Les groupes sofiques

Michel Coornaert

Séminaire GT3, Strasbourg

Bibliographie

M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.

Bibliographie

M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.

B. Weiss, *Sofic groups and dynamical systems*, (Ergodic theory and harmonic analysis, Mumbai, 1999) Sankhya Ser. A. **62** (2000), 350–359.

Bibliographie

M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.

B. Weiss, *Sofic groups and dynamical systems*, (Ergodic theory and harmonic analysis, Mumbai, 1999) Sankhya Ser. A. **62** (2000), 350–359.

V.G. Pestov, *Hyperlinear and sofic groups : a brief guide*, Bull. Symbolic Logic **14** (2008), 449–480.

La distance de Hamming

Soit F un ensemble fini non vide. On note

$$\mathrm{Sym}(F) = \{\alpha\colon F \to F : \alpha \text{ est bijectif } \}$$

le groupe symétrique de F.

La distance de Hamming

Soit F un ensemble fini non vide. On note

$$\mathrm{Sym}(F) = \{\alpha\colon F \to F : \alpha \text{ est bijectif } \}$$

le groupe symétrique de F. La distance de Hamming entre $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(F)$ est

$$d(\alpha, \beta) := \frac{|\{x \in F : \alpha(x) \neq \beta(x)\}|}{|F|}.$$

La distance de Hamming

Soit F un ensemble fini non vide. On note

$$\mathrm{Sym}(F) = \{\alpha\colon F \to F : \alpha \text{ est bijectif }\}$$

le groupe symétrique de F. La distance de Hamming entre $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(F)$ est

$$d(\alpha, \beta) := \frac{|\{x \in F : \alpha(x) \neq \beta(x)\}|}{|F|}.$$

On a

$$\begin{gathered}
0 \leq d(\alpha, \beta) \leq 1 \\
d(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta \\
d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) \\
d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta) \\
d(\alpha\gamma, \beta\gamma) = d(\gamma\alpha, \gamma\beta) = d(\alpha, \beta)
\end{gathered}$$

quels que soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Sym}(F)$.

La distance de Hamming

Soit F un ensemble fini non vide. On note

$$\mathrm{Sym}(F) = \{\alpha \colon F \to F : \alpha \text{ est bijectif }\}$$

le groupe symétrique de F. La distance de Hamming entre $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(F)$ est

$$d(\alpha,\beta) := \frac{|\{x \in F : \alpha(x) \neq \beta(x)\}|}{|F|}.$$

On a

$$\begin{gathered} 0 \leq d(\alpha,\beta) \leq 1 \\ d(\alpha,\beta) = 0 \iff \alpha = \beta \\ d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha) \\ d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta) \\ d(\alpha\gamma,\beta\gamma) = d(\gamma\alpha,\gamma\beta) = d(\alpha,\beta) \end{gathered}$$

quels que soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Sym}(F)$.

- d est une distance bi-invariante sur $\mathrm{Sym}(F)$.

Définition des groupes sofiques

Soit G un groupe.
Soient $K \subset G$ un sous-ensemble fini, $\varepsilon > 0$, et F un ensemble fini non vide.
On dit qu'une application $\varphi \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme si elle vérifie :

(H1) $d(\varphi(k_1 k_2), \varphi(k_1)\varphi(k_2)) \leq \varepsilon \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(H2) $d(\varphi(k_1), \varphi(k_2)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall k_1, k_2 \in K$ tels que $k_1 \neq k_2$

où d désigne la distance de Hamming sur $\mathrm{Sym}(F)$.

Définition des groupes sofiques

Soit G un groupe.
Soient $K \subset G$ un sous-ensemble fini, $\varepsilon > 0$, et F un ensemble fini non vide.
On dit qu'une application $\varphi \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme si elle vérifie :

(H1) $d(\varphi(k_1 k_2), \varphi(k_1)\varphi(k_2)) \leq \varepsilon \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(H2) $d(\varphi(k_1), \varphi(k_2)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall k_1, k_2 \in K$ tels que $k_1 \neq k_2$

où d désigne la distance de Hamming sur $\mathrm{Sym}(F)$.

Définition

On dit qu'un groupe G est sofique si, pour tout sous ensemble fini $K \subset G$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini non vide F et un (K, ε)-homomorphisme

$$\varphi \colon G \to \mathrm{Sym}(F).$$

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe fini est sofique.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe fini est sofique.

Démonstration.

L'homomorphisme de Cayley

$$\begin{aligned} c_G \colon G &\hookrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g &\mapsto (x \mapsto gx) \end{aligned}$$

est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $K \subset G$ et tout $\varepsilon > 0$. $\square$

Proposition

Tout groupe fini est sofique.

Démonstration.

L'homomorphisme de Cayley

$$\begin{aligned} c_G \colon G &\hookrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g &\mapsto (x \mapsto gx) \end{aligned}$$

est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $K \subset G$ et tout $\varepsilon > 0$. $\square$

On dit qu'un groupe G est résiduellement fini si, pour tout $g \in G$ tel que $g \neq 1_G$, il existe un groupe fini F et un homomorphisme $u \colon G \to F$ tel que $u(g) \neq 1_F$.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe résiduellement fini. Si $K \subset G$ est fini, on peut trouver un groupe fini F et un homomorphisme $u \colon G \to F$ tel que la restriction de u à K est injective. Si $c_F \colon F \to \mathrm{Sym}(F)$ est l'homomorphisme de Cayley, alors l'homomorphisme $c_F \circ u \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $\varepsilon > 0$. □

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe résiduellement fini. Si $K \subset G$ est fini, on peut trouver un groupe fini F et un homomorphisme $u \colon G \to F$ tel que la restriction de u à K est injective. Si $c_F \colon F \to \mathrm{Sym}(F)$ est l'homomorphisme de Cayley, alors l'homomorphisme $c_F \circ u \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

•$\mathbb{Z}$ est résiduellement fini mais $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe résiduellement fini. Si $K \subset G$ est fini, on peut trouver un groupe fini F et un homomorphisme $u\colon G \to F$ tel que la restriction de u à K est injective. Si $c_F\colon F \to \mathrm{Sym}(F)$ est l'homomorphisme de Cayley, alors l'homomorphisme $c_F \circ u\colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

•$\mathbb{Z}$ est résiduellement fini mais $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini.

Théorème (Mal'cev)

Tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe résiduellement fini. Si $K \subset G$ est fini, on peut trouver un groupe fini F et un homomorphisme $u \colon G \to F$ tel que la restriction de u à K est injective. Si $c_F \colon F \to \mathrm{Sym}(F)$ est l'homomorphisme de Cayley, alors l'homomorphisme $c_F \circ u \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

•$\mathbb{Z}$ est résiduellement fini mais $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini.

Théorème (Mal'cev)

Tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini.

• Tout groupe localement sofique est sofique.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe résiduellement fini est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe résiduellement fini. Si $K \subset G$ est fini, on peut trouver un groupe fini F et un homomorphisme $u \colon G \to F$ tel que la restriction de u à K est injective. Si $c_F \colon F \to \mathrm{Sym}(F)$ est l'homomorphisme de Cayley, alors l'homomorphisme $c_F \circ u \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

• $\mathbb{Z}$ est résiduellement fini mais $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini.

Théorème (Mal'cev)

Tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini.

• Tout groupe localement sofique est sofique.

Corollaire

Tout groupe linéaire est sofique.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G peut se plonger localement dans $\mathcal{C}$ si pour tout sous-ensemble fini $K \subset G$ on peut trouver un groupe $C \in \mathcal{C}$ et une application $\psi\colon G \to C$ telle que

(L1) $\psi(k_1 k_2) = \psi(k_1)\psi(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(L2) la restriction de ψ à K est injective.

Exemples de groupes sofiques

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G peut se plonger localement dans $\mathcal{C}$ si pour tout sous-ensemble fini $K \subset G$ on peut trouver un groupe $C \in \mathcal{C}$ et une application $\psi\colon G \to C$ telle que

(L1) $\psi(k_1 k_2) = \psi(k_1)\psi(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(L2) la restriction de ψ à K est injective.

• Les groupes qui peuvent se plonger localement dans la classe des groupes finis sont les groupes LEF de Vershik et Gordon.

• Tout groupe résiduellement fini est LEF. Le groupe $\mathbb{Q}$ est LEF mais pas résiduellement fini. Il y a des groupes de type fini qui sont LEF mais pas résiduellement finis.

Exemples de groupes sofiques

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G peut se plonger localement dans $\mathcal{C}$ si pour tout sous-ensemble fini $K \subset G$ on peut trouver un groupe $C \in \mathcal{C}$ et une application $\psi\colon G \to C$ telle que

(L1) $\psi(k_1 k_2) = \psi(k_1)\psi(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(L2) la restriction de ψ à K est injective.

• Les groupes qui peuvent se plonger localement dans la classe des groupes finis sont les groupes LEF de Vershik et Gordon.

• Tout groupe résiduellement fini est LEF. Le groupe $\mathbb{Q}$ est LEF mais pas résiduellement fini. Il y a des groupes de type fini qui sont LEF mais pas résiduellement finis.

Exemple

Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ engendré par la transposition $(0\,1)$ et la translation $t\colon z \mapsto z + 1$. Le groupe G contient le groupe $\mathrm{Sym}_0(\mathbb{Z})$ formé des permutations de $\mathbb{Z}$ à support fini. Le groupe G est le produit semi-direct de $\mathrm{Sym}_0(\mathbb{Z})$ avec le groupe infini cyclique engendré par t.

Le groupe G est LEF mais n'est pas résiduellement fini.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe qui peut se plonger localement dans la classe des groupes sofiques est lui-même sofique.

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe qui peut se plonger localement dans la classe des groupes sofiques est lui-même sofique.

Démonstration.

Soit G un tel groupe, $K \subset G$ un sous-ensemble fini, et $\varepsilon > 0$.
Il existe un groupe sofique C et une application $\psi \colon G \to C$ telle que

(1) $\psi(k_1 k_2) = \psi(k_1)\psi(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(2) la restriction de ψ à K est injective.

Comme C est sofique, il existe un ensemble fini F et un $(\psi(K), \varepsilon)$-homomorphisme $\phi \colon C \to \mathrm{Sym}(F)$.
Alors $\phi \circ \psi \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme.

$\square$

Exemples de groupes sofiques

Proposition

Tout groupe qui peut se plonger localement dans la classe des groupes sofiques est lui-même sofique.

Démonstration.

Soit G un tel groupe, $K \subset G$ un sous-ensemble fini, et $\varepsilon > 0$.
Il existe un groupe sofique C et une application $\psi \colon G \to C$ telle que

(1) $\psi(k_1 k_2) = \psi(k_1)\psi(k_2) \quad \forall k_1, k_2 \in K$;

(2) la restriction de ψ à K est injective.

Comme C est sofique, il existe un ensemble fini F et un $(\psi(K), \varepsilon)$-homomorphisme $\phi \colon C \to \mathrm{Sym}(F)$.
Alors $\phi \circ \psi \colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ est un (K, ε)-homomorphisme.

□

Corollaire

Tout groupe LEF est sofique.

Exemples de groupes sofiques

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

Définition

On dit que G est un groupe moyennable s'il existe une mesure de probabilité finiment additive $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$, $A \in \mathcal{P}(G)$.

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

Définition

On dit que G est un groupe moyennable s'il existe une mesure de probabilité finiment additive $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$, $A \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini est moyennable.

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

Définition

On dit que G est un groupe moyennable s'il existe une mesure de probabilité finiment additive $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$, $A \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini est moyennable.
- Tout groupe commutatif et, plus généralement, tout groupe résoluble est moyennable.

Soit G un groupe. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

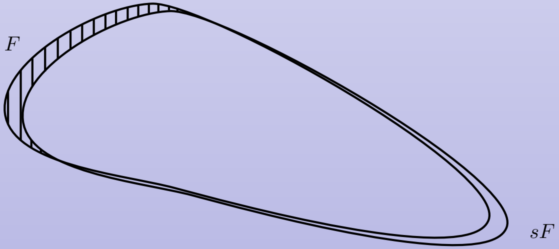
Définition

On dit que G est un groupe moyennable s'il existe une mesure de probabilité finiment additive $\mu \colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$, $A \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini est moyennable.
- Tout groupe commutatif et, plus généralement, tout groupe résoluble est moyennable.
- Tout groupe de type fini à croissance sous-exponentielle est moyennable.

Critère de Følner : le groupe G est moyennable si et seulement si il vérifie :

$$\forall S \text{ fini } \subset G, \forall \varepsilon > 0, \exists F \text{ fini non vide } \subset G \text{ tel que } \forall s \in S \quad \frac{|F \setminus sF|}{|F|} \leq \varepsilon.$$



Exemples de groupes sofiques

Théorème

Tout groupe moyennable est sofique.

Théorème

Tout groupe moyennable est sofique.

Démonstration.

Soit G un groupe moyennable, $K \subset G$ un sous-ensemble fini, et $\varepsilon > 0$.
On pose $S = (\{1_G\} \cup K \cup K^{-1})^2$. D'après Følner, on peut trouver un sous-ensemble fini non vide $F \subset G$ tel que

$$\forall s \in S \quad \frac{|F \setminus sF|}{|F|} \leq \frac{\varepsilon}{|S|}.$$

Pour $g \in G$, on choisit une bijection $\alpha_g \colon gF \setminus F \to F \setminus gF$. On vérifie que l'application $\varphi\colon G \to \mathrm{Sym}(F)$ définie par

$$\forall g \in G, \forall x \in F, \varphi(g)(x) = \begin{cases} gx & \text{si } gx \in F \\ \alpha_g(gx) & \text{sinon} \end{cases}$$

est un (K, ε)-homomorphisme. □

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

Corollaire

Tout groupe LEA est sofique.

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

Corollaire

Tout groupe LEA est sofique.

• Un groupe de présentation finie est LEF (resp. LEA) si et seulement si il est résiduellement fini (resp. résiduellement moyennable).

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

Corollaire

Tout groupe LEA est sofique.

• Un groupe de présentation finie est LEF (resp. LEA) si et seulement si il est résiduellement fini (resp. résiduellement moyennable).
• On connaît des exemples (Abels) de groupes résolubles de présentation finie qui ne sont pas résiduellement finis. Un tel groupe est moyennable (et donc LEA) mais pas LEF.

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

Corollaire

Tout groupe LEA est sofique.

• Un groupe de présentation finie est LEF (resp. LEA) si et seulement si il est résiduellement fini (resp. résiduellement moyennable).
• On connaît des exemples (Abels) de groupes résolubles de présentation finie qui ne sont pas résiduellement finis. Un tel groupe est moyennable (et donc LEA) mais pas LEF.
• Autre exemple : le groupe de Baumslag-Solitar $BS(2,3)$ est résiduellement résoluble et donc LEA mais pas LEF car il est de présentation finie mais non résiduellement fini.

On dit qu'un groupe est LEA s'il peut se plonger localement dans la classe des groupes moyennables.

Corollaire

Tout groupe LEA est sofique.

• Un groupe de présentation finie est LEF (resp. LEA) si et seulement si il est résiduellement fini (resp. résiduellement moyennable).
• On connaît des exemples (Abels) de groupes résolubles de présentation finie qui ne sont pas résiduellement finis. Un tel groupe est moyennable (et donc LEA) mais pas LEF.
• Autre exemple : le groupe de Baumslag-Solitar $BS(2,3)$ est résiduellement résoluble et donc LEA mais pas LEF car il est de présentation finie mais non résiduellement fini.
• On connaît des exemples de groupes simples non moyennables qui sont de présentation finie (par exemple les groupes de Burger-Mozes ou les groupes de Thompson T et V). Un tel groupe n'est pas LEA.

Tableau récapitulatif

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Résiduellement fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{LEF} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Résiduellement moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{LEA} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Sofique}
\end{tikzcd}
$$

Tableau récapitulatif

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Résiduellement fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{LEF} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Résiduellement moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{LEA} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Sofique}
\end{tikzcd}
$$

Question ouverte 1

Est-ce qu'il existe des groupes qui ne sont pas sofiques ?

Tableau récapitulatif

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Résiduellement fini} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{LEF} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{Moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Résiduellement moyennable} \arrow[r, Rightarrow] & \text{LEA} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Sofique}
\end{tikzcd}
$$

Question ouverte 1

Est-ce qu'il existe des groupes qui ne sont pas sofiques ?

Question ouverte 2

Est-ce qu'il existe des groupes sofiques qui ne sont pas LEA ? $(*)$

$(*)$(note ajoutée en septembre 2009) Yves de Cornulier [*A sofic group away from amenable groups*, arXiv :0906.3374] a donné en juin 2009 un exemple de groupe sofique qui n'est pas LEA.

Tableau récapitulatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Fini} & \Longrightarrow & \text{Résiduellement fini} & \Longrightarrow & \text{LEF} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{Moyennable} & \Longrightarrow & \text{Résiduellement moyennable} & \Longrightarrow & \text{LEA} & \Longrightarrow & \text{Sofique}
\end{array}$$

Question ouverte 1

Est-ce qu'il existe des groupes qui ne sont pas sofiques ?

Question ouverte 2

Est-ce qu'il existe des groupes sofiques qui ne sont pas LEA ? $(*)$

$(*)$(note ajoutée en septembre 2009) Yves de Cornulier [*A sofic group away from amenable groups*, arXiv :0906.3374] a donné en juin 2009 un exemple de groupe sofique qui n'est pas LEA.

Question ouverte 3

Est-ce que tous les groupes hyperboliques au sens de Gromov sont sofiques ? (Remarque : on ne connaît pas de groupe hyperbolique non résiduellement fini.)

Quelques propriétés des groupes sofiques

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A, toute application continue G équivariante injective $f\colon A^G \to A^G$ est surjective.

Quelques propriétés des groupes sofiques

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A, toute application continue G équivariante injective $f\colon A^G \to A^G$ est surjective.

Théorème (Gromov-Weiss)

Tout groupe sofique est surjonctif.

Quelques propriétés des groupes sofiques

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A, toute application continue G équivariante injective $f \colon A^G \to A^G$ est surjective.

Théorème (Gromov-Weiss)

Tout groupe sofique est surjonctif.

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall n \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(R) \quad AB = I_n \Rightarrow BA = I_n.$$

Quelques propriétés des groupes sofiques

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A, toute application continue G équivariante injective $f\colon A^G \to A^G$ est surjective.

Théorème (Gromov-Weiss)

Tout groupe sofique est surjonctif.

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall n \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(R) \quad AB = I_n \Rightarrow BA = I_n.$$

Théorème (Elek-Szabó)

L'anneau $\mathbb{K}[G]$ est stablement fini pour tout groupe sofique G et pour tout corps $\mathbb{K}$.

G. Elek et E. Szabó, *Sofic groups and direct finiteness*, J. Algebra **280** (2004), 426–434.

Quelques propriétés des groupes sofiques

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A, toute application continue G équivariante injective $f : A^G \to A^G$ est surjective.

Théorème (Gromov-Weiss)

Tout groupe sofique est surjonctif.

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall n \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(R) \quad AB = I_n \Rightarrow BA = I_n.$$

Théorème (Elek-Szabó)

L'anneau $\mathbb{K}[G]$ est stablement fini pour tout groupe sofique G et pour tout corps $\mathbb{K}$.

G. Elek et E. Szabó, *Sofic groups and direct finiteness*, J. Algebra **280** (2004), 426–434.

Plus généralement, on a :

Théorème (CS-C)

L'anneau $R[G]$ est stablement fini pour tout groupe sofique G et pour tout anneau artinien à gauche (ou à droite) R.

T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, *Linear cellular automata over modules of finite length and stable finiteness of group rings*, J. Algebra **317** (2007), 743–758.