

Construction de solutions pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées

Raphaël Côte

17 Octobre 2006

Le but de cette note est de présenter un certain nombre de résultats concernant les équations de Korteweg-de Vries généralisées. En particulier, on construit une solution dont le profil asymptotique (en temps long) est prescrit, du type somme de solitons et d'un terme dispersif. Ces résultats s'appuient sur les outils traitant le problème de Cauchy avec données initiales petites (scattering linéaire) ou proches d'une somme de solitons découplés.

1 Équations de Korteweg-de Vries généralisées et solitons

Généralités

Les équations de Korteweg-de Vries sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + |u|^p)_x = 0, & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0) = u_0, \end{cases} \quad (\text{gKdV})$$

pour $p > 1$. Si p est entier, on peut considérer indifféremment les équations

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0.$$

Ces équations modélisent la formation d'ondes solitaires dans le contexte d'eaux peu profondes dans un canal. Pour $p = 2$ et $p = 3$ (équations de Korteweg-de Vries (KdV) et de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) respectivement), ces équations ont de nombreuses applications à la Physique.

(gKdV) est un système hamiltonien. En particulier, trois quantités sont conservées, au moins formellement :

$$\begin{aligned} \int u(t, x) dx &= \int u_0(x) dx, \\ \int u^2(t, x) dx &= \int u_0^2(x) dx && (\text{masse } L^2), \\ E(u(t)) &= \frac{1}{2} \int u_x^2(t, x) dx - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}(t, x) dx = E(u_0) && (\text{énergie}). \end{aligned}$$

L'espace d'énergie naturel pour l'étude de cette équation est donc H^1 . Notons cependant que la première loi de conservation est peu utilisée, du fait qu'il ne s'agit pas d'une quantité signée, et que de plus elle ne se situe pas dans l'espace d'énergie.

Par ailleurs, l'équation admet une invariance d'échelle : si u est solution de (gKdV), $u_\lambda(t, x) = \lambda^{2/(p-1)}u(\lambda^3t, \lambda x)$ l'est également. Remarquons que

$$\int u_\lambda = \lambda^{\frac{3-p}{p-1}} \int u, \quad \int u_\lambda^2 = \lambda^{\frac{5-p}{p-1}} \int u^2, \quad E(u_\lambda) = \lambda^{\frac{p+3}{p-1}} E(u).$$

En particulier, pour $p = 5$, $\|u_\lambda\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ et l'équation est L^2 -critique pour l'invariance d'échelle, c'est (cKdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^5)_x = 0. \quad (\text{cKdV})$$

Solitons

Une caractéristique essentielle de (gKdV) est l'existence de solutions explicites qui sont des ondes solitaires, appelées solitons. Historiquement, (KdV) a été construite pour admettre ces solutions, de la forme $v(x - ct)$, où $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a un profil de courbe en cloche.

Plus précisément, soit Q l'unique solution (aux translations près) de :

$$Q > 0, \quad Q \in H^1(\mathbb{R}), \quad Q_{xx} + Q^p = Q, \quad \text{i.e.} \quad Q(x) = \left(\frac{p+1}{2 \cosh^2(\frac{p-1}{2}x)} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (1)$$

Notons, pour $c > 0$, $Q_c(x) = c^{\frac{1}{p-1}}Q(\sqrt{c}x)$. Alors le soliton

$$R_{c,x_0} = Q_c(x - x_0 - ct) = c^{\frac{1}{p-1}}Q(\sqrt{c}(x - x_0 - ct)) \text{ est une solution de (gKdV)}. \quad (2)$$

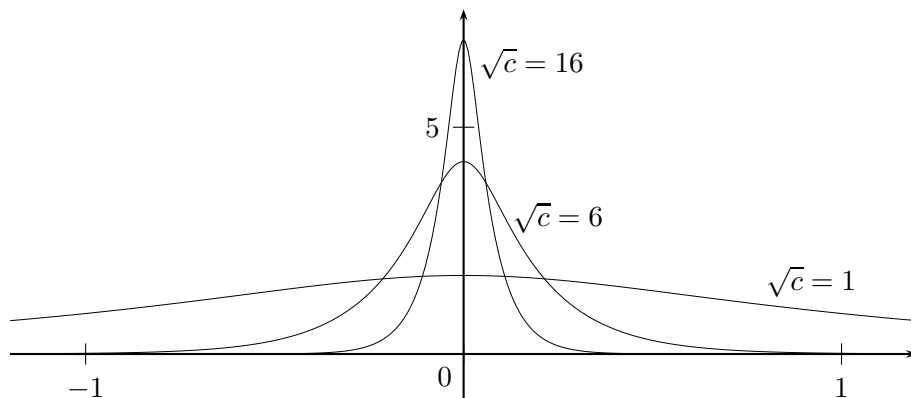


FIG. 1 – Quelques solitons avec paramètres $\sqrt{c} = 1, 6, 16$, pour $p = 5$.

L'existence de solitons est intimement liée au signe – dans l'énergie $E(u)$: (gKdV) est en quelques sorte une équation “focalisante”.

Dans le cas critique $p = 5$, notons que les solitons sont d'énergie nulle : $E(R_{c,x_0}) = 0$.

Scattering Inverse

Les cas $p = 2$ (KdV) et $p = 3$ (mKdV) sont très spéciaux. Il s'agit de systèmes intégrables, qui admettent une infinité de loi de conservation. Grâce à la méthode du scattering inverse, la dynamique de ces équation est bien comprise. Par exemple, si u_0 est une donnée

initiale de \mathcal{S} , alors la solution $u(t)$ de (KdV) associée est globale en temps et se décompose en une somme de solitons (cf. [19], Eckhaus and Schuur [5], Miura [16]) :

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^N R_{c_j, x_j}(t) \right\|_{L^\infty(x \geq -t^{1/3})} \leq \frac{C}{t^{1/3}} \quad (\text{quand } t \rightarrow \infty).$$

Cependant, la méthode du scattering inverse a trois défauts. Tout d'abord, elle demande une grande régularité sur la donnée initiale u_0 (même pour le problème de l'existence locale de solutions). D'autre part, elle donne essentiellement des informations "sur la droite" : en général la convergence a lieu dans l'espace $L^\infty(x \geq 0)$ ou $L^\infty(x \geq -t^{1/3})$, et il paraît difficile d'obtenir des informations dans la région $x \leq -t^{1/3}$. Enfin, cette méthode ne s'étend pas aux cas autres que (KdV) et (mKdV) (ie. $p \neq 2, 3$).

Les résultats présentés dans la suite étudient la dynamique des solutions de (gKdV), et ont été obtenus hors du cadre de la méthode du scattering inverse.

2 La théorie linéaire

Problème local

Le problème de Cauchy local en temps est bien compris : (gKdV) est bien posée dans H^1 (voir [7]), et même, (cKdV) ($p = 5$) est bien posée dans L^2 localement en temps et globalement en temps pour des données petites.

Théorème 1 (Existence locale en temps, Kenig, Ponce et Vega [7]). *Soit $u_0 \in H^1$. Il existe $T = T(\|u_0\|_{H^1})$ et $u \in C^0([0, T[, H^1)$ solution de (gKdV), unique dans une classe adaptée. Une telle solution conserve la masse L^2 et l'énergie.*

Dans le cas critique $p = 5$, si $u_0 \in L^2$, il existe $T = T(\|u_0\|_{L^2})$ et $u \in C^0([0, T[, L^2)$, solution de (cKdV), unique dans une classe adaptée (u conserve la masse L^2).

La preuve de ce résultat s'appuie essentiellement sur l'étude de l'opérateur de KdV linéaire $U(t)$:

$$U(t)\phi \text{ est l'unique solution de } \begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0, \\ u(t=0) = \phi, \end{cases} \quad \text{i.e. } \widehat{U(t)\phi} = e^{it\xi^3} \hat{\phi}. \quad (3)$$

Des estimées de Strichartz sont disponibles pour $U(t)$, car le groupe linéaire de KdV est dispersif :

$$\|U(t)V\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{1/3}} \|V\|_{L^1}, \quad \|U(t)V\|_{L^2} = \|V\|_{L^2}. \quad (4)$$

Cependant, ces estimées jouent un rôle mineur dans l'étude de (gKdV), car elles ne permettent pas de bien contrôler la non-linéarité $|u|^{p-1}u_x$ qui comporte une dérivé u_x . Pour pallier ce problème, Kenig, Ponce et Vega ont développé des estimations linéaires où temps et espace sont inversés, du type $L_x^p L_t^q$ (cf. [7, 8]). Notons $D_x = (-\Delta_x)^{1/2}$. En mettant en évidence un effet de dispersion du type Kato, et par des développements délicats de la théorie de l'interpolation et un argument TT^* , Kenig, Ponce et Vega obtiennent :

$$\left\| D_x^{\alpha_1} \int_0^t U(t-s)\phi(s, x) dx \right\|_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \leq C \|D_x^{\alpha_2} \phi\|_{L_x^{p'_2} L_t^{q'_2}}, \quad (5)$$

pour tous couples de triplets (α_i, p_i, q_i) ($i = 1, 2$) où $p_i, q_i \in [1, \infty]$, et $\alpha_i \in [-\frac{1}{4}, 1]$ vérifient

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{2q_i} = \frac{1}{4}, \quad \alpha_i = \frac{2}{q_i} - \frac{1}{p_i}, \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} = \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q'_i} = 1.$$

On a notamment l'estimée linéaire suivante, qui est au centre du résultat dans le cas critique $p = 5$:

$$\left\| \partial_x \int_0^t U(t-s)\phi(s, x)ds \right\|_{L_x^5 L_t^{10}} \leq C \|\phi\|_{L_x^1 L_t^2}. \quad (6)$$

Problème global

Le Théorème 1 permet alors de définir l'*explosion* pour une solution $u(t)$ de (gKdV) :

- $u(t)$ *explose* si $\limsup_{t \uparrow T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$ pour un certain $T \in \mathbb{R}^+$ (explosion en temps fini) ou $T = +\infty$ (explosion en temps infini).
- Sinon, $\|u(t)\|_{H^1}$ est uniformément bornée : il existe une constante C telle que pour tout $t \geq 0$, $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$, et on dit que u est *globale* (pour les temps positifs).

(on a une caractérisation similaire si on s'intéresse aux temps négatifs). Autrement dit, c'est la quantité $\|u_x(t)\|_{L^2}$ qui détermine s'il y a ou non explosion (car $\|u(t)\|_{L^2}$ est constante) : on dit que $\|u_x(t)\|_{L^2}$ est le taux d'explosion (si $\|u_x(t)\|_{L^2} \rightarrow \infty$).

La conservation de la masse L^2 et de l'énergie permet d'obtenir l'existence globale de solutions dans les cas sous-critiques $p < 5$.

Considérons l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (valable pour tout $p \geq 2$) :

$$\forall v \in H^1, \quad \frac{1}{p+1} \int v^{p+1} \leq C(p) \left(\int v^2 \right)^{\frac{p+3}{4}} \left(\int v^2 \right)^{\frac{p-1}{4}}. \quad (7)$$

Pour $p < 5$, $\frac{p-1}{4} < 1$: si $\|v\|_{H^1} \rightarrow \infty$, alors $E(v) \rightarrow \infty$. Par conservation de l'énergie, ceci est impossible pour une solution de (gKdV). On en déduit l'existence globale des solutions H^1 dans le cas $p < 5$, qui est donc appelé sous-critique.

Cela montre également que pour des données initiales suffisamment petites dans H^1 , la solution associée est globale (pour tout $p > 1$).

Par contre, dans le cas $p = 5$, l'énergie n'est plus coercive, et cet argument ne s'applique plus. Notons que si $p = 5$, le temps maximal d'existence T n'est pas uniquement une fonction de $\|u_0\|_{L^2}$: si c'était le cas, la conservation de la masse L^2 et un argument de continuité donnerait immédiatement l'existence globale des solutions. Merle [15], Martel et Merle [13, 12] ont démontré l'existence de solutions explosives : il existe un ouvert H^1 de données initiales qui donne une solution $u(t)$ explosive, et dont le profil à l'explosion est Q .

Ainsi $p = 5$ est également un exposant critique du point de vue de l'existence globale. Dans le cas sur-critique $p > 5$, l'existence de solutions explosives est conjecturée.

Scattering linéaire à données petites

On dit qu'il y a scattering (linéaire) si une solution $u(t)$ d'une certaine EDP non-linéaire se comporte comme une solution $v(t)$ de la partie linéaire de cette EDP (dans notre cas $v(t) = U(t)V$ pour une certaine fonction $V(x)$, où $U(t)$ est défini en (3)). L'application $u(t) \mapsto v(t)$ (ou $u(t=0) \mapsto v(t=0)$) est appelée opérateur de scattering.

Tout d'abord, notons qu'un corollaire immédiat (de la preuve) du Théorème 1 donne, dans le cas critique, l'existence du scattering à petites données.

Corollaire 1 (Kenig, Ponce et Vega [7]). *Soit $u_0 \in L^2$. Si $\|u_0\|_{L^2}$ est assez petite, la solution associée de (cKdV) $u(t) \in C^0([0, \infty[, L^2)$ est globale et de plus, il existe $V \in L^2$ tel que*

$$\|u(t) - U(t)V\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

L'espace L^2 est adéquat pour comprendre le scattering linéaire, car $\|U(t)V\|_{L^2} = \|V\|_{L^2}$ ne tend pas vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, et ainsi L^2 "conserve l'information" : au contraire la dispersion fait que pour tout $p > 2$, $\|U(t)V\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Le principal résultat de scattering à petites données est le suivant, dû à Hayashi et Naumkin [6] (voir également des travaux précédents de Stauss [20], Ponce et Vega [17], Christ et Weinstein [1]). Introduisons les espaces à poids suivants : pour $s \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$H^{s,m} = \{v \in L^2 \mid (1 + |x|^2)^{m/2}v \in H^s\}. \quad (8)$$

Théorème 2 (Scattering à données petites, Hayashi et Naumkin [6]). *Soit $p > 3$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, tel que ce qui suit soit vrai. Soit $u_0 \in H^{1,1} = \{v \mid v \in H^1 \text{ et } xv \in H^1\}$ tel que $\|u_0\|_{H^{1,1}} \leq \varepsilon_0$. Alors $u \in C_b^0([0, \infty[, H^1)$ existe globalement, et disperse comme une solution linéaire $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1/3}$. Enfin, il existe $V \in L^2$ tel que*

$$\|u(t) - U(t)V\|_{L^2} \leq t^{-(p-3)/3} \quad (\text{quand } t \rightarrow \infty).$$

Notons que tous les solitons sont grands dans $H^{1,1}$ (c'est le minimum à vérifier, car un soliton est l'archétype d'une solution qui ne se comporte pas comme une solution linéaire).

On conjecture que la condition $p > 3$ est optimale, i.e qu'il n'y a pas de scattering pour $p \leq 3$: cela est démontré pour $p \in]1, 2]$, cf. Rammaha [18]. D'autre part, heuristiquement, le scattering signifie que l'accumulation de la force non-linéaire $|u|^{p-1}u_x$ est intégrable en temps. Au vu du taux de dispersion linéaire $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1/3}$, la condition $p > 3$ est naturelle.

Il y a cependant quelques pertes : bien que tout se passe essentiellement dans un espace de régularité $H^{1,1}$, le résultat final de scattering est dans L^2 .

La preuve du Théorème 2 repose sur deux arguments : d'une part, des estimées linéaires efficaces, et d'autre part, des opérateurs ayant des propriétés de commutation adéquates.

On introduit ainsi :

$$J^t \phi = U(t)xU(-t)\phi = x\phi - 3t\phi_{xx}, \quad \text{et} \quad I^t \phi = x\phi - 3t \int_{-\infty}^x \phi_t(x') dx'.$$

(Pour I^t , ϕ est une fonction de l'espace et du temps). J^t permet de définir la norme M_0^t (qui dépend du temps), qui est au coeur du résultat :

$$M_0^t(\phi) = \|\phi\|_{H^1} + \|D^\alpha J^t \phi\|_{L^2} + \|DJ^t \phi\|_{L^2}. \quad (9)$$

($\alpha \in]0, 1/2[$ est une constante adéquate, proche de $1/2$). Remarquons que M_0^0 est une norme légèrement moins forte que $H^{1,1}$. On a les estimées linéaires ponctuelles suivantes :

$$|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+t)^{1/3}} M_0^t(\phi) \left(1 + \frac{|x|}{t^{1/3}}\right)^{-1/4}, \quad |\phi_x(x)| \leq \frac{C}{t^{2/3}} M_0^t(\phi) \left(1 + \frac{|x|}{t^{1/3}}\right)^{1/4}. \quad (10)$$

En particulier, $|\phi(x)\phi_x(x)| \leq C(1+t)^{-1/3}t^{-2/3}M_0^t(\phi)^2$.

On utilise ensuite des méthodes d'énergie. (10) permet de contrôler facilement $\|u(t)\|_{H^1}$. Ensuite, on cherche à contrôler $D^\alpha I^t u$ et $I^t u_x$. Ceci est possible car I^t satisfait une propriété de type "chain-rule" : pour F une fonction C^1 , on a

$$I^t F(\phi)_x = F'(\phi) I^t \phi_x. \quad (11)$$

Enfin comme u est solution de (gKdV), $I^t u - J^t u = 3tu^p$, et en utilisant à nouveau les estimations linéaires (10), on arrive à estimer $M_0^t(u(t))$ a priori. Par un argument de continuité usuel, on en déduit une borne uniforme :

$$\forall t \geq 0, \quad M_0^t(u(t)) \leq CM_0^0(u_0) \leq C\|u_0\|_{H^{1,1}},$$

pourvu que $\|u_0\|_{H^{1,1}}$ soit assez petit.

Pour conclure par le scattering, il suffit de calculer $(U(-t)u(t))_t = U(-t)(|u|^{p-1}u_x)$. On en déduit que $t \mapsto \|(U(-t)u(t))_t\|_{L^2}$ est intégrable, et donc $U(-t)u(t)$ admet une limite V dans L^2 quand $t \rightarrow \infty$. Le taux de convergence s'en déduit immédiatement.

Opérateur d'onde linéaire

Issu de l'analyse précédente, on peut dès à présent construire un opérateur d'onde, c'est-à-dire une application, qui à une donnée finale V associe une donnée initiale u_0 telle que la solution associée $u(t)$ de (gKdV) se comporte comme $U(t)V$ quand $t \rightarrow \infty$. Ce problème est en quelque sorte réciproque au scattering linéaire.

Théorème 3 (Opérateur d'onde linéaire à grandes données [4]). *Soit $p > 3$ et $V \in H^{2,2} = \{v | v \in H^2 \text{ et } x^2 v \in H^2\}$. Il existe $T_0 = T_0(\|V\|_{H^{2,2}}) \geq 1$ et une $u \in C([T_0, \infty[, H^1)$ solution de (gKdV) telle que*

$$\|u^*(t) - U(t)V\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

De plus, u est unique dans une classe adaptée et

$$\|u^*(t) - U(t)V\|_{H^1} \leq Ct^{-(p-3)/3}.$$

Supposons que $p = 5$. Alors pour $V \in L^2$, il existe $T_0 = T_0(V) \in \mathbb{R}$ et $u \in C^0([T_0, \infty[, L^2)$ solution de (cKdV) telle que

$$\|u(t) - U(t)V\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

et u est unique dans une classe adaptée.

Ce résultat s'appuie sur les estimées utilisées pour démontrer le scattering à petites données. Mais on construit un opérateur d'onde pour de *grandes données* V , ce qui peut paraître surprenant de prime abord. Le point clé est que l'on travaille pour des temps t grands : ainsi $U(t)V$ a déjà dispersé et est petit dans les normes adéquates, même si V est grand.

Notons que dans le cas général, il y a quelques pertes de régularités. V doit être dans $H^{2,2}$, alors que l'espace de travail ressemble à $H^{1,1}$: nous y reviendrons. Par contre, dans le cas critique $p = 5$, on a un résultat optimal : cela traduit la robustesse des estimées de Kenig, Ponce et Vega (5).

Donnons à présent quelques idées de preuves. Dans le cas général $p > 3$, on utilise la méthode des approximations successives. Soit donc S_n une suite de temps telle que $S_n \uparrow \infty$ et u_n la solution de (gKdV) ayant exactement le profil désiré au temps S_n :

$$\begin{cases} u_{nt} + (u_{nxx} + |u_n|^p)_x = 0, \\ u_n(S_n) = U(S_n)V. \end{cases} \quad (12)$$

De manière équivalente, on peut considérer le terme d'erreur $w_n(t) = u_n(t) - U(t)V$, qui satisfait :

$$\begin{cases} w_{nt} + (w_{nxx} + |w_n + U(t)V|^p)_x = 0, \\ w_n(S_n) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Le coeur du problème est de montrer que pour tout n , u_n est défini sur un intervalle du type $[T_0, S_n]$, où T_0 est fixe (indépendant de n) et que de plus, on a l'estimée uniforme en n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [T_0, S_n], \quad M_0^t(w_n(t)) \leq Ct^{-\delta}, \quad (14)$$

(où $\delta > 0$ est une constante liée à α qui apparaît dans [6]).

Admettons un instant ce résultat. En calculant $\frac{d}{dt} \|w_n(t) - w_m(t)\|_{L^2}^2$, on s'aperçoit que la suite $(w_k)_{k \geq n}$ est de Cauchy dans l'espace $C^0([T_0, S_n], L^2)$. On déduit que la suite $w_n(t)$ converge localement uniformément dans l'espace $C^0([T_0, \infty[, L^2)$, vers une limite $w^*(t)$. Par limite faible, $w^*(t) \in L^\infty([T_0, \infty[, H^1)$ et vérifie :

$$M_0^t(w^*(t)) \leq Ct^{-\delta}.$$

On conclut donc que $u^*(t) = w^*(t) + U(t)V$ satisfait les conditions du théorème.

On est donc ramené à obtenir les estimées uniformes (14 sur $w_n(t)$). Considérons un intervalle maximal $[I_n, S_n]$ tel que pour tout temps t dans cet intervalle, $M_0^t(w_n(t)) \leq \varepsilon_0$.

Grâce à cette hypothèse de petitesse sur w_n , et en utilisant les estimations (10), on contrôle les dérivées en temps de $\|w_n(t)\|_{H^1}$, $\|D^\alpha I^t w_n\|_{L^2}$ et $\|I^t w_{nx}\|_{L^2}$: cela se fait essentiellement comme dans la preuve du Théorème 2 (méthodes d'énergie s'appuyant sur (11)). Cependant, les intégrations par parties nécessaires ne fonctionnent pas aussi bien dans le cas présent, et lors de ces calculs apparaît naturellement la condition $V \in H^{2,2}$. Par exemple, si u est solution de (gKdV), alors

$$\frac{d}{dt} \|I^t u_x\|_{L^2}^2 = -p(p-1) \int u^{p-2} u_x (I^t u_x)^2 - 2p \int u^{p-1} u_x I^t u_x.$$

Notons que chaque terme est dérivé au plus une fois. Mais nous devons contrôler w_n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|I^t w_{nx}\|_{L^2}^2 &= -p \int (U(t)V + w_n)^{p-1} (I^t U(t)V_x)_x I^t w_{nx} \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2} \int (U(t)V + w_n)^{p-2} (U(t)V + w_n)_x (I^t w_{nx})^2 \\ &\quad - p(p-1) \int (U(t)V + w_n)^{p-2} (U(t)V + w_n)_x I^t (U(t)V + w_n)_x I^t w_{nx} \\ &\quad - 2p \int (U(t)V + w_n)^{p-1} (U(t)V + w_n)_x I^t w_{nx}. \end{aligned}$$

Dans cette égalité, les trois derniers termes se contrôlent aisément en utilisant les estimées (10), $V \in H^{1,1}$, et notre borne a priori $M_0^t(w_n(t)) \leq \varepsilon_0$: par exemple on a

$$\left| \int (U(t)V + w_n)^{p-2} (U(t)V + w_n)_x (I^t w_{nx})^2 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|U(t)V + w_n\|_{L^\infty}^{p-3} \|U(t)V + w_n\|_{L^\infty} \|U(t)V + w_n\|_{L^\infty} \|I^t w_{n,x}\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{C}{t^{2/3}(1+t)^{(p-2)/3}} (M_0^t(w_n(t)))^2.
\end{aligned}$$

Mais la première intégrale

$$\int (U(t)V + w_n)^{p-1} (I^t U(t)V_x)_x I^t w_{n,x}$$

contient un terme avec deux dérivées, que l'on ne contrôle pas avec la norme M_0^t . Heureusement, il s'agit d'un terme en $U(t)V$, et une solution est de choisir V adéquatement. Plus précisément, nous voulons que $M_0^t(I^t U(t)V_x)$ soit uniformément bornée en t (pour utiliser les estimées ponctuelles (10)). Or $I^t U(t)V_x = J^t U(t)V_x = U(t)(xV_x)$ et on voit aisément que pour tout t , pour tout ϕ , $M_0^t(U(t)\phi) \leq C\|\phi\|_{H^{1,1}}$. Il suffit donc de demander $xV_x \in H^{1,1}$. D'une manière analogue, dans le calcul de la norme \dot{H}^1 apparaît la condition $V_{xx} \in L^2$. Ainsi, on peut mener à bien les calculs dès que $V \in H^{2,2}$.

En intégrant ces relations et en tenant compte de ce que $w_n(S_n) = 0$, on en déduit que :

$$\forall t \in [I_n, S_n], \quad M_0^t(w_n(t)) \leq Ct^{-\delta},$$

où C est indépendante de n . Par minimalité de I_n , et par un argument de continuité, on déduit alors que $I_n \leq T_0$ où T_0 est tel que $CT_0^{-\delta} = \varepsilon_0/2$. Ceci conclut la preuve des estimations uniformes.

En ce qui concerne la partie unicité, étant données deux solutions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ au problème, on considère la différence $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Les estimées (10) permettent à nouveau de montrer que

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{t^{p/3}} \|v(t)\|_{L^2}^2 (M_0^t(u_1(t)) + M_0^t(u_2(t)))^{p-1}.$$

Par le lemme de Gronwall, et comme $v(t) \rightarrow 0$ dans L^2 quand $t \rightarrow \infty$, on en déduit que $v \equiv 0$.

Dans le cas critique, il est possible d'appliquer la même méthode. Il est également possible de procéder par point fixe. Soit $u(t)$ la solution désirée, on définit le terme d'erreur :

$$u(t) = U(t)V + w(t), \quad \text{i.e. } w(t) = u(t) - U(t)V, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|w\|_{L^2} = 0,$$

et on cherche à exprimer $w(t)$ comme point fixe d'une certaine fonctionnelle. u solution de (gKdV) satisfait la formule de Duhamel (que l'on écrit entre les temps τ et 0, et τ et t) :

$$u(\tau) = U(\tau)u(0) + \partial_x \int_0^\tau U(\tau-s)u^5(s)ds = U(\tau-t)u(t) + \partial_x \int_t^\tau U(\tau-s)u^5(s)ds.$$

On en déduit que $w(t)$ satisfait

$$U(t-\tau)w(\tau) = w(t) + \partial_x \int_t^\tau U(t-s)(U(s)V + w(s))^5(s)ds.$$

On fait à présent tendre $\tau \rightarrow \infty$, alors notre hypothèse est que $\|U(t-\tau)w(\tau)\|_{L^2} = \|w(\tau)\|_{L^2} \rightarrow 0$, et on obtient $w(t)$ comme point fixe :

$$w(t) = -\partial_x \int_t^\infty U(t-s)(U(s)V + w(s))^5(s)ds. \quad (15)$$

A partir de là, il suffit de reprendre l'estimée (6) de l'espace $L_x^5 L_t^{10}$. Si T_0 est assez grand, $\|U(t)V\|_{L_x^5 L_t^{10}(t \geq T_0)}$ est aussi petit que l'on veut, et la fonctionnelle associée à (15) est contractante dans une boule adéquate de $L_x^5 L_t^{10}$. Ainsi le point fixe désiré existe et est unique.

3 Avec des solitons

Stabilité des solitons

On a jusqu'à présent essentiellement étudié des aspects purement linéaires des solutions de (gKdV). Si l'on souhaite étudier les solitons, une telle approche est vouée à l'échec : les solitons sont d'une certaine manière les objets minimaux où la non-linéarité joue un rôle essentiel.

Martel et Merle [11] ont établi, dans le cas de (gKdV) sous-critique, la stabilité asymptotique du soliton, un résultat qui fut ensuite étendu par Martel, Merle et Tsai [14] à la stabilité asymptotique d'une somme de N solitons découplés.

Théorème 4 (Stabilité de N solitons découplés, Martel, Merle et Tsai [14]). *Soit $p = 2, 3$ ou 4 . Soient $N \in \mathbb{N}$, et $0 < c_1 < \dots < c_N$. Il existe $\gamma_0 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ (petits) et A, L_0 (grands), tels que ce qui suit soit vrai. On suppose qu'il existe $L \geq L_0$, $\alpha < \alpha_0$ et $x_1^0 < \dots < x_N^0$ tels que :*

$$\left\| u(0) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j^0) \right\|_{H^1} \leq \alpha, \quad \text{avec } x_j^0 \geq x_{j-1}^0 + L, \quad \text{pour } j = 2, \dots, N.$$

Alors il existe $x_1(t), \dots, x_N(t) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j(t)) \right\|_{H^1} \leq A(\alpha + e^{-\gamma_0 L}).$$

De plus, il existe $c_1^\infty, \dots, c_N^\infty$ tels que $|c_j^\infty - c_j| \leq A(\alpha + e^{-\gamma_0 L})$ et

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, N, \quad \dot{x}_j(t) &\rightarrow c_j^\infty \quad \text{quand } t \rightarrow \infty, \\ \left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j^\infty}(\cdot - x_j(t)) \right\|_{L^2(x \geq c_1/10)} &\rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

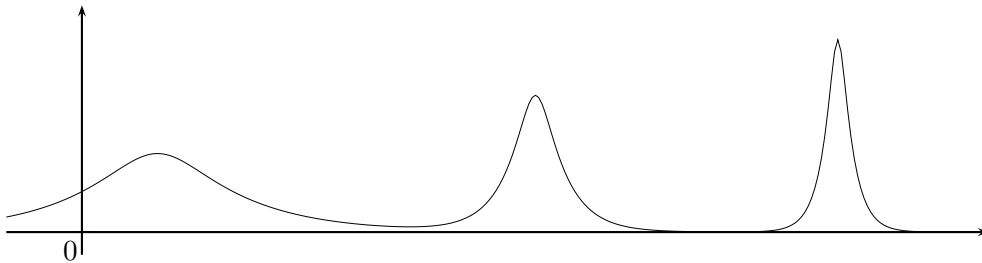


FIG. 2 – Un train de solitons découplés.

La première chose à voir est qu'il s'agit d'un résultat au voisinage de solitons découplés, c'est-à-dire que le soliton le plus rapide (et donc de masse L^2 la plus grande) est le plus à droite, puis vient le second plus rapide et ainsi de suite. D'autre part, les solitons sont déjà assez loin les uns des autres. Par ces deux conditions, aucun soliton ne devrait en rattraper un autre, et on espère que les solitons vont finalement interagir faiblement entre eux : le Théorème 4 affirme que tel est effectivement le cas.

Essayons d'éclairer un peu la notion de stabilité mise en jeu ici. Il n'est pas possible par exemple, d'espérer montrer que $c_j^\infty = c_j$. En effet, considérons le cas de deux solitons R_{c_1, x_0} et R_{c_2, x_0} . Si c_2 est suffisamment proche de c_1 , alors la donnée initiale $u_0 = R_{c_2, x_0}(t=0)$ est dans un voisinage de $R_{c_1, x_0}(t=0)$. Pourtant, les solitons vont à des vitesses différentes et donc

$$\|R_{c_1, x_0}(t) - R_{c_2, x_0}(t)\|_{L^2} \rightarrow \|Q_{c_1}\|_{L^2} + \|Q_{c_2}\|_{L^2} \neq 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Ainsi, il faut pouvoir tenir compte d'une légère variation de la vitesse (ou de la masse) $c_j(t)$ des solitons dans la décomposition, et d'une translation en espace $x_j(t)$.

Par ailleurs, il n'est pas non plus possible d'espérer une convergence sur tout \mathbb{R} , du moins dans L^2 . En effet, nous construirons un peu plus tard des solutions se comportant comme la somme de N solitons et d'un terme linéaire $U(t)V$. Si V est choisi adéquatement (et notamment de norme H^1 suffisamment petite), une telle solution $u(t)$ vérifiera la condition proximité de la somme de N solitons découplés. Mais asymptotiquement, la masse L^2 de $U(t)V$ ne disparaît pas (on peut faire le même raisonnement avec un petit soliton $R_{\varepsilon, 0}$ se déplaçant très lentement sur la droite).

Ce résultat combine trois arguments :

- la forme quadratique $B(v) = \int (v_x^2 - pQ^{p-1}v^2 + v^2)$ possède deux directions dégénérées. Cette forme quadratique est particulièrement importante car elle est liée à la conservation de l'énergie et de la masse :

$$E(Q + \varepsilon) + \int (Q + \varepsilon)^2 = E(Q) + \int Q^2 + B(\varepsilon) + O(\varepsilon^3),$$

le point essentiel étant l'absence de terme du premier ordre en ε .

- en modulant les paramètres $c_j(t)$ et $x_j(t)$, il est possible de contrôler les directions dégénérées.
- il existe une propriété de monotonie au niveau de la norme L^2 , que nous explicitons ci-dessous.

Soit $\sigma_0 > 0$ assez petit et

$$\psi(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma_0}}{2}x\right).$$

Alors on voit aisément que ψ est décroissante, tend vers 1 en $-\infty$ et 0 en $+\infty$. De plus,

$$|\psi'''(x)| \leq -\frac{\sigma_0}{4}\psi'(x).$$

On cherche à séparer les solitons les uns des autres : introduisons donc, pour $j = 1, \dots, N-1$

$$\psi_j(x, t) = \psi(x - m_j(t)), \quad m_j(t) = \frac{c_j + c_{j+1}}{2}t + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}.$$

Notons $R_j(t, x) = R_{c_j, x_j}(t, x) = Q_{c_j}(x - c_j t - x_j)$ les solitons.

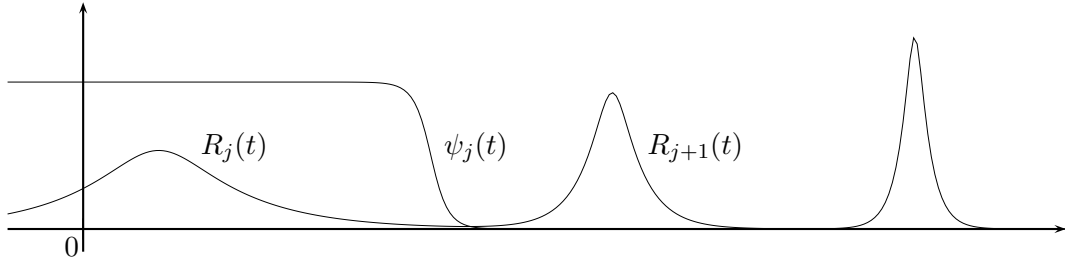


FIG. 3 – $\psi_j(t)$ sépare $R_j(t)$ et $R_{j+1}(t)$.

Proposition 1 (Presque monotonie). *Soit $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et $[a, b]$ un intervalle de temps tel que :*

$$\forall t \in [a, b], \quad \left\| u(t) - \sum_{j=1}^N R_j(t) \right\|_{H^1} \leq \varepsilon_0.$$

Alors on a :

$$\forall j, \forall t \in [a, b], \quad \frac{d}{dt} \int u^2(t, x) \phi_j(t, x) \geq -C e^{-\gamma t},$$

où $\gamma = \min\{c_1, c_2 - c_1, \dots, c_N - c_{N-1}\}$.

En développant les trois argument mentionnés, on réussit à prouver la première partie du Théorème 4. Pour la convergence asymptotique, on fait appel à une propriété de rigidité (cf. [10]) que nous ne détaillons pas ici.

Le N -soliton

Énonçons sans plus attendre le pendant du Théorème 4, à savoir l'existence d'une unique solution de (gKdV) se comportant comme la somme de N solitons : cette solution s'appelle le N -soliton.

Théorème 5 (Existence et unicité du N -soliton, Martel [9]). *Soit $p \in [2, 5]$. Soient $N \in \mathbb{N}$, $0 < c_1 < \dots < c_N$, et $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$. Il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ et une unique solution $u \in C([T_0, +\infty), H^1)$, de (gKdV) telle que :*

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j - c_j t) \right\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

De plus $u \in C^\infty([T_0, \infty) \times \mathbb{R})$ et la convergence a lieu dans tout les H^s avec un taux exponentiel

$$\exists \gamma > 0, \forall s \geq 0, \exists A_s \quad / \quad \left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j - c_j t) \right\|_{H^1} \leq A_s e^{-\gamma t}.$$

Notons que pour $p = 2, 3$, l'existence du N -soliton était un résultat connu de la théorie du scattering inverse. L'unicité est par contre nouvelle dans tous les cas, et c'est un résultat tout à fait étonnant. Remarquons également que le résultat est également vrai dans le cas critique $p = 5$, bien que les solitons soient instables.

Opérateur d'onde non-linéaire

L'unicité du N -soliton (Théorème 5) montre que ce comportement est tout à fait exceptionnel : il y a d'une certaine manière une rigidité liée à la structure du N -soliton, ce qui peut se comprendre par le fait que le N -soliton est une solution qui ne disperse pas (en un sens à préciser).

On s'attend donc à ce qu'il y ait d'autres comportements asymptotiques possibles : on a déjà montré que pour $p > 3$, il existe des solutions dispersant complètement, car elles se comportent comme les solutions linéaires. En fait, pour $p = 4$ et $p = 5$, il existe des solutions qui ont un comportement mixte, c'est-à-dire qui se découpent en une somme de soliton et d'une solution linéaire. Nous appelons opérateur d'onde non-linéaire l'application qui, à un tel comportement asymptotique (c'est à dire la donnée des R_j et d'une fonction V), associe une solution de (gKdV), globale, se comportant comme $U(t)V + \sum_j R_j(t)$ quand $t \rightarrow \infty$.

Théorème 6 (Opérateur d'onde non-linéaire, cas sous-critique [3]). *Soit $p = 4$. Soit $V \in H^{5,1} \cap H^{2,2}$ telle que :*

$$x_+^{4/3} D_x^5 V \in L^2, \quad x_+^8 V \in H^1.$$

Soient $N \in \mathbb{N}$, $0 < c_1 < \dots < c_N$ et $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, on introduit N solitons $R_j(t, x) = Q_{c_j}(x - x_j - c_j t)$. Alors il existe $u^ \in C([T_0, +\infty[, H^4)$, pour un certain $T_0 \in \mathbb{R}$, solution de (gKdV) (avec $p = 4$), tel que :*

$$\left\| u^*(t) - U(t)V - \sum_{j=1}^N R_j(t) \right\|_{H^4} + M_0^t \left(u^*(t) - U(t)V - \sum_{j=1}^N R_j(t) \right) \leq Ct^{-(p-3)/3}.$$

Théorème 7 (Opérateur d'onde non-linéaire, cas critique [2]). *Soit $p = 5$. Soit $V \in H^1$ tel que*

$$x_+^{2+\delta_0} V \in L^2 \text{ pour un certain } \delta_0 > 0.$$

Soient $N \in \mathbb{N}$, $0 < c_1 < \dots < c_N$ et $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, on introduit N solitons $R_j(t, x) = Q_{c_j}(x - x_j - c_j t)$. Alors il existe $u^ \in C([T_0, +\infty[, H^1)$, pour un certain $T_0 \in \mathbb{R}$, solution de (cKdV), tel que :*

$$\left\| u^*(t) - U(t)V - \sum_{j=1}^N R_j(t) \right\|_{H^1} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

La condition de décroissance sur la droite demandée pour V correspond en fait à une interaction faible du terme linéaire $U(t)V$ avec les solitons.

De ce point de vue, le résultat dans le cas critique est probablement presque optimal (à δ_0 près), avec une condition uniquement dans L^2 . Dans le cas sous-critique, on est obligé de demander à la fois beaucoup de régularité et de décroissance sur la droite pour V , et de plus, on doit se restreindre à la non-linéarité $x \mapsto x^4$ ($p = 4$), ce qui correspond à une meilleure intégrabilité et régularité que celles que donnent $p > 3$. Ces défauts sont liés à une moins bonne compréhension du phénomène de scattering dans le cas non-critique.

En contruisant un opérateur d'onde non-linéaire pour de grandes données V , on obtient une classe très générale de comportements. Cependant, il faut remarquer que toutes les solutions ainsi construites sont (globales et) d'énergie positive dans le cas critique. Cela correspond bien à l'idée que les solutions d'énergie négative explosent dans ce cas.

Schéma de preuve

La méthode de construction des solutions pour les Théorèmes 6 et 7 suit le même schéma que celle du Théorème 3 : on définit une suite de solutions u_n qui ont exactement le profil désiré à un temps donné, à savoir

$$\begin{cases} u_{nt} + (u_{nxx} + |u_n|^p)_x = 0, \\ u_n(S_n) = U(S_n)V + \sum_{j=1}^N R_j(S_n), \end{cases} \quad (16)$$

où $S_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et on introduit l'erreur $w_n(t) = u_n(t) - U(t)V - \sum_{j=1}^N R_j(t)$ qui vérifie le système

$$\begin{cases} w_{nt} + \left(w_{nxx} + |u_n|^p - \sum_{j=1}^N R_j^p(t) \right)_x = 0, \\ w_n(S_n) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Le coeur du problème est à nouveau de démontrer que w_n est défini sur un intervalle de la forme $[T_0, S_n]$ (avec T_0 fixe) et satisfait des estimées uniformes : par exemple, dans le cas sous-critique, que

$$\forall n, \forall t \in [T_0, S_n], \quad \|w_n(t)\|_{H^4} \leq Ct^{-(p-3)/3}, \quad \text{et } M_0^t(w_n(t)) \leq Ct^{-\delta}.$$

Comme précédemment, par un argument de continuité usuel, on se ramène à montrer la proposition suivante dans le cas sous-critique (et une proposition similaire dans le cas critique).

Proposition 2 (Estimée uniforme sous hypothèse de petitesse). *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que ce qui suit soit vrai. Soit $[I_n, S_n]$ un intervalle vérifiant la condition suivante :*

$$\forall t \in [I_n, S_n], \quad \|w_n(t)\|_{H^4} + M_0^t(w_n(t)) \leq \varepsilon_0.$$

Alors en fait on a l'estimée de décroissance :

$$\forall t \in [I_n, S_n], \quad \|w_n(t)\|_{H^4} \leq Ct^{-(p-3)/3}, \quad \text{et } M_0^t(w_n(t)) \leq Ct^{-\delta}.$$

La démonstration de ce résultat se découpe en deux grandes parties : estimer les interactions non-linéaires (sur la droite $x \geq ct$), puis estimer les interactions linéaires (sur la gauche $x \leq ct$).

Comparée à la construction de l'opérateur d'onde linéaire (Théorème 3) ou du N -soliton (Théorème 5), la principale difficulté est bien sûr que lorsqu'on essaye de contrôler les interactions de l'erreur $w_n(t)$ avec les solitons, la partie linéaire $U(t)V$ interfère, et lorsque l'on tente de borner les interactions de $w_n(t)$ avec le terme linéaire $U(t)V$, les solitons interfèrent. Et ces interférences sont a priori très désagréables, car par définition, l'outil linéaire n'est pas approprié pour comprendre le comportement non-linéaire des solitons, et les outils non-linéaires (paraboliques) ne sont pas faits pour traiter des termes linéaires (dispersifs).

Il s'avère cependant que la présence du terme $U(t)V$ perturbe assez faiblement les solitons : cela est dû au fait que l'on a choisi V avec suffisamment de décroissance sur la droite pour que l'interaction avec les solitons soit petite. Plus précisément, introduisons une fonction de coupure entre $x = 0$ et le soliton le plus lent $R_1(t)$:

$$\psi_0(t, x) = \psi(x - \sigma_0 t), \quad \text{où } \sigma_0 = \frac{1}{2} \min\{c_1, c_2 - c_1, \dots, c_N - c_{N_1}\}.$$

On démontre que pour $t \in [I_n, S_n]$,

$$\begin{aligned} \|w_n(t)\|_{L^2(1-\psi_0(t))} &\leq e^{-\frac{\sigma_0\sqrt{\sigma_0}}{2}t} + (1 + S_n - t)\|U(S_n)V\|_{L^2(1-\psi_0(S_n))} \\ &\quad + \|U(t)V\|_{L^2(1-\psi_0(t))} + \int_t^{S_n} \|U(t)V\|_{L^2(1-\psi_0(t))} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Supposons par exemple que $\|U(t)V\|_{L^2(1-\psi_0(t))} \leq Ct^{-q}$ (ce qui est le cas dès que $(1+x_+^q)V \in L^2$), (18) affirme que

$$\|w_n(t)\|_{L^2(1-\psi_0(t))} \leq Ct^{-q+1}. \quad (19)$$

Remarquons que dans le cas du N -soliton (i.e. $V = 0$), on a une décroissance exponentielle. Ici, il ne reste qu'une décroissance polynomiale, qui peut être rendue arbitrairement rapide en demandant suffisamment de décroissance à droite sur V .

La preuve de (18) s'appuie sur les outils développés pour les Théorèmes 4 et 5 : elle est très proche dans les cas critique et sous-critique.

D'une part, grâce au fait que V interagit peu avec les solitons, il est possible de moduler $w_n(t)$ par rapport aux $2N$ directions dégénérées d'une certaine forme quadratique (liée à l'énergie) : la modulation est différente dans les cas critique et sous-critique, mais dans tout les cas, on est en position d'utiliser la presque-positivité de cette forme quadratique. Cette modulation ne tient pas compte de $U(t)V$, et le prix à payer est justement $\|U(t)V\|_{L^2(1-\psi_0(t))}$, à savoir l'interaction de $U(t)V$ et des solitons, d'où en particulier le terme intégral dans (18).

D'autre part, du fait que V disperse dans L^∞ , la propriété de presque-monotonie est préservée, et c'est le point clé. On peut alors réutiliser un argument de resommation d'Abel, et l'on en déduit, avec la positivité (d'une version localisée) de la forme quadratique B précédemment citée, le contrôle (18).

Par contre le contrôle sur la gauche (interaction avec $U(t)V$) est plus complexe.

Commençons par considérer le cas critique. On souhaite donc travailler dans l'espace $L_x^5 L_t^{10}$. Écrivons l'équation vérifiée par $w_n(t)$, selon la formule de Duhamel :

$$w_n(t) = -\partial_x \int_t^{S_n} U(-s) \left((w_n(s) + U(s)V + \sum_{j=1}^N R_j(s))^5 - \sum_{j=1}^N R_j^5(s) \right) ds.$$

Bien sûr en développant, les termes ne contenant que des $R_j(s)$ s'annulent ou sont exponentiellement petits en espace et en temps, et ceux ne contenant que $w_n(s)$ ou $U(s)V$ sont traités comme dans le cas linéaire. Mais il reste des termes d'interaction, du type :

$$-\partial_x \int_t^{S_n} U(-s)(w_n(s)R_1^4(s))ds.$$

(où $R_1(t)$ est un soliton, ici le plus lent). On cherche à en estimer la norme $L_x^5 L_t^{10}$, et les estimées linéaires (5) donnent

$$\left\| \partial_x \int_t^{S_n} U(-s)(w_n(s)R_1^4(s))ds \right\|_{L_x^5 L_t^{10}(t \geq T_0)} \leq C \|w_n(s)R_1^4(s)\|_{L_x^1 L_t^2(t \geq T_0)}.$$

Or les solitons ne sont pas seulement grands dans l'espace $L_x^5 L_t^{10}$, en fait ils n'appartiennent pas à $L_x^5 L_t^{10}(t \geq T)$ pour tout T , car ils ne dispersent pas.

Cependant, on s'aperçoit que l'on a ici affaire à un terme en $w_n(s)$ localisé sur la droite : on peut conclure si l'on arrive à intervertir les sommations en espace et en temps, et ainsi à utiliser l'estimée de décroissance (18) obtenue précédemment (sans perte de dérivation toutefois). Cela est possible, et un lemme technique nous dit que quitte à perdre un petit $\delta_0 > 0$, on obtient ce que l'on veut. Plus précisément, si pour $t \in [I_n, S_n]$,

$$\|w_n(t)\|_{L^2(1-\psi_0(t))} \leq Ct^{-1+\delta_0},$$

on a :

$$\|w_n(s)R_1(s)\|_{L_x^1 L_s^2(s \geq t)} \leq Ce^{-\frac{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}}{4}t} + Ct^{-\delta_0} \|w_n(s)\|_{L_x^5 L_s^{10}(s \geq t)}.$$

On réussit ainsi à boucler les estimées dans $L_x^5 L_t^{10}$, puis à revenir dans $C_t^0 L_x^2$. La preuve de la Proposition 2 est donc terminée dans le cas critique.

Dans le cas sous-critique $p = 4$ cependant, les choses se passent plus mal. Il s'agit d'estimer $M_0^t(w_n(t))$. Le contrôle de la norme H^1 n'est pas difficile en utilisant (10).

Mais les difficultés arrivent lorsque l'on calcule la dérivée en temps de $\|I^t w_{nx}(t)\|_{L^2}^2$: des termes problématiques apparaissent, du type

$$\int R_1^2 R_{1x} (I^t w_{nx})^2. \quad (20)$$

Il s'agit bien d'un terme localisé (grâce au $R_1(t)$), mais au niveau de régularité H^3 pour w_n (I^t doit être vu comme un opérateur d'ordre 2). On ne peut plus utiliser directement (18), et il n'est pas évident d'améliorer cette dernière estimée au niveau H^3 , car les arguments "non-linéaires" se placent dans l'espace d'énergie.

L'idée est alors d'utiliser des lois de "presque conservation", au niveau H^2 , H^3 et également H^4 . Pour H^2 , on dispose de la relation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int u_{xx}^2 - \frac{20}{3} \int u_x^2 u^3 \right) = 2 \int u_x^5 + 80 \int u_x^3 u^5,$$

qui est valable si $u(t)$ est une solution de (gKdV) pour $p = 4$. Il existe une relation analogue pour $w_n(t)$. Notons que pour cette relation le terme $\int u_x^5$ devra être traité en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. On arrive alors à démontrer par un argument de type Gronwall que

$$\|w_n(t)\|_{H^4} \leq \frac{C}{t^{1/3}}.$$

(i.e. un taux $t^{-\frac{p-3}{3}}$ pour $p = 4$). Ce taux ne peut être amélioré, et c'est pour cela que l'on doit avoir un contrôle jusqu'au niveau H^4 : par interpolation de cette inégalité avec (18), on obtient que $\|w_n\|_{H^3(1-\psi_0(t))}$ a une décroissance polynomiale arbitrairement grande pourvu que V soit choisi adéquatement (cf. (19), et l'on peut donc contrôler le terme problématique (20) : cela conclut la preuve dans le cas $p = 4$.

Il faut noter que cette méthode ne se généralise pas facilement à d'autres p sous-critiques : tout d'abord, l'obtention de relations de presque conservation nécessite une grande régularité sur la non-linéarité (il faut C^4 pour avoir la relation au niveau H^2). D'autre part, p doit être assez grand (intégrabilité assez grande) pour que le lemme de type Gronwall puisse être utilisé : il apparaît que $p = 4$ est d'une certaine manière un exposant critique pour cette propriété.

Il reste à conclure les théorèmes : cela se fait dans les deux cas de manière assez proche. On obtient la compacité L^2 de la suite $w_n(T_0)$ par un argument lié à la propriété de monotonie : ainsi, quitte à extraire, $w_n(T_0) \rightarrow \varphi$ dans L^2 . On définit

$$\begin{cases} u_t^* + (u_{xx}^* + |u^*|^p)_x = 0, \\ u^*(T_0) = \varphi + U(T_0)V + \sum_{j=1}^N R_j(t). \end{cases}$$

Dans le cas sous-critique, il y a en fait convergence dans H^3 par interpolation et la continuité du flot termine la preuve. Dans le cas critique, la continuité du flot L^2 donne la convergence de $u^*(t)$ dans L^2 . Pour obtenir la convergence H^1 , il faut ajouter un argument utilisant la conservation de l'énergie, associé à un choix astucieux des S_n .

Problèmes ouverts

La construction de solutions de (gKdV) avec comportement asymptotique donné doit encore être comprise dans les cas $p \in]3, 5[\setminus \{4\}$, et également dans les cas sur-critiques $p > 5$. Dans les cas sous-critiques, il y a notamment deux questions à étudier :

- Peut-on améliorer (rendre plus robuste) les résultats de scattering linéaire à données petites, i.e. mieux comprendre l'opérateur de KdV linéaire $U(t)$?
- Étant donné un comportement asymptotique, la solution de (gKdV) construite est-elle unique ?

Alors le problème rétrograde, avec donnée finale, sera essentiellement résolu : une conjecture plausible est que toute solution de (gKdV) se découple effectivement en une somme de solitons et un terme linéaire.

La question est alors de résoudre le problème suivant : étant donnée une condition initiale u_0 , quel est le comportement asymptotique de la solution de (gKdV) associée ? En particulier, les solitons sont-ils les seuls objets réellement non-linéaires :

- Supposons que $\|u(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ (i.e., il n'y a pas d'objets non-linéaires), a-t-on scattering linéaire ?
- Supposons que $\|u(t)\|_{L^\infty(x \geq 0)} \rightarrow 0$ (i.e., il n'y a pas de solitons), a-t-on $\|u(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$?
- Dans les cas critique et surcritiques, étant donné $u(t)$ globale (pour les temps positifs), $u(t)$ se découple-t-elle en une somme de solitons et un terme dispersif ?

Références

- [1] Michael Christ and Michael I. Weinstein, *Dispersion of small amplitudes solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 87–109.
- [2] Raphaël Côte, *Construction of solutions to the L^2 -critical KdV equation with a given asymptotic behaviour*, Duke Math. J., to appear.
- [3] ———, *Construction of solutions to the subcritical gKdV equations with a given asymptotic behaviour*, J. Funct. Anal. (2006), no. 241, 143–211.
- [4] ———, *Large data wave operator for the generalized Korteweg-de Vries equations*, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 2, 163–188.
- [5] Wiktor Eckhaus and Peter Schuur, *The emergence of solutions of the Korteweg-de Vries equation form arbitrary initial conditions*, Math. Methods Appl. Sci. **5** (1983), 97–116.
- [6] Nakao Hayashi and Pavel I. Naumkin, *Large time asymptotics of solutions to the generalized Korteweg-De Vries equation*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 110–136.

- [7] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega, *Well-posedness and scattering result for the generalized Korteweg-De Vries equation via contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527–620.
- [8] ———, *On the concentration of blow up solutions for the generalized KdV equation critical in L^2* , Nonlinear wave equations (Providence, RI, 1998), Contemp. Math., vol. 263, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 131–156.
- [9] Yvan Martel, *Asymptotic N -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 5, 1103–1140.
- [10] Yvan Martel and Frank Merle, *A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), 339–425.
- [11] ———, *Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations.*, Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), no. 3, 219–254.
- [12] ———, *Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2 -critical generalized KdV equations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 617–664.
- [13] ———, *Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized kdv equation*, Ann. of Math. (2) **1** (2002), 235–280.
- [14] Yvan Martel, Frank Merle, and Tai-Peng Tsai, *Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of n solitons for subcritical gKdV equations*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), 347–373.
- [15] Frank Merle, *Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 555–578.
- [16] Robert M. Miura, *The Korteweg-de Vries equation : a survey of results*, SIAM Rev. **18** (1976), 412–459.
- [17] Gustavo Ponce and Luis Vega, *Nonlinear small data scattering for the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **90** (1990), 445–457.
- [18] Mohammed A. Rammaha, *On the asymptotic behavior of solutions of generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), no. 1, 228–240.
- [19] Peter Cornelis Schuur, *Asymptotic analysis of soliton problems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1232, Springer-Verlag, Berlin, 1986, An inverse scattering approach.
- [20] Walter A. Strauss, *Dispersion of low-energy waves for two conservative equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **55** (1974), 86–92.