoir cette dernière propriété est B, donc on a e* $\leftrightarrow$ *B.*

• *Parmi les 4 équadiffs restantes, qui sont donc du type* $y' = f(y)$, *il y en a deux (C et D) dont les solutions sont toutes décroissantes, donc pour lesquelles on a* $f(y) < 0$. *Les seules possibilités sont a et c. Pour les différentier, on utilise le théorème de Cauchy, qui dit que si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *alors il existe une unique solution passant par chaque point. Le graphe c n'a visiblement pas cette propriété, donc correspond à une équation* $y' = f(y)$ *dans laquelle* f *n'est pas* $\mathcal{C}^1$. *Comme* f *est* $\mathcal{C}^1$ *dans c mais pas dans a, on en déduit a* $\leftrightarrow$ *D et c* $\leftrightarrow$ *C.*

• *Parmi les 2 équadiffs restantes, qui sont donc du type* $y' = f(y)$, *il y en a une seule (E) dont les solutions sont toutes croissantes, donc pour lesquelles on a* $f(y) > 0$ *pour tout* y. *On a donc b* $\leftrightarrow$ *(E) et par élimination e* $\leftrightarrow$ *A.*

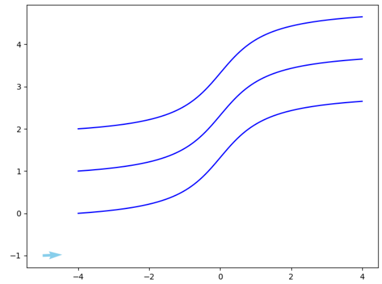
$y'(t) = -\sqrt{y(t)}$ $\quad (a)$

(A)



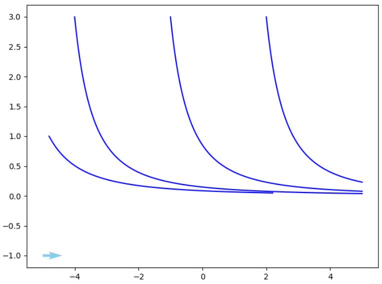
$y'(t) = 1 + y(t)^2$ $\quad (b)$

(B)



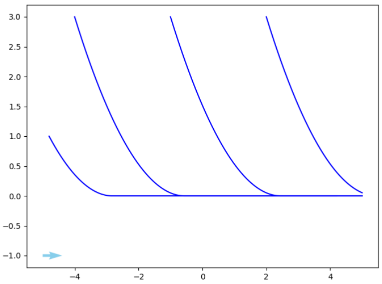
$y'(t) = -y(t)\sqrt{y(t)}$ $\quad (c)$

(C)



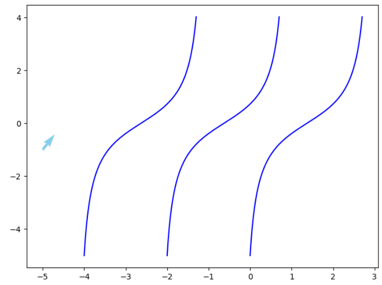
$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad (d)$

(D)



$y'(t) = \frac{1}{\sin(y(t))}$ $\quad (e)$

(E)



Correction de l'exo 2 du sujet 2-bis

Exercice 2.

Voici 5 équations différentielles, et 5 dessins de solutions. Relier chaque équation à ses solutions.

▶ *Justification (non demandée) :*

• *Parmi les 5 équadiffs, il y en a* 4 *du type autonome* $y' = f(y)$, *et une (c) de type intégral* $y' = f(t)$. *On a vu en cours que les graphes des solutions des équadiffs autonomes sont des translatés horizontaux les uns des autres, tandis que les graphes des solutions des équadiffs intégrales sont des translatés verticaux les uns des autres. Le seul graphe à avoir cette dernière propriété est* E, *donc on a* $c \leftrightarrow E$.

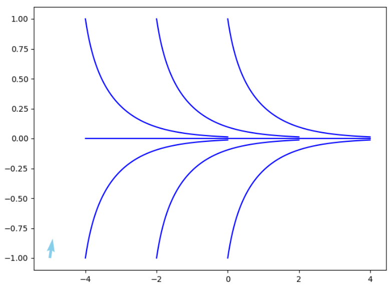
• *Parmi les 4 dessins restant, qui correspondent donc à des équadiffs du type* $y' = f(y)$, *il y en a un* (B) *sur lequel on distingue 3 solutions stationnaires. Il correspond donc à une équation dans laquelle* f *s'annule au moins 3 fois. La seule telle équation est* a, *donc on a* $a \leftrightarrow B$.

• *Parmi les 3 dessins restant, il y en a un* (C) *dans lequel toutes les solutions sont croissantes. Il correspond donc à une équation dans laquelle* f *est toujours positive. La seule telle équation est* d, *donc on a* $d \leftrightarrow C$.

• *Parmi les 2 dessins restant, il y en a un* (D) *dans lequel toutes les solutions qui sont au dessus de la solution stationnaire* $y = 0$ *sont croissantes. Il correspond donc à une équation dans laquelle* $f(u)$ *est positif si* u *est positif. C'est* B.

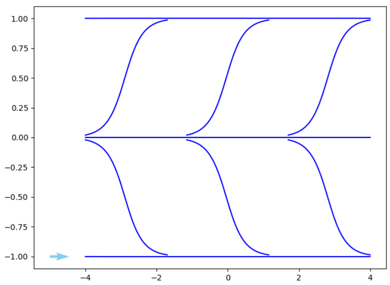
$$y'(t) = \sin(\pi y(t)) \quad (a)$$

(A)



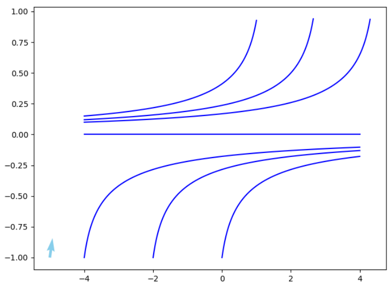
$$y'(t) = y(t)(1 + y(t)^2) \quad (b)$$

(B)



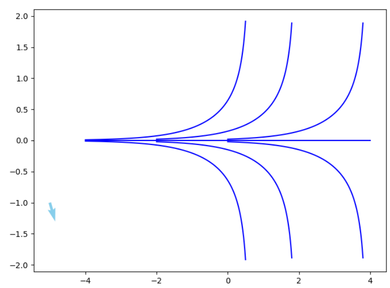
$$y'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \quad (c)$$

(C)



$$y'(t) = y(t)^2(1 + y(t)^2) \quad (d)$$

(D)



$$y'(t) = -y(t)(1 + y(t)^2) \quad (e)$$

(E)