

LES SOLITONS

RAPHAËL CÔTE

1. DES ONDES SOLITAIRES DANS UN CANAL

Un jour de 1834 qu'il décrivit ensuite comme le plus heureux de sa vie [1], l'écossais Russell observait un bateau tiré le long d'un canal. Une vague se forma au milieu du bateau, puis, lorsque celui-ci fut brusquement mis à l'arrêt, cette vague le dépassa et poursuivit sa course, sans que sa forme ne s'affaisse. L'ingénieur naval la suivit à pied puis à cheval, sur plusieurs kilomètres, avant que l'onde ne s'étirole.

Russell confirma son observation au travers de plusieurs expériences – il cherchait surtout à établir une forme efficace pour la coque d'un bateau. Malgré cela, et bien que la théorie des ondes fluides ait été développée depuis 1775, il peina à convaincre la communauté scientifique de l'époque que cette grande onde solitaire, qui se déplace sans changer de forme et que l'on appellera (beaucoup plus tard) soliton, correspondait à un nouveau phénomène physique.

Le problème était de dériver, à partir des équations générales de la mécanique des fluides, une équation qui admette une solution soliton, de la forme

$$(1) \quad u(t, x) = Q(x - t),$$

pour une onde de vitesse unité, et où le profil Q du soliton a une forme en cloche :



Il fallut attendre 1895 et les travaux du hollandais Korteweg et de son élève de Vries : ils proposèrent l'équation suivante, qui (bien qu'introduite par Boussinesq dès 1877) porte maintenant leurs noms

$$(KdV) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0, \quad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}.$$

En injectant (1) dans (KdV), on voit que Q doit satisfaire l'équation elliptique

$$(2) \quad -Q'' + Q = Q^2,$$

après intégration (Q étant localisé en espace, la constante d'intégration est nulle). On peut à nouveau intégrer, par exemple en multipliant par Q' , et on trouve l'expression explicite du profil du soliton de (KdV)

$$Q(x) = \frac{3}{2 \cosh^2(x/2)} = 6 \frac{d^2}{dx^2} \ln(1 + e^x).$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35Q51, 35L71, 35Q40.
Key words and phrases. Solitons, dispersion, stabilité, explosion.

Le profil des solitons se déplaçant à la vitesse $c > 0$, de la forme $Q_c(x - ct)$ est alors obtenu par changement d'échelle

$$(3) \quad Q_c(x) = cQ(\sqrt{c}x).$$

2. DISPERSION ET SOLITONS

L'équation (KdV) fait partie d'une classe d'EDP appelées "équations dispersives non linéaires", où le terme "dispersif" se rapporte à la partie linéaire. Rappelons en quoi consiste la dispersion. La partie linéaire de (KdV) est l'équation d'Airy :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Elle conserve la norme L^2 et celles qui en sont dérivées, en particulier

$$\|v\|_{\dot{H}^1}^2 = \int |\nabla v(t, x)|^2 dx.$$

Mais cela n'empêche pas v de tendre vers 0 dans d'autres normes (plus faibles). C'est le cas typiquement de la norme L^∞ , comme le montre l'expression intégrale

$$v(t, x) = \int \hat{v}(0, \xi) e^{ix\xi + it\xi^3/3} d\xi,$$

en utilisant la méthode de la phase stationnaire. La formule ci-dessus exprime le fait que la solution "onde plane" de fréquence ξ , de la forme $e^{i\xi(x - \kappa t)}$ se déplace à la vitesse $\kappa = -\xi^2/3$. Ainsi, les hautes fréquences sont transportées à des vitesses de plus en plus grandes : c'est la dispersion.

Une des questions importantes est de comprendre comment se traduit la dispersion dans le cadre non linéaire. La dynamique de (KdV) sera nécessairement plus riche que l'équation d'Airy, du fait de l'existence de solitons. Ils réalisent un équilibre subtil entre la partie linéaire, qui tend à faire disperser la solution, et la partie non linéaire, qui tend à la faire se concentrer : ils sont l'archétype d'une solution non linéaire qui ne disperse pas.

3. RÉOLUTION EN SOLITONS

Les équations dispersives furent de plus en plus étudiées à partir de la deuxième partie du XXème siècle. On se rendit compte que de nombreux modèles relèvent de cette classe d'EDP, et notamment l'équation de Schrödinger, donnée ci-dessous avec nonlinéarité cubique

$$(NLS) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^2 u = 0, \quad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ici le soliton est la solution périodique en temps $e^{it}Q(x)$ où $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $Q, \nabla Q$ sont des fonctions L^2) vérifie l'analogue de (2) en dimension supérieure :

$$(4) \quad -\Delta Q + Q = Q^3 \quad \text{et} \quad Q > 0.$$

Noter le signe de la nonlinéarité dans (NLS) : avec le signe "-", l'équation n'admet pas de soliton. Notons également que (KdV) et (NLS) sont des EDP *conservatives*¹ : certaines quantités sont conservées par le flot, en particulier la norme L^2 et l'énergie, qui vaut pour (KdV)

$$E(u) = \int \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) dx.$$

1. en fait, elles sont même hamiltoniennes

L'intérêt pour les solitons connut un essor parallèle. Ils apparaissent dans toute une variété de phénomènes en physique : en sus des solitons hydrodynamiques de Russell – qui pourraient modéliser les tsunamis, les mascarets, et les vagues scélérates – existent des solitons optiques, acoustiques, des solitons au sein de cristaux. On a également des exemples en chimie (électricité des plastiques conducteurs), en biologie (dynamique des populations en chemotaxie), et en météorologie (nuage “morning glory”). En théorie quantique des champs, on parle de solitons topologiques, avec une terminologie variable (kink, instantons, skyrmions, torons etc.). L'une des caractéristiques essentielles pour les physiciens est que lorsque deux solitons se rencontrent (on parle de collision), ils en ressortent intacts : cette forme de stabilité très forte – il s'agit de perturbations grandes – explique que l'on observe des solitons dans les expériences physiques. Nous y reviendrons plus loin.

Dans un article de 1965 où fut justement inventé le terme “soliton”, Zabusky et Kruskal constatèrent numériquement que les solutions de (KdV) se comportent asymptotiquement en temps grand comme des sommes de solitons découplés. Ce phénomène remarquable devint la conjecture de résolution en solitons, l'une des plus importantes en dynamique des EDP dispersives. Les solitons apparaissaient donc comme des briques élémentaires pour la description de solutions génériques. Une réponse spectaculaire fut apportée par la méthode du scattering inverse [2], développée à partir des années 1960 par Gardner, Green, Kruskal et Miura. L'idée de cette méthode est de relier la solution u au spectre de l'opérateur de Schrödinger $L = -\Delta + u$: la connaissance des fonctions propres de L permet de retrouver u (d'où le terme “inverse”). Cela paraît circulaire (car on doit connaître u pour étudier L), mais il se trouve qu'il suffit de comprendre le comportement spatial $x \rightarrow \pm\infty$ des fonctions propres de L (c'est le “scattering”), et que ceci est possible en utilisant uniquement le fait que u soit une solution régulière et localisée de (KdV).

Non seulement la méthode du scattering inverse permet de répondre positivement – pour (KdV) – à la conjecture de résolution en solitons, mais elle permet d'obtenir beaucoup d'autres informations. Par exemple, elle fournit des solutions explicites se comportant comme des sommes de plusieurs solitons découplés “purs” : les multi-solitons. Voici la formule typique pour un 2-soliton :

$$(5) \quad 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(1 + e^{x-t} + e^{\sqrt{c}(x-ct)} + \left(\frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}} \right)^2 e^{x-t} e^{\sqrt{c}(x-ct)} \right).$$

Malgré sa puissance, la méthode du scattering inverse a un champ d'action limitée : elle ne s'applique qu'à des EDP intégrables, et pour des données régulières et localisées. Toute modification de la nonlinéarité – sauf exception – fait disparaître l'intégrabilité. Depuis les années 1990, on a consacré beaucoup d'efforts à développer des méthodes *robustes* pour l'étude du flot des EDP dispersives (notamment au voisinage des solitons), qui pourraient s'appliquer à de nombreuses équations.

4. STABILITÉ DES SOLITONS

Considérons attentivement l'expression (5) du 2-soliton de (KdV). On observe que chacun des solitons conserve sa taille (1 et c) avant et après la collision qui intervient au temps $t = 0$: on parle de collision *élastique* de solitons. Mais cette forme de stabilité – au cœur de la notion de soliton – est délicate à démontrer pour des perturbations générales ou pour d'autres équations. Il faut tout d'abord à comprendre l'effet de *petites* perturbations sur les solitons.

La notion naturelle de stabilité issue des systèmes dynamiques serait la suivante : $u(t, \cdot)$ et $Q(\cdot - t)$ restent proches (dans un espace fonctionnel à préciser, par exemple H^1) pour tout $t \geq 0$, sous réserve que cela soit vrai au temps $t = 0$. On voit aisément qu'elle doit être légèrement assouplie. En effet, si l'on considère $Q(x - t)$ et $Q_{1+\delta}(x - (1 + \delta)t)$ (pour $\delta \neq 0$ petit), ces solutions de (KdV) sont très proches à l'instant initial $t = 0$, mais se découpent pour t grand. Par contre elles restent proches à *translation près*. On s'intéresse donc plutôt à la stabilité *orbitale*, c'est-à-dire la propriété de rester proche, à l'action d'un certain groupe de symétrie (spécifique à chaque équation) près.

La stabilité orbitale a été bien comprise dans les années 80, grâce aux travaux de Cazenave et Lions, et Weinstein, avec des critères suffisants (et presque nécessaires) pour la stabilité ou l'instabilité [3]. Le point clé est que le profil Q est l'*état fondamental*, une solution "minimale" des équations elliptiques (2) et (4) en un certain sens, lié à l'énergie E . Cette minimalité se cache dans la condition $Q > 0$ de l'équation (4), dont elle rend unique (à translation près) la solution.

En fait, c'est seulement maintenant que l'on peut donner une définition mathématiquement satisfaisante d'un soliton : c'est une solution onde progressive ou périodique (aux symétries de l'équation près) dont le profil est l'état fondamental.

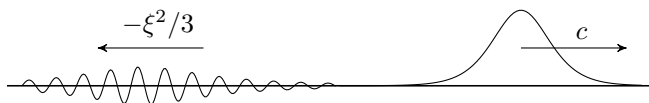
La preuve de la stabilité orbitale combine les propriétés variationnelles de Q et le fait que le flot de (KdV) conserve l'énergie et la norme L^2 . Cette analyse est robuste, elle s'applique à de nombreux cas : par exemple si la nonlinéarité est généralisée à $|u|^{p-1}u$, dans (KdV) (on notera alors l'équation (gKdV)), ou dans (NLS). Il s'avère que l'un des exposants $p_c > 1$ joue un rôle particulier : les solitons sont stables pour $p < p_c$, et instables pour $p > p_c$. Cet exposant est appelé L^2 -critique, car c'est celui pour lequel le changement d'échelle (une transformation du type (3)) préserve la norme L^2 ; il vaut $p_c = 5$ en dimension d'espace 1.

Du fait de la stabilité orbitale des solitons, une solution de (KdV) s'écrit

$$u(t, x) = Q_{c(t)}(x - y(t)) + \varepsilon(t, x)$$

où $c(t)$ reste proche de $c(0)$ et $\varepsilon(t, \cdot)$ petit, pour tout $t \geq 0$ sous réserve que ce soit vrai au temps initial. On peut alors s'intéresser à la stabilité asymptotique, c'est-à-dire à la convergence des paramètres $c(t)$ et $y(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. La conservation de la norme L^2 et de l'énergie par le flot fait que pour $\varepsilon(t, \cdot)$, on ne peut pas s'attendre à une convergence globale en espace, mais à un comportement plutôt dispersif, avec des convergences locales. On peut citer des résultats de Martel et Merle pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées, qui s'appuient sur une propriété de rigidité : une solution qui reste au voisinage d'un soliton et qui ne "disperse" pas est exactement un soliton !

Tout ceci nécessite de comprendre de manière beaucoup plus fine la dynamique. L'idée est que la dispersion et le soliton se découpent : on en a un aperçu pour (KdV) en observant que les solitons se déplacent vers la droite (vitesse $c > 0$), alors que les ondes planes linéaires vont vers la gauche (vitesse $-\xi^2/3 < 0$).

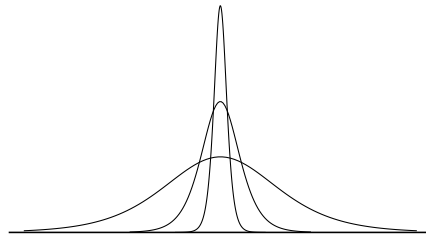


Cette heuristique est difficile à justifier directement pour des EDP non linéaires. Au centre de l'analyse se trouvent des formules de (presque) monotonie sur des quantités localisées au voisinage du soliton. Rigidité, monotonie... au voisinage de notre soliton, les flots dispersifs ont des propriétés qui rappellent celles des équations de type parabolique ou elliptique.

Une kyrielle de résultats est issue de ces méthodes. Tout d'abord, on peut construire des multi-solitons, à la fois dans les cas stables et instables. Ensuite, pour les équations L^2 -sous-critiques et sous réserve de faible interaction, ces multi-solitons sont stables dans H^1 (par exemple, pour (gKdV), à l'instant initial, les solitons doivent être ordonnés en fonction de leur vitesse de sorte à éviter les collisions dans le futur). Dans certains cas, on est également capable d'étudier minutieusement la collision de deux solitons dans un cadre non-intégrable (par exemple pour l'équation (gKdV) avec $p = 4$) : la collision n'est plus élastique (mais presque), et on peut mesurer son défaut d'élasticité. On peut également construire des "multi-solitons" exceptionnels, dont la distance entre deux solitons ne croît que logarithmiquement en temps (au lieu de la croissance linéaire habituelle).

5. DES SOLUTIONS EXPLOSIVES !

On a mentionné plus haut la spécificité des équations L^2 -critiques, que nous noterons (cNLS) et (cKdV). Pour celles-ci on s'attend à ce qu'il existe des solutions *explosives*, c'est-à-dire pour lesquels les résultats de construction de solutions (qui généralise le théorème de Cauchy-Lipshitz pour les EDP) échouent à donner des solutions définies pour tous temps positifs. C'est le cas lorsqu'une certaine quantité, appelé taux d'explosion – ici c'est simplement $\|u(t)\|_{\dot{H}^1}$ – tend vers l'infini en un temps fini, dit *temps d'explosion*. Un argument simple montre qu'il existe bien des solutions explosives pour (cNLS), mais il ne donne aucune indication sur le mécanisme de l'explosion. Les travaux de Martel, Merle et Raphael ont justement permis de comprendre en détail la dynamique explosive au voisinage des solitons. Ils ont mis en évidence l'existence d'un phénomène d'explosion qui se produit par concentration d'un soliton : autrement dit, une solution de la forme $Q_{c(t)}(\cdot - y(t)) + \varepsilon(t, \cdot)$ où $\varepsilon(t, \cdot)$ reste petit et $c(t) \rightarrow +\infty$ quand t tend vers le temps d'explosion. Cette explosion est "stable" car les données initiales pour lesquelles elle a lieu forment un ouvert non vide (d'une topologie adaptée). De plus, dans ce régime, le taux d'explosion est universel (essentiellement indépendant de la donnée initiale), et le profil aussi : c'est bien sûr le soliton ! (On a même mieux : le reste $\varepsilon(t, \cdot)$ converge). Pour (cNLS), c'est la fameuse explosion en "log log" (car le taux d'explosion est une correction log log du taux d'explosion "naïf"). Pour (cKdV), on a même une *classification* des solutions qui restent pour tout temps dans un voisinage tubulaire de la famille des solitons [4].



On a aussi construit – toujours par concentration d'un soliton – des solutions explosives dites "exotiques" car leur taux d'explosion est très différent du taux "stable".

Pour les équations L^2 -surcritiques, la nonlinéarité est moralement plus forte, et on s'attendrait à ce que la dynamique explosive soit plus simple. Il n'en est rien ! En

effet, des propriétés algébriques de l'équation L^2 -critique – essentielles à l'analyse – sont détruites dans les cas L^2 -surcritiques.

Deux types de résultats subsistent cependant. L'explosion “log log” de (cNLS) est un régime tellement stable que l'analyse reste valable dans une large mesure pour les équations (NLS) légèrement L^2 -surcritiques. Et pour des nonlinéarités très surcritiques, on arrive à construire une famille de solutions explosives, toujours basées sur la concentration d'un soliton.

6. ET ENSUITE ?

Les méthodes modernes d'étude des solitons s'adaptent à des contextes très variés d'EDP dispersives, avec des résultats qui dépendent fortement des propriétés algébriques spécifiques à chaque équation.

Néanmoins, en présence de solitons, on a du mal à quitter les résultats perturbatifs. Malgré des avancées remarquables pour les équations de type ondes, la conjecture de résolution en solitons reste difficile d'accès hors cas intégrables. Une des raisons est que cette conjecture parle des solutions *génériques*, terme auquel il est délicat de donner un sens rigoureux ; bien souvent, d'autres objets non linéaires (et exceptionnels) existent !

Beaucoup de choses restent donc à comprendre des équations L^2 -surcritiques qui rassemblent des exemples très importants, comme les équations de (NLS) cubique 3D ou de Navier-Stokes en 3D. Les solitons et autres objets non linéaires recèlent encore bien des mystères et des clés de la dynamique non linéaire !

RÉFÉRENCES

- [1] Olivier Darrigol, *Worlds of Flow*, 2005, Oxford University Press.
- [2] Robert M. Miura, *The Korteweg–de Vries Equation : A Survey of Results*, SIAM Rev., **18** (3), 1975, 412–459.
- [3] Terence Tao, *Why are solitons stable ?*, Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 2009, 1–33.
- [4] Yvan Martel, Frank Merle, Pierre Raphael, Jérémie Szeftel, *Near soliton dynamics and singularity formation for L^2 critical problems*, Russ. Math. Surveys, **69** (2), 2014, 77–106.

RAPHAËL CÔTE

Université de Strasbourg
 CNRS, IRMA UMR 7501
 F-67000 Strasbourg, France
 cote@math.unistra.fr