

La surjectivité du laplacien dans les graphes infinis

Michel Coornaert

IRMA, Strasbourg

Séminaire GT3, Strasbourg



Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.



Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).



Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).

Si $v \sim w$, on dit que les sommets v et w sont **voisins**.



Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).

Si $v \sim w$, on dit que les sommets v et w sont **voisins**.



FIG. 1: Sommets voisins

Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).

Si $v \sim w$, on dit que les sommets v et w sont **voisins**.



FIG. 1: Sommets voisins

- On dit qu'un sommet est **isolé** s'il n'a pas de voisin.

Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).

Si $v \sim w$, on dit que les sommets v et w sont **voisins**.



FIG. 1: Sommets voisins

- On dit qu'un sommet est **isolé** s'il n'a pas de voisin.
- On dit qu'un graphe est **fini** s'il n'a qu'un nombre fini de sommets.



Graphes

Pour simplifier, on ne considère ici que des graphes simpliciaux.

Définition

Un **graphe simplicial** est un couple $G = (V, \sim)$, où

- V est un ensemble non vide dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- \sim est une relation dans V telle que
 - ▶ $\forall v \in V, v \not\sim v$ (antiréflexivité)
 - ▶ $\forall v, w \in V, v \sim w \Rightarrow w \sim v$ (symétrie).

Si $v \sim w$, on dit que les sommets v et w sont **voisins**.



FIG. 1: Sommets voisins

- On dit qu'un sommet est **isolé** s'il n'a pas de voisin.
- On dit qu'un graphe est **fini** s'il n'a qu'un nombre fini de sommets.
- On dit qu'un graphe est **localement fini** si chacun de ses sommets n'a qu'un nombre fini de voisins.



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé.



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Le **laplacien** du graphe G est l'endomorphisme $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \forall v \in V, \quad \Delta_G(f)(v) = f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

où $\deg(v)$ désigne le **degré**, i.e., le nombre de sommets voisins de v .



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Le **laplacien** du graphe G est l'endomorphisme $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \forall v \in V, \quad \Delta_G(f)(v) = f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

où $\deg(v)$ désigne le **degré**, i.e., le nombre de sommets voisins de v .

Remarque

Le laplacien n'est jamais injectif car toutes les fonctions constantes sont dans son noyau.



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Le **laplacien** du graphe G est l'endomorphisme $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \forall v \in V, \quad \Delta_G(f)(v) = f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

où $\deg(v)$ désigne le **degré**, i.e., le nombre de sommets voisins de v .

Remarque

Le laplacien n'est jamais injectif car toutes les fonctions constantes sont dans son noyau.

Deux sommets v et w du graphe $G = (V, \sim)$ sont dans la même composante connexe s'il existe une chaîne de sommets $v = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ avec $u_k \sim u_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Le **laplacien** du graphe G est l'endomorphisme $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \forall v \in V, \quad \Delta_G(f)(v) = f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

où $\deg(v)$ désigne le **degré**, i.e., le nombre de sommets voisins de v .

Remarque

Le laplacien n'est jamais injectif car toutes les fonctions constantes sont dans son noyau.

Deux sommets v et w du graphe $G = (V, \sim)$ sont dans la même composante connexe s'il existe une chaîne de sommets $v = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ avec $u_k \sim u_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $G_i = (V_i, \sim)$ sont les composantes connexes du graphe G , on a

$$\mathbb{R}^V = \prod_i \mathbb{R}^{V_i} \quad \text{et} \quad \Delta_G = \prod_i \Delta_{G_i}.$$



Le laplacien

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial, localement fini et sans sommet isolé. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^V formé de toutes les fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Le **laplacien** du graphe G est l'endomorphisme $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \forall v \in V, \quad \Delta_G(f)(v) = f(v) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

où $\deg(v)$ désigne le **degré**, i.e., le nombre de sommets voisins de v .

Remarque

Le laplacien n'est jamais injectif car toutes les fonctions constantes sont dans son noyau.

Deux sommets v et w du graphe $G = (V, \sim)$ sont dans la même composante connexe s'il existe une chaîne de sommets $v = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ avec $u_k \sim u_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Si $G_i = (V_i, \sim)$ sont les composantes connexes du graphe G , on a

$$\mathbb{R}^V = \prod_i \mathbb{R}^{V_i} \quad \text{et} \quad \Delta_G = \prod_i \Delta_{G_i}.$$

On dit que le graphe G est **connexe** s'il n'a qu'une seule composante connexe.



Exemple : les graphes finis

Supposons G fini.



Exemple : les graphes finis

Supposons G fini.

Alors \mathbb{R}^V est un espace vectoriel de dimension finie.



Exemple : les graphes finis

Supposons G fini.

Alors \mathbb{R}^V est un espace vectoriel de dimension finie.

Comme Δ_G n'est pas injectif, il n'est **pas surjectif**.



Exemple : les graphes finis

Supposons G fini.

Alors \mathbb{R}^V est un espace vectoriel de dimension finie.

Comme Δ_G n'est pas injectif, il n'est **pas surjectif**.

On vérifie que Δ_G est auto-adjoint pour le produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^V, \quad \langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} \deg(v) f(v) g(v).$$



Exemple : les graphes finis

Supposons G fini.

Alors \mathbb{R}^V est un espace vectoriel de dimension finie.

Comme Δ_G n'est pas injectif, il n'est **pas surjectif**.

On vérifie que Δ_G est auto-adjoint pour le produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^V, \quad \langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} \deg(v) f(v) g(v).$$

En effet, quels que soient $f, g \in \mathbb{R}^V$, on a

$$\begin{aligned} \langle f, \Delta_G(g) \rangle &= \sum_{v \sim w} f(v) (g(v) - g(w)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \sim w} f(v) (g(v) - g(w)) + \sum_{v \sim w} f(w) (g(w) - g(v)) \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\langle f, \Delta_G(g) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w))(g(v) - g(w)) = \langle \Delta_G(f), g \rangle.$$



Exemple : les graphes finis (suite)

On a en particulier

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \quad \langle f, \Delta_G(f) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w))^2.$$



Exemple : les graphes finis (suite)

On a en particulier

$$\forall f \in \mathbb{R}^V, \quad \langle f, \Delta_G(f) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w))^2.$$

On en déduit que si G est fini et connexe, alors le noyau de Δ_G est réduit aux fonctions constantes (ce qui peut aussi se montrer en utilisant le principe du maximum) et que son image est

$$\text{Im } \Delta_G = (\text{Ker } \Delta_G)^\perp = \left\{ f \in \mathbb{R}^V : \sum_{v \in V} \text{deg}(v) f(v) = 0 \right\}.$$



Exemple : La chaîne à un bout

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{N}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



Exemple : La chaîne à un bout

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{N}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



FIG. 2: La chaîne à un bout

Exemple : La chaîne à un bout

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{N}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



FIG. 2: La chaîne à un bout

On a

$$\Delta_G(f)(n) = \begin{cases} f(0) - f(1) & \text{si } n = 0, \\ f(n) - \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Exemple : La chaîne à un bout

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{N}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



FIG. 2: La chaîne à un bout

On a

$$\Delta_G(f)(n) = \begin{cases} f(0) - f(1) & \text{si } n = 0, \\ f(n) - \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Le noyau de Δ_G est réduit aux fonctions constantes et Δ_G est surjectif.



Exemple : La chaîne à deux bouts

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{Z}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



Exemple : La chaîne à deux bouts

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{Z}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.

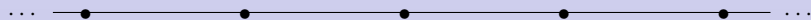


FIG. 3: La chaîne à deux bouts

Exemple : La chaîne à deux bouts

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{Z}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.



FIG. 3: La chaîne à deux bouts

On a

$$\Delta_G(f)(n) = f(n) - \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2}.$$

Exemple : La chaîne à deux bouts

On prend $G = (V, \sim)$ avec $V = \mathbb{Z}$ et $n \sim m \iff n = m \pm 1$.

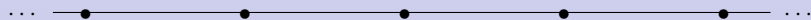


FIG. 3: La chaîne à deux bouts

On a

$$\Delta_G(f)(n) = f(n) - \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2}.$$

Le noyau de Δ_G est de dimension 2 (suites arithmétiques $n \mapsto C_1 + C_2n$) et Δ_G est surjectif.

Exemple : l'arbre triadique

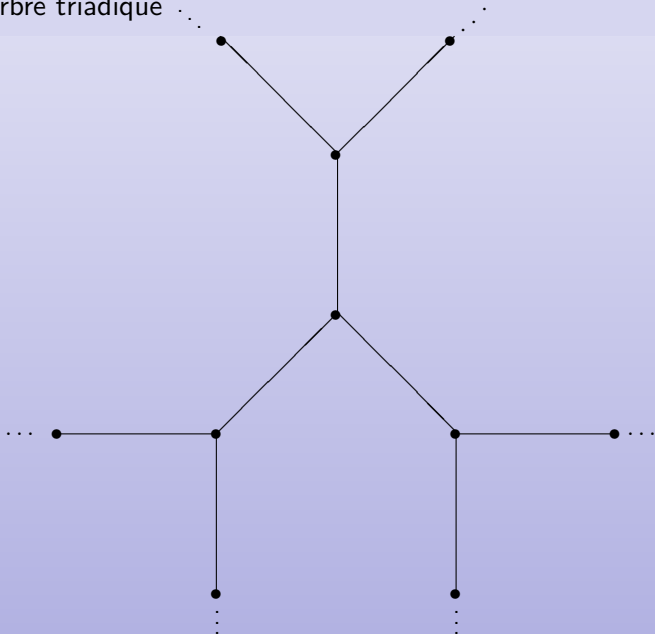


FIG. 4: L'arbre triadique



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.
L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.

L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.

Fixons un sommet v_0 de l'arbre triadique.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.

L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.

Fixons un sommet v_0 de l'arbre triadique.

Un **bout** est un chemin qui va vers l'infini en partant de v_0 sans jamais revenir en arrière.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.

L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.

Fixons un sommet v_0 de l'arbre triadique.

Un **bout** est un chemin qui va vers l'infini en partant de v_0 sans jamais revenir en arrière.

L'ensemble Ω des bouts est non dénombrable.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.

L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.

Fixons un sommet v_0 de l'arbre triadique.

Un **bout** est un chemin qui va vers l'infini en partant de v_0 sans jamais revenir en arrière.

L'ensemble Ω des bouts est non dénombrable.

À tout bout $\omega \in \Omega$, on peut associer une fonction harmonique h_ω défini de la manière suivante.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle de sommets voisins.

L'**arbre triadique** est l'arbre dont tous les sommets sont de degré 3.

Fixons un sommet v_0 de l'arbre triadique.

Un **bout** est un chemin qui va vers l'infini en partant de v_0 sans jamais revenir en arrière.

L'ensemble Ω des bouts est non dénombrable.

À tout bout $\omega \in \Omega$, on peut associer une fonction harmonique h_ω défini de la manière suivante. On commence par poser $h_\omega(v_0) = 1$. Partant de v_0 quand on passe à un sommet voisin dans la direction du bout ω , la valeur de h_ω est multipliée par 2. Quand on va dans une autre direction que celle du bout, on divise la valeur de h_ω par 2.



Exemple : l'arbre triadique (suite)

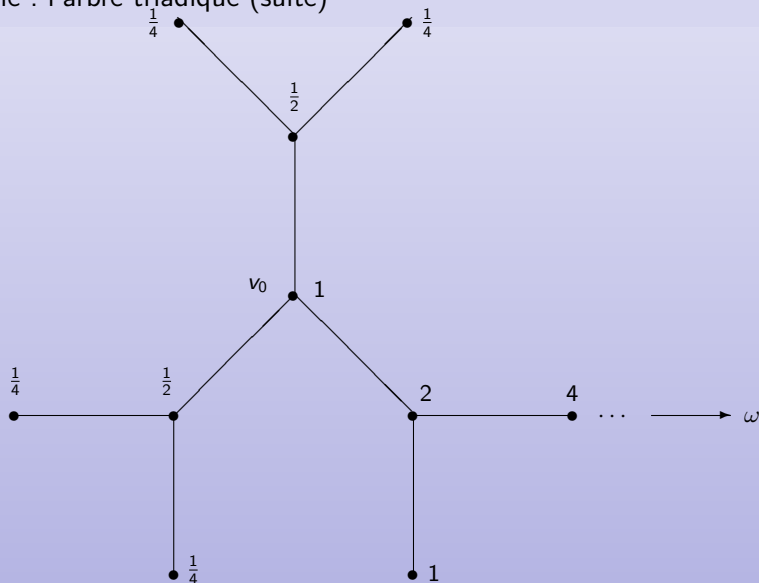


FIG. 5: Fonction harmonique associée à un bout

Exemple : l'arbre triadique (suite)



FIG. 6: $h_\omega(v) = 2^{b-a}$

On a

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \lim_{v \rightarrow \omega'} h_\omega(v) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \omega' = \omega, \\ 0 & \text{si } \omega' \neq \omega. \end{cases}$$



Exemple : l'arbre triadique (suite)



FIG. 6: $h_\omega(v) = 2^{b-a}$

On a

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \lim_{v \rightarrow \omega'} h_\omega(v) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \omega' = \omega, \\ 0 & \text{si } \omega' \neq \omega. \end{cases}$$

On en déduit que les fonctions $h_\omega, \omega \in \Omega$, sont linéairement indépendantes.



Exemple : l'arbre triadique (suite)



FIG. 6: $h_\omega(v) = 2^{b-a}$

On a

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \lim_{v \rightarrow \omega'} h_\omega(v) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \omega' = \omega, \\ 0 & \text{si } \omega' \neq \omega. \end{cases}$$

On en déduit que les fonctions h_ω , $\omega \in \Omega$, sont linéairement indépendantes. Le noyau de Δ_G est donc de dimension non dénombrable.



Exemple : l'arbre triadique (suite)



FIG. 6: $h_\omega(v) = 2^{b-a}$

On a

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \lim_{v \rightarrow \omega'} h_\omega(v) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \omega' = \omega, \\ 0 & \text{si } \omega' \neq \omega. \end{cases}$$

On en déduit que les fonctions h_ω , $\omega \in \Omega$, sont linéairement indépendantes.

Le noyau de Δ_G est donc de dimension non dénombrable.

Ici encore, on voit facilement que Δ_G est surjectif.



Exemple : un graphe infini 3-régulier sur lequel les fonctions harmoniques sont constantes

Il existe des graphes infinis, dont tous les sommets sont de degré 3, sur lesquels les seules fonctions harmoniques sont les fonctions constantes (voir [Tro-1998]) comme celui-ci :

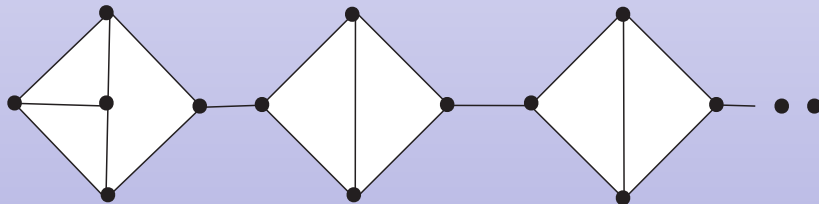


FIG. 7: Un graphe 3-régulier



Surjectivité du laplacien

Le résultat suivant a été obtenu en collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein (Rome) et Józef Dodziuk (NYC).

Théorème (CCD-2011)

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial connexe, infini et localement fini. Alors son laplacien $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ est surjectif.



Le résultat suivant a été obtenu en collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein (Rome) et Józef Dodziuk (NYC).

Théorème (CCD-2011)

Soit $G = (V, \sim)$ un graphe simplicial connexe, infini et localement fini. Alors son laplacien $\Delta_G: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ est surjectif.

Plan de la démonstration :

on munit \mathbb{R}^V de sa topologie prodiscrète et on démontre les deux points suivants

- $\text{Im } \Delta_G$ est dense dans \mathbb{R}^V ,
- $\text{Im } \Delta_G$ est fermé dans \mathbb{R}^V ,

qui impliquent $\text{Im } \Delta_G = \mathbb{R}^V$.



La topologie prodiscrète

La **topologie prodiscrète** sur \mathbb{R}^V est la topologie obtenue en munissant \mathbb{R} de sa topologie discrète et en prenant la topologie produit sur $\mathbb{R}^V = \prod_{v \in V} \mathbb{R}$.



La topologie prodiscrète

La **topologie prodiscrète** sur \mathbb{R}^V est la topologie obtenue en munissant \mathbb{R} de sa topologie discrète et en prenant la topologie produit sur $\mathbb{R}^V = \prod_{v \in V} \mathbb{R}$.

La topologie prodiscrète sur \mathbb{R}^V est métrisable. En effet, fixons un sommet v_0 et notons B_n l'ensemble des sommets à distance $\leq n$ de v_0 . On a $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout n . Alors

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^V, \quad d(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{2^{n+1}},$$

où $\alpha_n = 0$ si f et g coïncident sur B_n et $\alpha_n = 1$ sinon, est une distance qui induit la topologie prodiscrète sur \mathbb{R}^V .



Démonstration de la densité de l'image

Notons F_n l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^V$ dont le support est contenu dans B_n et considérons l'application linéaire $\delta_n: F_n \rightarrow F_n$ définie par

$$\forall f \in F_n, \forall v \in V, \quad \delta_n(f)(v) = \begin{cases} \Delta_G(f)(v) & \text{si } v \in B_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Démonstration de la densité de l'image

Notons F_n l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^V$ dont le support est contenu dans B_n et considérons l'application linéaire $\delta_n: F_n \rightarrow F_n$ définie par

$$\forall f \in F_n, \forall v \in V, \quad \delta_n(f)(v) = \begin{cases} \Delta_G(f)(v) & \text{si } v \in B_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le principe du maximum, on montre que δ_n est injective. En effet, si $f \in \text{Ker } \delta_n$, on a

$$\forall v \in B_n, \quad |f(v)| = \left| \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) \right| \leq \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} |f(w)|,$$

ce qui implique que si $v \in B_n$ vérifie $|f(v)| = M = \max |f|$, alors $|f(w)| = M$ pour tout $w \in V$ tel que $v \sim w$. Donc $|f|$ est constant sur B_{n+1} . Or, on peut trouver un sommet qui est dans B_{n+1} mais pas dans B_n puisque G est infini. Par conséquent, f est identiquement nulle.



Démonstration de la densité de l'image

Notons F_n l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^V$ dont le support est contenu dans B_n et considérons l'application linéaire $\delta_n: F_n \rightarrow F_n$ définie par

$$\forall f \in F_n, \forall v \in V, \quad \delta_n(f)(v) = \begin{cases} \Delta_G(f)(v) & \text{si } v \in B_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le principe du maximum, on montre que δ_n est injective. En effet, si $f \in \text{Ker } \delta_n$, on a

$$\forall v \in B_n, \quad |f(v)| = \left| \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) \right| \leq \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} |f(w)|,$$

ce qui implique que si $v \in B_n$ vérifie $|f(v)| = M = \max |f|$, alors $|f(w)| = M$ pour tout $w \in V$ tel que $v \sim w$. Donc $|f|$ est constant sur B_{n+1} . Or, on peut trouver un sommet qui est dans B_{n+1} mais pas dans B_n puisque G est infini. Par conséquent, f est identiquement nulle.

Comme F_n est de dimension finie, l'injectivité de δ_n implique sa surjectivité. On en déduit que, quels que soient $g \in \mathbb{R}^V$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $f \in F_n$ tel que $\Delta_G(f)$ coïncide avec g sur B_n . Donc $\text{Im } \Delta_G$ est dense dans \mathbb{R}^V .

Suites projectives d'ensembles

Rappelons qu'une **suite projective d'ensembles** $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la donnée d'une suite d'ensembles X_n munis d'applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.



Suites projectives d'ensembles

Rappelons qu'une **suite projective d'ensembles** $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la donnée d'une suite d'ensembles X_n munis d'applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

$$X_0 \xleftarrow{u_0} X_1 \xleftarrow{u_1} X_2 \xleftarrow{u_2} X_3 \xleftarrow{u_3} \dots$$



Suites projectives d'ensembles

Rappelons qu'une **suite projective d'ensembles** $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la donnée d'une suite d'ensembles X_n munis d'applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

$$X_0 \xleftarrow{u_0} X_1 \xleftarrow{u_1} X_2 \xleftarrow{u_2} X_3 \xleftarrow{u_3} \dots$$

La **limite projective** de la suite projective (X_n, u_n) est l'ensemble $\varprojlim (X_n, u_n)$ formé de toutes les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in X_n$ et $x_n = u_n(x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Suites projectives d'ensembles

Rappelons qu'une **suite projective d'ensembles** $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la donnée d'une suite d'ensembles X_n munis d'applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

$$X_0 \xleftarrow{u_0} X_1 \xleftarrow{u_1} X_2 \xleftarrow{u_2} X_3 \xleftarrow{u_3} \dots$$

La **limite projective** de la suite projective (X_n, u_n) est l'ensemble $\varprojlim (X_n, u_n)$ formé de toutes les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in X_n$ et $x_n = u_n(x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La limite projective peut-être vide même si les X_n sont tous non vides.



Suites projectives d'ensembles

Rappelons qu'une **suite projective d'ensembles** $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la donnée d'une suite d'ensembles X_n munis d'applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

$$X_0 \xleftarrow{u_0} X_1 \xleftarrow{u_1} X_2 \xleftarrow{u_2} X_3 \xleftarrow{u_3} \dots$$

La **limite projective** de la suite projective (X_n, u_n) est l'ensemble $\varprojlim (X_n, u_n)$ formé de toutes les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \in X_n$ et $x_n = u_n(x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La limite projective peut-être vide même si les X_n sont tous non vides.

Cependant, si toutes les applications u_n sont surjectives et $X_0 \neq \emptyset$, alors il est clair que $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$ (prendre des antécédents successifs d'un élément $x_0 \in X_0$).



Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.



Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Démonstration.

Pour $n \leq m$, soit $\gamma_{nm}: X_m \rightarrow X_n$ l'application définie par

$$\gamma_{nm} = u_n \circ u_{n+1} \circ \dots \circ u_{m-1}.$$

Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Démonstration.

Pour $n \leq m$, soit $\gamma_{nm}: X_m \rightarrow X_n$ l'application définie par

$$\gamma_{nm} = u_n \circ u_{n+1} \circ \dots \circ u_{m-1}.$$

Pour n fixé, les sous-espaces affines $\gamma_{nm}(X_m) \subset X_n$ avec $m = n, n+1, \dots$, forment une suite décroissante. Comme ils sont de dimension finie, cette suite se stabilise (elle devient constante pour m assez grand).

Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Démonstration.

Pour $n \leq m$, soit $\gamma_{nm}: X_m \rightarrow X_n$ l'application définie par

$$\gamma_{nm} = u_n \circ u_{n+1} \circ \dots \circ u_{m-1}.$$

Pour n fixé, les sous-espaces affines $\gamma_{nm}(X_m) \subset X_n$ avec $m = n, n+1, \dots$, forment une suite décroissante. Comme ils sont de dimension finie, cette suite se stabilise (elle devient constante pour m assez grand).

Posons $X'_n = \bigcap_{n \leq m} \gamma_{nm}(X_m)$. L'application u_n induit par restriction une application $u'_n: X'_{n+1} \rightarrow X'_n$.

Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Démonstration.

Pour $n \leq m$, soit $\gamma_{nm}: X_m \rightarrow X_n$ l'application définie par

$$\gamma_{nm} = u_n \circ u_{n+1} \circ \dots \circ u_{m-1}.$$

Pour n fixé, les sous-espaces affines $\gamma_{nm}(X_m) \subset X_n$ avec $m = n, n+1, \dots$, forment une suite décroissante. Comme ils sont de dimension finie, cette suite se stabilise (elle devient constante pour m assez grand).

Posons $X'_n = \bigcap_{n \leq m} \gamma_{nm}(X_m)$. L'application u_n induit par restriction une application $u'_n: X'_{n+1} \rightarrow X'_n$.

Les propriétés de stabilité ci-dessus permettent de montrer que X'_0 est non vide et que les applications u'_n sont toutes surjectives.

Un lemme à la Mittag-Leffler

Lemma 1

Soit $(X_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite projective d'ensembles. On suppose que les X_n sont tous des espaces affines non vides de dimension finie sur un même corps K et que les applications $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont toutes affines. Alors on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Démonstration.

Pour $n \leq m$, soit $\gamma_{nm}: X_m \rightarrow X_n$ l'application définie par

$$\gamma_{nm} = u_n \circ u_{n+1} \circ \dots \circ u_{m-1}.$$

Pour n fixé, les sous-espaces affines $\gamma_{nm}(X_m) \subset X_n$ avec $m = n, n+1, \dots$, forment une suite décroissante. Comme ils sont de dimension finie, cette suite se stabilise (elle devient constante pour m assez grand).

Posons $X'_n = \bigcap_{n \leq m} \gamma_{nm}(X_m)$. L'application u_n induit par restriction une application $u'_n: X'_{n+1} \rightarrow X'_n$.

Les propriétés de stabilité ci-dessus permettent de montrer que X'_0 est non vide et que les applications u'_n sont toutes surjectives.

On en déduit $\emptyset \neq \varprojlim (X'_n, u'_n) = \varprojlim (X_n, u_n)$. □

Un lemme à la Mittag-Leffler (suite)

Remarque

Le lemme qui précède devient faux si l'on supprime l'hypothèse que les X_n sont de dimension finie. Pour s'en convaincre, on peut prendre par exemple, dans l'espace de Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^2 < \infty\},$$

les sous-espaces affines

$$X_n = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : a_0 = a_1 = \dots = a_n = 1\}$$

avec pour $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$ l'inclusion. On a alors

$$\varprojlim (X_n, u_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \emptyset.$$



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

D'après le lemme, on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

D'après le lemme, on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Choisissons un élément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (X_n, u_n)$.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

D'après le lemme, on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Choisissons un élément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (X_n, u_n)$.

On a $x_n \in \mathbb{R}^{B_{n+1}}$. De plus, x_{n+1} coïncide avec x_n sur B_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n+1}$, il existe $f \in \mathbb{R}^V$ (unique) tel que $f|_{B_{n+1}} = x_n$ pour tout n .



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

D'après le lemme, on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Choisissons un élément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (X_n, u_n)$.

On a $x_n \in \mathbb{R}^{B_{n+1}}$. De plus, x_{n+1} coïncide avec x_n sur B_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n+1}$, il existe $f \in \mathbb{R}^V$ (unique) tel que $f|_{B_{n+1}} = x_n$ pour tout n .

On a $(\Delta_G(f))|_{B_n} = \Delta_G^{(n)}(x_n) = g|_{B_n}$ pour tout n puisque $x_n \in X_n$. Comme $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, il en résulte que $\Delta_G(f) = g$.



Démonstration de la fermeture de l'image

Soit $g \in \mathbb{R}^V$ dans la fermeture de $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathbb{R}^V$ tel que g et $\Delta_G(f_n)$ coïncident sur B_n .

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace affine $X_n \subset \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ défini par

$$X_n = (\Delta_G^{(n)})^{-1}(g|_{B_n}),$$

où $\Delta_G^{(n)}: \mathbb{R}^{B_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_n}$ est l'application linéaire induite par Δ_G .

On a $X_n \neq \emptyset$ puisque $f_n|_{B_{n+1}} \in X_n$. De plus, X_n est de dimension finie puisque $\mathbb{R}^{B_{n+1}}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

L'application de restriction $\mathbb{R}^{B_{n+2}} \rightarrow \mathbb{R}^{B_{n+1}}$ induit une application affine $u_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$.

D'après le lemme, on a $\varprojlim (X_n, u_n) \neq \emptyset$.

Choisissons un élément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim (X_n, u_n)$.

On a $x_n \in \mathbb{R}^{B_{n+1}}$. De plus, x_{n+1} coïncide avec x_n sur B_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_{n+1}$, il existe $f \in \mathbb{R}^V$ (unique) tel que $f|_{B_{n+1}} = x_n$ pour tout n .

On a $(\Delta_G(f))|_{B_n} = \Delta_G^{(n)}(x_n) = g|_{B_n}$ pour tout n puisque $x_n \in X_n$. Comme $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, il en résulte que $\Delta_G(f) = g$.

Cela montre que $\Delta_G(\mathbb{R}^V)$ est fermé dans \mathbb{R}^V pour la topologie prodiscrète.



Remarques finales

Remarque

La même démonstration nous donne la surjectivité de $L = \Delta_G + \lambda \text{Id} : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ pour tout graphe simplicial infini, localement fini, et connexe G et toute fonction $\lambda : V \rightarrow [0, +\infty)$ sur l'ensemble V des sommets de G . En effet, L est linéaire et, pour $f \in \mathbb{R}^V$ et $v \in V$, l'égalité $L(f)(v) = 0$ implique

$$\begin{aligned} |f(v)| &= \left| \frac{1}{(1 + \lambda(v)) \deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w) \right| \\ &\leq \frac{1}{(1 + \lambda(v)) \deg(v)} \sum_{v \sim w} |f(w)| \leq \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} |f(w)|, \end{aligned}$$

ce qui montre que L vérifie aussi le principe du maximum.

Remarque

Dans [CC-2009], on avait déjà obtenu la surjectivité de Δ_G dans le cas particulier où G est le graphe de Cayley d'un groupe infini de type fini. On distinguait deux cas dans la démonstration suivant que G est moyennable ou non, en faisant appel au **théorème du Jardin d'Éden** pour les automates cellulaires linéaires [CC-2006] dans le cas moyennable et au théorème spectral de Day dans le cas non-moyennable.

- [CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.
- [CC-2009] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A note on Laplace operators on groups*, Limits of graphs in group theory and computer science, 37–40, EPFL Press, Lausanne, 2009.
- [CCD-2011] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, J. Dodziuk, *The surjectivity of the combinatorial Laplacian on infinite graphs*, arXiv :1103.4901, à paraître dans L'Enseignement Mathématique.
- [Gro-1999] M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.
- [Tro-1998] V.I. Trofimov, *The existence of nonconstant harmonic functions on infinite vertex-symmetric graphs*, Europ. J. Combinatorics **19** (1998), 519–523.