

Stage de Master 1
réalisé au CEA
du 1er février au 31 juillet 2012



**Étude de schémas numériques pour
l'hydrodynamique lagrangienne :
application aux schémas décalés et centrés**

Clémentine Courtès , Mélanie Inglard

clementine.courtes@ens-cachan.fr, melanie.inglard@ens-cachan.fr

sous la tutelle de Mme Corinne Aymard et M. Christophe Fochesato

corinne.aymard@cea.fr, christophe.fochesato@cea.fr

Nous remercions, en tout premier lieu, Eric Van Renterghem et Renaud Motte de nous avoir accueillies comme stagiaires dans leur service et laboratoire respectif.

Nos principaux remerciements iront à nos encadrants, Corinne Aymard et Christophe Fochesato, pour l'expérience très instructive qu'ils nous ont fait vivre durant ces six derniers mois. Leurs riches interventions et leur complémentarité nous ont beaucoup apporté, sans oublier de mentionner leur disponibilité, leur bonne humeur et leur soutien permanent.

Un grand merci également à Alexandra Claisse pour la clarté de son code numérique et ses interventions au sujet de l'implémentation ainsi qu'à tous les membres du service pour l'accueil chaleureux qu'ils nous ont réservé et leur coopération professionnelle. Nous avons beaucoup apprécié la convivialité de toute l'équipe lors de déjeuners hebdomadaires proposés par nos tuteurs.

Nous remercions finalement tous les stagiaires et thésards avec qui nous avons partagé de réelles réflexions scientifiques tout comme des instants plus récréatifs.

Toutes ces personnes ont contribué, par leur disponibilité, leur connaissance et leur dynamisme, à rendre notre stage enrichissant et diversifié.

Résumé

Ce stage, intitulé "Étude de schémas numériques pour l'hydrodynamique lagrangienne : application aux schémas décalés et centrés", a été réalisé en binôme au CEA DAM - Ile-de-France de février à juillet 2012. Il visait à étudier la résolution des équations d'Euler compressibles en 2D plan. Cette résolution repose sur une description semi-lagrangienne, qui consiste à suivre la matière dans son mouvement tout en préservant les variables eulériennes (x, t) . Deux grandes familles de schémas sont étudiées :

- les schémas centrés ou co-localisés dans lesquels toutes les variables sont définies au centre des mailles,
- les schémas décalés où les variables thermodynamiques sont définies au centre des mailles mais les variables cinématiques aux nœuds.

Chaque famille comprend de nombreux schémas numériques ; dans cette étude, nous nous sommes focalisées sur deux schémas par famille : GLACE [7, 11, 12] et EUCCLHYD [20, 23, 24, 22, 25] pour les schémas centrés, VNR [31] et SGPC pour les schémas décalés. Le schéma dénomé SGPC (Staggered Grid Predictor Corrector) est une variante du schéma VNR qui conserve la même discrétisation spatiale mais la discrétisation temporelle est quant à elle réalisée par un schéma prédicteur-correcteur de type trapèze.

L'objectif de ce stage était d'étudier et de comparer ces différents schémas numériques pour la résolution des équations d'Euler compressibles en 2D plan. Trois axes se dégagent alors :

- enrichir un code numérique préexistant,
- mettre en évidence certaines propriétés de ces schémas (conservations, entropie ...),
- valider cette implémentation et comparer les différents schémas en présence par l'intermédiaire de cas tests.

Un code numérique écrit en C++ créée par A. Claisse [9], nous a été fourni dans laquelle les schémas centrés GLACE et EUCCLHYD à l'ordre 1 en espace et en temps été disponible. Une première étape fut donc de nous mettre à niveau en C++ et de prendre en main ce code. Une fois initiées au C++, nous avons cherché à monter en ordre spatial et temporel les deux schémas centrés. La montée en ordre spatial repose sur une reconstruction linéaire de type MUSCL nécessitant un limiteur et requiert un traitement particulier aux bords ; ce problème fut résolu par l'introduction de mailles fantômes. Un limiteur temporel [7] a par ailleurs été nécessaire pour les schémas d'ordre 2 en espace et 1 en temps où des oscillations résiduelles persistaient. L'ordre 2 en temps fut quant à lui obtenu par l'implémentation d'un prédicteur-correcteur de type trapèze introduit dans [25]. La montée en ordre spatial a permis une nette amélioration des résultats. En revanche, le gain apporté par l'ordre 2 en temps semble limité hormis le fait que la montée en ordre temporel rende obsolète l'utilisation du limiteur temporel. Deux schémas

décalés ont également été intégrés à ce code . Le premier, appelé VNR car basé sur les idées originales de VonNeumann Richtmyer [31], repose sur une discrétisation spatiale de type Wilkins [32] et une discrétisation temporelle de type saute-mouton. Son implémentation n'a pas posé de grosses difficultés mais son utilisation est sensible au choix des coefficients de pseudo-viscosité. Le second schéma décalé introduit est le schéma SGPC.

Une fois ces schémas implémentés, nous nous sommes penchées sur la comparaison théorique inter-schémas, à travers les propriétés de conservation (masse totale, quantité de mouvement totale, énergie totale), le respect du second principe de la thermodynamique et la préservation des écoulements isentropiques. Tous les schémas sont conservatifs en masse totale et en quantité de mouvement totale, en revanche, des différences sont observées sur les autres propriétés. En effet, les schémas centrés sont conservatifs en énergie totale par construction. Mais ce n'est pas le cas des schémas décalés ; une variante (SGPC2) a à ce titre été réalisée. Enfin aucun schéma étudié ne préserve le caractère isentropique. Les termes d'erreur ont également été calculés. Ces résultats théoriques ont ensuite été utilisés afin d'interpréter les résultats numériques fournis par le code.

Pour la comparaison expérimentale, différents cas tests classiques réputés pour leurs difficultés numériques ont été utilisés : certains à symétrie 1D (tube à choc de Sod, problème de Noh, compression isentropique de Kidder, problème de Sedov) et d'autres à effets bidimensionnels (problème de Saltzman, impact d'un choc sur une paroi oblique). Différents maillages, cartésiens, polaires et brutes ont été utilisés ainsi que plusieurs lois d'état (Gaz parfait, Mie-Grüneisen). Les résultats obtenus sur l'ensemble de ces cas tests sont relativement satisfaisants et en adéquation à nos attentes. On distingue notamment, de manière assez nette, les deux grandes familles de schémas. Celle des schémas centrés (GLACE et EUCCLHYD) semble la mieux adaptée aux différentes situations à symétrie 1D testées : meilleure capture de la hauteur du plateau de densité pour le problème de Noh, meilleure capture de la position du choc sur le cas du tube à choc de Sod, meilleure capture de l'angle théorique lors d'un impact d'un choc sur une paroi oblique. En revanche, l'erreur numérique sur l'entropie faite par les schémas décalés est relativement faible (comparativement aux schémas centrés) bien qu'ils ne préservent pas théoriquement le caractère isentropique des écoulements en présence de pseudo-viscosité. Ceci constitue leur principale qualité. Des différences peuvent également être observée au sein de chaque famille. Les deux schémas centrés, quel que soit l'ordre, diffèrent par exemple sur les cas tests à effets bidimensionnels où le caractère dissipatif et la faible sensibilité sur maillage déformé d'EUCCLHYD se fait ressentir. Un des principaux inconvénients observés du schéma VNR est la non convergence vers la bonne solution à CFL fixée. Le prédicteur-correcteur du schéma SGPC permet de combler cette lacune. Enfin, l'influence de certains paramètres tels que le choix du limiteur, les coefficients de pseudo-viscosité, la valeur de la CFL a aussi été testée sur plusieurs cas tests.

Table des matières

Résumé	i
Table des matières	iii
Introduction	1
Notations	5
 I Schémas centrés	 7
1 Le schéma GLACE	9
1.1 Présentation théorique	9
1.1.1 Système continu d'équations	9
1.1.2 Système d'équations semi-discret en espace	10
1.1.3 Système discret d'équations	15
1.2 Propriétés de conservation et d'entropie	17
1.2.1 Semi-discrétisation spatiale	18
1.2.2 Discrétisations spatiale et temporelle	20
 2 Le schéma EUCCLHYD	 29
2.1 Présentation théorique	29
2.1.1 Système continu d'équations	29
2.1.2 Système semi-discret d'équations	29
2.1.3 Système discret d'équations	32
2.2 Propriétés de conservation et d'entropie	34
 II Schémas décalés	 37
3 Le schéma VNR	39
3.1 Présentation théorique	39
3.1.1 Système continu d'équations	39
3.1.2 Système semi-discret d'équations	41
3.1.3 Système discret d'équations	44
3.2 Propriétés de conservation et d'entropie	47

3.2.1	Semi-discrétisation spatiale	47
3.2.2	Discrétisations spatiale et temporelle	51
4	Le schéma SGPC	55
4.1	Présentation théorique	55
4.1.1	Système discret d'équations	55
4.2	Propriétés de conservation et d'entropie	57
4.2.1	Semi-discrétisation spatiale	57
4.2.2	Discrétisations spatiale et temporelle	57
III	Comparaisons des propriétés de conservations et d'entropie des différents schémas	63
5	Synthèse des propriétés de conservations et d'entropie	65
IV	Comparaisons expérimentales	67
6	Tube à choc de Sod	71
6.1	Description du cas et analyse théorique	71
6.2	Résultats	74
6.2.1	Comparaison des quatre schémas d'ordre 2 en espace et en temps	74
6.2.2	Comparaison intra schéma	76
6.2.3	Influence du choix du limiteur sur le schéma GLACE ordre 2 en espace et 2 en temps	77
6.2.4	Influence des différents paramètres du schéma VNR	77
7	Compression isentropique de Kidder	81
7.1	Description du cas et analyse théorique	81
7.2	Résultats	82
7.2.1	Comparaison des schémas d'ordre 2	82
7.2.2	Ordre numérique des schémas	84
8	Problème de Noh	89
8.1	Description du cas et analyse théorique	89
8.2	Résultats	90
9	Problème de Sedov	93
9.1	Description du cas et analyse théorique	93
9.2	Résultats	94
10	Problème de Saltzmann	97
10.1	Description du cas et analyse théorique	97
10.2	Résultats	98

TABLE DES MATIÈRES

11 Choc Oblique	101
11.1 Description du cas et analyse théorique	101
11.2 Résultats	103
11.2.1 Comparaison des quatre schémas d'ordre 2 en espace et en temps . . .	103
11.2.2 Étude sur maillage bruité	106
11.2.3 Étude sur maillage plus fin	107
Conclusion	111
A Reconstruction des gradients	A.1
B Conditions aux limites	B.5
C Les limiteurs	C.7
C.1 Présentation et description théorique	C.7
C.1.1 Démonstration théorique de l'action du limiteur	C.8
C.2 Limiteur temporel	C.12
C.3 Limiteur directionnel pour les coordonnées de la vitesse	C.13
D Lois d'état	D.17
D.1 Loi des Gaz parfaits	D.17
D.2 Loi d'état de type Mie-Grüneisen [27]	D.17
E Newton-Raphson	E.19
F Calcul du centre de masse	F.21
G Le schéma SGPC2	G.23
G.1 Présentation théorique	G.23
G.1.1 Système continu d'équations	G.23
G.1.2 Système semi-discret d'équations	G.23
G.1.3 Système discret d'équations	G.24
G.2 Propriétés de conservation et d'entropie	G.26
G.2.1 Semi-discrétisation spatiale	G.26
G.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle	G.27
G.3 Résultats	G.29
Bibliographie	

Introduction

Le CEA, Commissariat à l'Énergie Atomique et aux énergies alternatives, est une EPIC¹ qui propose à la fois des activités de recherche fondamentale ainsi que des missions à caractère plus industriel, souvent en partenariat avec différents organismes de recherche. Ses compétences se scindent en quatre pôles qui sont : les énergies bas carbone, la défense et la sécurité, les technologies pour l'information et les technologies pour la santé. Il se compose de dix centres civils et militaires répartis sur toute la France. Cinq d'entre eux accueillent le pôle défense et sécurité ou DAM (Direction des Applications Militaires) dont le site de Bruyères-le-Châtel où s'est déroulé notre stage. Ce site a entre autres pour rôle de lutter contre la prolifération et le terrorisme nucléaire, d'alerter les autorités en cas de séismes, de tsunamis et d'essais nucléaires. Il contribue ainsi au contrôle du respect du traité d'interdiction complète des essais nucléaires (TICE) ratifié en 1995. Depuis, la conception des armes nucléaires et la capacité de dissuasion se basent sur le programme Simulation. Pour mener à bien ce programme, le CEA s'est doté de puissants calculateurs (Tera 100, ...). Enfin, le CEA DAM - Ile-de-France, acteur majeur dans le secteur de la simulation et du calcul intensif, a créé un pôle européen de compétences en simulation numérique haute performance appelé Ter@tec avec la mise en place sur le site de la machine européenne CURIE du TGCC (Très Grand Centre de Calcul). L'étude de la mécanique des fluides s'inscrit pleinement dans ces objectifs.

La mécanique des fluides, et plus particulièrement l'hydrodynamique, est un domaine chargé d'histoire dans lequel L. Euler fut un précurseur en déterminant notamment, en 1755, l'équation des fluides parfaits $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u = -\nabla p$. Quelques temps après, C. Navier et G. Stokes généralisèrent cette équation en introduisant la viscosité du fluide. Dans le cadre de ce stage, on s'est intéressées aux équations d'Euler compressibles, en négligeant les termes visqueux. L. Euler a également introduit une approche de ses équations à référentiel fixe contrairement à la vision de J. L. Lagrange qui suit la matière dans son mouvement. Durant ce stage, une vision intermédiaire dite semi-lagrangienne est adoptée : la matière est suivie dans son mouvement mais en travaillant avec les variables eulériennes. L'étude est restreinte au cas 2D plan. Les équations, en vision semi-lagrangienne, s'écrivent alors :

¹Établissement Public à Caractère Industriel et Commercial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} 1 dV = \int_{\Omega(t)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})(x, t) dV, \\ \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{u}(x, t), \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dV = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \vec{u}(x, t) dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} P(x, t), \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) E(x, t) dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u})(x, t) dV, \\ P(x, t) = \mathcal{P}(\rho(x, t), e(x, t)). \end{array} \right.$$

La résolution numérique de ces équations passe par une discrétisation spatiale basée sur une approche aux volumes finis et une discrétisation temporelle qui repose sur la méthode aux différences finies (saute-mouton, Euler explicite). On considère dans cette étude deux familles de schémas : les schémas décalés où les variables thermodynamiques sont définies au centre des mailles et les variables cinématiques aux nœuds ; et les schémas co-localisés ou dits centrés, plus récents, où toutes les variables se trouvent au centre des mailles. Une autre différence de ces schémas se situe au niveau de l'ordre spatial. Les schémas décalés sont intrinsèquement d'ordre 2 en espace, alors qu'un traitement particulier est nécessaire pour les schémas centrés : une reconstruction linéaire des variables a ici été utilisée. L'archetype des schémas décalés est le schéma VNR introduit par J. VonNeumann et R. D. Richtmyer [31] en 1949 qui est à la base de différentes versions possibles de schémas décalés. Il s'oppose ainsi à la famille des schémas centrés dont GLACE et EUCCLHYD sont deux représentants récents mis au point respectivement par B. Després [11] et P. H.Maire [21] dans les années 2000. Notre stage avait précisément pour objectif de comparer ces différents schémas (GLACE, EUCCLHYD, VNR et SGPC) à différents ordres ; SGPC (Staggered-Grid Predictor-Corrector) constitue une variante du schéma VNR qui utilise toujours une discrétisation spatiale de type Wilkins mais une discrétisation temporelle de type prédicteur-correcteur.

Dans le code numérique GEL (Glace-Exceptional points-Lagrangian) élaboré par A. Claisse [9], les schémas GLACE et EUCCLHYD à l'ordre 1 en espace et en temps étaient implémentés. Il se base sur la structure de données de maillage GMDS [19] et plus particulièrement sur le modèle DIM2|N|FIN2|FIN2 qui signifie que les maillages sont 2D ; les nœuds et les faces sont stockés ; chaque nœud connaît ses faces adjacentes et vice-versa. Une version simplifiée, sans points exceptionnels, a été mise à notre disposition. Le premier enjeu du stage a été d'introduire dans GEL les schémas VNR et SGPC puis de monter en ordre spatial et temporel les deux schémas centrés. Dans un second temps, nous nous sommes attachées à valider l'implémentation à l'aide de différents cas tests (à symétrie 1D ou à effets bidimensionnels) sélectionnés pour leur difficulté numérique et utilisés sur différents maillages polaires et cartésiens. Nous nous sommes également intéressées à mettre en évidence certaines propriétés théoriques vérifiées par les schémas. La première partie de ce rapport s'attache à présenter théoriquement les schémas centrés, du système continu au système discrétisé en espace et en temps pour aboutir à la présentation de l'algorithme implémenté. Nous présenterons également, en détail, les diffé-

INTRODUCTION

rentes propriétés de conservation ainsi que les termes d'erreur si nécessaire. La seconde partie exposera la même étude mais sur les schémas décalés. Enfin, la troisième partie est consacrée aux différents cas tests et à la comparaison des schémas d'ordre 2 en espace et en temps.

Notations

$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Produit scalaire
$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{e}_z$	Produit mixte
V	Volume
m	Masse
T	Température
P	Pression
$\rho = \frac{m}{V}$	Densité
ρ^0	Densité initiale
E	Énergie totale spécifique (= massique)
e	Énergie interne spécifique (= massique)
S	Entropie
\vec{x}	Position
$\vec{u} = (u, v)^t$	Vitesse
c	Indice d'une cellule
p	Indice d'un nœud
p^-	Indice du nœud avant p dans le sens trigonométrique
p^+	Indice du nœud après p dans le sens trigonométrique
$p \in \{c\}$	Ensemble des nœuds de la cellule c
$c \in \{p\}$	Ensemble des cellules contenant le nœud p
$(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$	Divergence de \vec{u}
$(\vec{\nabla} P)$	Gradient de P
\vec{C}_{cp}	Vecteur géométrique
$\vec{N}_{cp} = \frac{\vec{C}_{cp}}{ \vec{C}_{cp} }$	Normale au nœud
Nb_p	Nombre de cellules contenant le nœud p
Nb_c	Nombre de nœuds dans la cellule c
Φ_c^w	Limiteur de la variable w
Φ_c^t	Limiteur temporel
c	Vitesse du son
$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$	Dérivée particulaire

Première partie

Schémas centrés

Chapitre 1

Le schéma GLACE

Le schéma GLACE [7, 11, 12] est un schéma dit centré ou colocalisé : les variables cinématiques et thermodynamiques sont définies au centre des mailles. L'acronyme de ce schéma a une signification bien précise :

- *il repose sur une méthode de **Godunov**,*
- *ce schéma est **LA**grangien,*
- *la méthode est **C**onservative en **E**nergie totale.*

Il se caractérise par des flux aux nœuds. Plusieurs versions, différant par leurs ordres en espace et en temps, ont été développées. L'ordre 2 en espace n'est pas assuré intrinsèquement pour les schémas centrés, la méthode suivie ici se base sur une reconstruction linéaire ; l'ordre 2 en temps est quant à lui réalisé à l'aide d'un schéma prédictor-correcteur de type trapèze.

1.1 Présentation théorique

Nous travaillons en 2D plan et adoptons les conventions suivantes : l'indice c indexe les cellules tandis que l'indice p est pris pour numéroter les nœuds. Nous notons également $p \in \{c\}$ l'ensemble des points qui compose la cellule c et $c \in \{p\}$, l'ensemble des cellules comportant le nœud p .

1.1.1 Système continu d'équations

Le schéma est basé sur un système de lois de conservation : conservation du volume, de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Afin d'assurer la fermeture de ce

système, une équation d'état y est ajoutée. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} 1 dV = \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV, \end{array} \right. \quad (1.1a)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \quad (1.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = 0, \end{array} \right. \quad (1.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{u} dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} P, \end{array} \right. \quad (1.1d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho E dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot (P \vec{u}) dV, \end{array} \right. \quad (1.1e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right. \quad (1.1f)$$

où l'énergie interne spécifique $e = E - \frac{1}{2} ||\vec{u}||^2$ avec E l'énergie totale et $\Omega(t)$ le domaine de travail (évoluant au cours du temps).

L'équation (1.1b) traduit le fait que l'on se trouve en considération semi-lagrangienne et donc que l'on suit la matière dans son mouvement.

Remarque : la première équation de ce système est aussi appelée la GCL (Geometric Conservation Law).

1.1.2 Système d'équations semi-discret en espace

Pour résoudre le système, nous procédons en deux étapes :

- les équations sont tout d'abord discrétisées en espace en utilisant la méthode des volumes finis,
- puis discrétisation en temps selon un schéma d'Euler explicite.

Le système semi-discret en espace correspond aux équations discrétisées en espace et continues en temps.

La méthode utilisée est de type des volumes finis et basée sur la présentation du schéma GLACE effectuée dans [7]. Tout d'abord, sont définis les opérateurs de divergence et gradient discrets ainsi que des variables intermédiaires liées à la géométrie de la maille.

Vecteurs géométriques \vec{C}_{cp}

Définition 1. Supposons que le volume V_c est défini comme une fonction des points de la cellule ($\vec{x}_p \mapsto V_c(\vec{x}_p)$). On définit alors le vecteur \vec{C}_{cp} comme le gradient du volume de la maille c par rapport à la variable \vec{x}_p , coordonnées du noeud p :

$$\vec{C}_{cp} = \vec{\nabla}_{x_p} V_c.$$

1.1. PRÉSENTATION THÉORIQUE

Nous obtenons alors :

$$V'_c(t) = \sum_{p \in \{c\}} \vec{\nabla}_{x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t} = \sum_{p \in \{c\}} \vec{\nabla}_{x_p} V_c \cdot \vec{u}_p = \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p. \quad (1.2)$$

Les vecteurs \vec{C}_{cp} vérifient certaines relations de conservativité [7].

Proposition 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall c, \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} = 0, \quad (\text{invariance par translation}) \end{array} \right. \quad (1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p, \sum_{c \in \{p\}} \vec{C}_{cp} = 0. \quad (\text{conservation du volume total}) \end{array} \right. \quad (1.3b)$$

Remarques :

- Par une considération géométrique, nous pouvons établir la relation que $V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p^+}) \cdot \vec{e}_z$, où p^+ est le point suivant p dans le sens trigonométrique (le point précédent p étant noté p^-), et $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$ avec \vec{e}_x et \vec{e}_y les vecteurs de la base canonique (nous travaillons ici en 2D).

Finalement, $V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p^+}) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (x_p y_{p^+} - y_p x_{p^+}) \cdot \vec{e}_z$ ce qui s'écrit encore :

$$V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{x}_p.$$

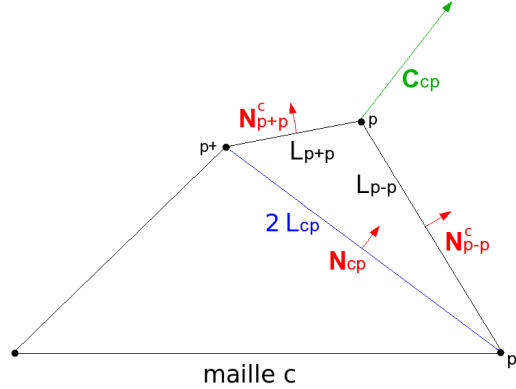


FIG. 1.1 – Variable \vec{C}_{cp} .

- Soient $\vec{N}_{p^-p}^c$ et $\vec{N}_{p^+p}^c$ les deux normales sortantes aux segments de la maille c ayant le nœud p en commun et L_{p^-p} (resp L_{p^+p}) la longueur du segment $[p^-; p]$ (resp $[p^+; p]$). On a alors : $\frac{d}{dt} V_c = \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{2} (L_{p^-p} \vec{N}_{p^-p}^c + L_{p^+p} \vec{N}_{p^+p}^c) \cdot \vec{u}_p$.

En décomposant le vecteur \vec{C}_{cp} dans la base des "normales" aux deux faces associées au nœud p , on a :

$$\vec{C}_{cp} = \frac{1}{2} (L_{p^-p} \vec{N}_{p^-p}^c + L_{p^+p} \vec{N}_{p^+p}^c),$$

ce qui permet de donner l'expression explicite des vecteurs \vec{C}_{cp}

$$\vec{C}_{cp} = L_{cp} \vec{N}_{cp} = \frac{1}{2} (y_{p^+} - y_{p^-}, x_{p^-} - x_{p^+})^t \quad (\text{en 2D plan}). \quad (1.4)$$

Divergence et gradient : opérateurs discrets

Une fois les vecteurs \vec{C}_{cp} introduits, l'équation (1.1a) devient

$$\int_{\Omega_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eq1}}}{=} \frac{d}{dt} V_c(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{déf de } \vec{C}_{cp}}}{=} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p.$$

Cette égalité permet de définir une divergence discrète en posant :

$$\frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV \simeq \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f} \right)_c = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{f}_{cp}. \quad (1.5)$$

En appliquant cette définition à $\vec{f} = P\vec{u}$ avec \vec{u} constant, nous obtenons :

$$\frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) dV = \frac{1}{V_c} \left(\vec{u}, \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} P dV \right) \simeq \left(\vec{u}, \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{P}_{cp} \right).$$

On en déduit alors un gradient discret :

$$\frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} g dV \simeq \left(\vec{\nabla} g \right)_c = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} g_{cp} \vec{C}_{cp}.$$

Détermination des variables \vec{u}_p et P_{cp} et du solveur nodal

Afin de déplacer le maillage, il est nécessaire de définir une vitesse pour chaque nœud (\vec{u}_p). Les vecteurs P_{cp} sont quant à eux introduits afin de pouvoir écrire une relation locale spatialement entre ΔP et $\Delta \vec{u}$ à travers le solveur acoustique de Riemann. Afin de déterminer les vitesses aux nœuds, \vec{u}_p , et les pressions P_{cp} (pression au nœud p relativement à la maille c), nous utilisons d'une part la troisième loi de Newton (principe des actions-réactions) appliquée aux nœuds p qui conduit à

$$\sum_{c \in \{p\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} = 0 \quad \forall p, \quad (1.6)$$

et d'autre part, une généralisation du solveur de Riemann 1D pour obtenir une deuxième équation liant \vec{u}_p et P_{cp} . Pour cela, nous posons $\vec{n}_{cp} = \frac{\vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|}$. D'après le solveur acoustique de Riemann, nous aboutissons à

$$P_{cp} = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_{cp} (\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{n}_{cp},$$

où $\alpha_{cp} = \rho_c c_c$. Ces deux relations sont locales à un nœud.

Nous en déduisons alors le système

$$\begin{cases} P_{cp} = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{cp} = 0, \\ \sum_{c \in \{p\}} \vec{C}_{cp} P_{cp} = 0, \end{cases}$$

qui revient à

$$\begin{cases} \vec{u}_p = A_p^{-1} \vec{b}_p, \\ P_{cp} = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{cp}, \end{cases} \quad (1.7)$$

où

$$A_p = \sum_{c \in \{p\}} \alpha_c \frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|}, \text{ et } \vec{b}_p = \sum_{c \in \{p\}} P_c(\vec{x}_p) \vec{C}_{cp} + \sum_{c \in \{p\}} \alpha_c \frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|} \vec{u}_c(\vec{x}_p).$$

Ces définitions de A_p et b_p ne sont valables que pour les noeud interne. La prise en compte des conditions aux limites est détaillée en annexe B.

Il faut alors définir ce que représentent les grandeurs $\vec{u}_c(\vec{x}_p)$ et $P_c(\vec{x}_p)$. Le choix de reconstruction de ces variables (constant : Q_0 , linéaire : Q_1) permet de distinguer différentes versions du schéma avec un ordre spatial distinct (1 ou 2). En revanche le solveur nodal reste inchangé.

• Ordre 1 en espace

On utilise ici une reconstruction Q_0 : la vitesse et la pression sont supposées constantes par maille.

$$\begin{aligned} \vec{u}_c(\vec{x}_p) &= \vec{u}_c, \\ P_c(\vec{x}_p) &= P_c, \end{aligned}$$

où \vec{u}_c et P_c représentent les valeurs moyennes de la vitesse et de la pression dans la cellule c . Cette version du schéma GLACE était celle implémentée dans le code initial.

• Ordre 2 en espace

Afin d'augmenter l'ordre en espace, une reconstruction linéaire (Q_1), de type MUSCL, de la vitesse et de la pression est suivie dans le calcul des flux ; démarche exposée dans [25].

Nous reconstruisons ces variables linéairement dans la maille, afin d'en déduire des valeurs aux nœuds. Les composantes $\vec{u}_c = (u_c, v_c)$ de la vitesse seront traitées séparément, selon les formules :

$$\begin{aligned} u_c(\vec{x}) &= u_c(\vec{x}_c) + \vec{\nabla} u_c(\vec{x}_c) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \\ v_c(\vec{x}) &= v_c(\vec{x}_c) + \vec{\nabla} v_c(\vec{x}_c) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \\ P_c(\vec{x}) &= P_c(\vec{x}_c) + \vec{\nabla} P_c(\vec{x}_c) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \end{aligned} \quad (1.8)$$

où $u_c(\vec{x}_c) = u_c$, $v_c(\vec{x}_c) = v_c$, $P_c(\vec{x}_c) = P_c$ (valeurs moyennes de la vitesse et de la pression), et \vec{x}_c le centre de masse de la maille c ($\vec{x}_c = \frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \vec{x} dV$). Son expression est numériquement approchée. Un calcul exacte est possible dans certains cas (Voir annexe F)

Afin de calculer ces gradients, nous imposons $w_c(\vec{x}_{c'}) = w_{c'}$, pour les cellules c' voisines de la cellule c , w_c représentant les variables u_c , v_c ou P_c . Nous reviendrons plus en détail dans l'annexe A sur la notion de voisins et notamment sur notre choix de stencil à 9 mailles qui nécessite la création de mailles fantômes pour certaines mailles au bord. Nous noterons par la suite $c' \in \{c\}$ les cellules voisines de c . Nous cherchons les gradients comme solutions de problèmes de moindres carrés [8, 25], qui s'écrivent :

$$\vec{\nabla} w_c = \underset{\vec{\beta}_c}{\operatorname{argmin}} \sum_{c' \in \{c\}} [w_{c'} - w_c - \vec{\beta}_c \cdot (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c)]^2.$$

Après simplifications, nous obtenons l'expression suivante :

$$\vec{\nabla} w_c = M_c^{-1} \sum_{c' \in \{c\}} (w_{c'} - w_c)(\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c),$$

où $M_c = \sum_{c' \in \{c\}} (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c) \otimes (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c)$.

Une fois les gradients de vitesse et de pression calculés, il ne reste plus qu'à déterminer $u_c(\vec{x}_p)$, $v_c(\vec{x}_p)$ et $P_c(\vec{x}_p)$ par les relations (1.8). Néanmoins, afin de préserver la monotonie de ces variables, nous utiliserons un limiteur, selon la formule : $w_c(\vec{x}) = w_c(\vec{x}_c) + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)$ dont le rôle exact est expliqué en annexe C.

Le système (1.1) peut désormais être discrétisé en espace pour former :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p+}) \cdot \vec{e}_z, \end{array} \right. \quad (1.9a)$$

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}_p, \quad (1.9b)$$

$$\frac{dm_c}{dt} = 0, \quad (1.9c)$$

$$m_c \frac{d\vec{u}_c}{dt} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp}, \quad (1.9d)$$

$$m_c \frac{dE_c}{dt} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p, \quad (1.9e)$$

$$P_c = \mathcal{P}(\rho_c, e_c), \quad (1.9f)$$

où P_{cp} et \vec{u}_p sont donnés par (1.7) L'équation (1.1a) n'a pas été discrétisée directement : le calcul du volume est effectué à partir de la position des nœuds. Dans le cadre semi-discret, cela revient au même, d'après l'équation (1.13). Nous verrons à la section 4.2.2, paragraphe Condition d'entropie, en revanche, que ce n'est pas le cas pour le système discret en temps et en espace.

1.1.3 Système discret d'équations

Algorithme d'ordre 1 en temps

Le système (1.9) est enfin discrétisé à l'ordre 1 en temps par un schéma d'Euler explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \end{array} \right. \quad (1.10a)$$

$$\vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \vec{u}_p^n, \quad (1.10b)$$

$$m_c^{n+1} = m_c^n, \quad (1.10c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n, \end{array} \right. \quad (1.10d)$$

$$m_c \frac{E_c^{n+1} - E_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n, \quad (1.10e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad (1.10f)$$

L'algorithme de résolution numérique d'un tel système est le suivant :

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min(CFL \frac{L_c}{c_c})$
2. détermination de $\alpha_c^n = \rho_c^n c_c^n$,
3. calcul des gradients $\vec{\nabla} u_c^n, \vec{\nabla} v_c^n, \vec{\nabla} P_c^n$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
4. calcul d'un limiteur Φ_c^n si nécessaire,
5. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^n par résolution linéaire : $\vec{u}_p^n = (A_p^n)^{-1} \vec{b}_p^n$,
6. calcul de P_{cp}^n en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^n = P_c^n - \alpha_c^n (\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{cp}^n$,
7. déplacement du maillage : calcul \vec{x}_p^{n+1} , avec (1.10b),
8. détermination de \vec{u}_c^{n+1} et E_c^{n+1} par résolution des équations (1.10d) et (1.10e) ,
9. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{n+1} et \vec{N}_{cp}^{n+1} ,
10. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la formule (1.10a),
11. détermination de $\rho_c^{n+1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1}}$, de $e_c^{n+1} = E_c^{n+1} - \frac{1}{2} \|\vec{u}_c^{n+1}\|^2$, de $P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1})$ ainsi que de la vitesse du son c_c^{n+1} .

Algorithme d'ordre 2 en temps

L'ordre 2 en temps est assuré par un prédicteur-correcteur de type trapèze (très proche de celui introduit par Maire & Nkonga [25]) où l'on se déplace d'un pas de temps entier en prédiction comme en correction. Ainsi, la prédiction fournit une estimation des valeurs à l'ordre 1 en temps. Ces valeurs sont ensuite corrigées par un schéma centré en temps.

Phase de prédiction

Les valeurs prédites seront indexées par $n + 1, 1$. Le système discret est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1,1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \cdot \vec{x}_p^{n+1,1}, \end{array} \right. \quad (1.11a)$$

$$\vec{x}_p^{n+1,1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \vec{u}_p^n, \quad (1.11b)$$

$$m_c^{n+1,1} = m_c^n, \quad (1.11c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1,1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n, \end{array} \right. \quad (1.11d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{E_c^{n+1,1} - E_c^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n, \end{array} \right. \quad (1.11e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1,1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1,1}, e_c^{n+1,1}). \end{array} \right. \quad (1.11f)$$

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min_c(\text{CFL} \frac{L_c}{c_c})$,
2. détermination de $\alpha_c^n = \rho_c^n c_c^n$,
3. calcul des gradients $\vec{\nabla} u_c^n, \vec{\nabla} v_c^n, \vec{\nabla} P_c^n$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
4. calcul d'un limiteur Φ_c^n si nécessaire,
5. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^n par résolution linéaire : $\vec{u}_p^n = (A_p^n)^{-1} \vec{b}_p^n$,
6. calcul de P_{cp}^n en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^n = P_c^n - \alpha_c^n (\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{cp}^n$,
7. déplacement du maillage : calcul de $\vec{x}_p^{n+1,1}$ avec (1.11b),
8. détermination de $\vec{u}_c^{n+1,1}$, et $E_c^{n+1,1}$ par résolution des équations (1.11d) et (1.11e),
9. calcul des vecteurs $\vec{C}_{cp}^{n+1,1}$, et $\vec{N}_{cp}^{n+1,1} = \frac{\vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{\|\vec{C}_{cp}^{n+1,1}\|}$,
10. mise à jour du volume $V_c^{n+1,1}$ selon la formule (1.11a),
11. détermination de $\rho_c^{n+1,1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1,1}}$, de $e_c^{n+1,1} = E_c^{n+1,1} - \frac{1}{2} \|\vec{u}_c^{n+1,1}\|^2$, de $P_c^{n+1,1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1,1}, e_c^{n+1,1})$
 ainsi que la vitesse du son $c_c^{n+1,1}$.

Phase de correction

Les valeurs aux flux au temps $n + \frac{1}{2}$ sont obtenus en moyennant les valeurs au temps n et les valeurs prédites. Dans l'équation (1.12e), nous faisons travailler les forces intervenant dans (1.12d) avec une vitesse au temps $n + \frac{1}{2}$ ($\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\vec{u}_p^{n+1,1} + \vec{u}_p^n)}{2}$) afin d'obtenir directement la conservation en énergie totale comme expliquer dans [4]. Le système discret correspondant

est :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \end{array} \right. \quad (1.12a)$$

$$\vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \frac{(\vec{u}_p^{n+1,1} + \vec{u}_p^n)}{2} \Delta t^n, \quad (1.12b)$$

$$m_c^{n+1} = m_c^n, \quad (1.12c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2}, \end{array} \right. \quad (1.12d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{E_c^{n+1} - E_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1})}{2} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1})}{2}, \end{array} \right. \quad (1.12e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad (1.12f)$$

Dans cette phase, nous ne recalculons pas le pas de temps.

1. détermination de $\alpha_c^{n+1,1} = \rho^{n+1,1} c^{n+1,1}$,
2. calcul des gradients $\vec{\nabla} u_c^{n+1,1}$, $\vec{\nabla} v_c^{n+1,1}$, $\vec{\nabla} P_c^{n+1,1}$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
3. calcul d'un limiteur $\Phi_c^{n+1,1}$ si nécessaire,
4. détermination de la vitesse nodale $\vec{u}_p^{n+1,1}$ par résolution linéaire : $\vec{u}_p^{n+1,1} = (A_p^{n+1,1})^{-1} \vec{b}_p^{n+1,1}$,
5. calcul de $P_c^{n+1,1}$ en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^{n+1,1} = P_c^{n+1,1} - \alpha_c^{n+1,1} (\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}) \cdot \vec{n}_{cp}^{n+1,1}$,
6. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (1.12b),
7. détermination de \vec{u}_c^{n+1} , et E_c^{n+1} par résolution des équations (1.12d) et (1.12e),
8. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{n+1} et \vec{N}_{cp}^{n+1} ,
9. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la formule (1.12a),
10. détermination de ρ_c^{n+1} , de e_c^{n+1} , de P_c^{n+1} ainsi que la vitesse du son c_c^{n+1} .

Remarques :

- Le fait de considérer les équations en énergie totale nous permet de vérifier aisément la conservation en énergie totale du système (cf section 1.2.2 de ce chapitre).
- Une autre approche plus mécanique du schéma [21] existe. Elle est basée sur l'introduction de forces de pression faisant intervenir les vecteurs aux coins : $\vec{F}_{cp} = P_{cp} \vec{C}_{cp}$.

1.2 Propriétés de conservation et d'entropie

Dans toute cette section, nous allons nous intéresser au caractère entropique du schéma, à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale dans un domaine dont les frontières ont des conditions aux limites de type flux nul. Certains résultats de conservation ont déjà été démontrés, à l'ordre 1 en temps, dans l'article [7].

1.2.1 Semi-discrétisation spatiale

Conservation de la masse

Étant en considération lagrangienne, la masse d'une maille se conserve au cours du temps. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}M_T = \sum_c \frac{d}{dt}m_c = 0,$$

où M_T est la masse totale.

Conservation de la quantité de mouvement

Dans ce paragraphe, nous allons chercher à montrer que la quantité de mouvement totale d'un système, notée $(m\vec{u})_T$, se conserve au cours du temps. La masse d'une maille se conservant au cours du temps et d'après l'équation semi-discrète (1.9d), on a :

$$\frac{d(m\vec{u})_T}{dt} = \sum_c \frac{d(m_c\vec{u}_c)}{dt} = \sum_c m_c \frac{d\vec{u}_c}{dt} = - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} P_{cp}.$$

En intervertissant les deux sommes, l'égalité devient :

$$\frac{d(m\vec{u})_T}{dt} = - \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \vec{C}_{cp} P_{cp}.$$

À l'aide la troisième loi de Newton (1.6), le second membre s'annule donc la quantité de mouvement totale est obtenue :

$$\frac{d(m\vec{u})_T}{dt} = 0.$$

Conservation de l'énergie totale

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la conservation en énergie totale.

En utilisant toujours la conservation de la masse, nous avons :

$$\sum_c \frac{d(m_c E_c)}{dt} = \sum_c m_c \frac{dE_c}{dt}.$$

D'après l'équation (1.9e), l'égalité devient

$$\sum_c \frac{m_c dE_c}{dt} = - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p.$$

En intervertissant les sommes, l'équation (1.6) permet finalement d'obtenir :

$$\sum_c \frac{m_c dE_c}{dt} = - \sum_p \vec{u}_p \cdot \left(\sum_{c \in \{p\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} \right) = 0.$$

L'énergie totale du schéma GLACE semi-discret est donc conservée.

1.2. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION ET D'ENTROPIE

Remarque : une autre démonstration est possible en utilisant le fait que l'on travaille sur un domaine où les flux aux frontières sont nuls.

$$\begin{aligned}
 \sum_c \frac{m_c dE_c}{dt} &= - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p \\
 &= - \sum_c V_c \left(\vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) \right)_c \\
 &\simeq \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} \cdot (P\vec{u}) dV \\
 &= \int_{\partial\Omega_c} P\vec{u} \cdot \vec{n} d\vec{s} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est due à l'absence de flux sur les frontières du domaine d'étude. Cette absence permet de vérifier la propriété de conservation de l'énergie totale.

Condition d'entropie

On sait que

$$T_c \frac{dS_c}{dt} = \frac{de_c}{dt} + P_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right) = \frac{dE_c}{dt} - \vec{u}_c \cdot \frac{d\vec{u}_c}{dt} + \frac{P_c}{m_c} \frac{dV_c}{dt}.$$

Or, $V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p^+}) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (x_p y_{p^+} - y_p x_{p^+})$, ce qui fournit en dérivant :

$$\frac{d}{dt} V_c = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (u_p y_{p^+} + x_p v_{p^+} - v_p x_{p^+} - y_p u_{p^+}) = \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p. \quad (1.13)$$

Ainsi, avec (1.9e) et (1.13), l'équation d'entropie devient :

$$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = - \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + \vec{u}_c \cdot \sum_{p \in \{c\}} P_{cp} \vec{C}_{cp} + P_c \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p.$$

De la propriété géométrique d'invariance par translation (1.3a), on a $\sum_{p \in \{c\}} P_c \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_c = 0$. l'ajout de ce terme à l'égalité précédente couplée au solveur de Riemann permet d'en déduire :

$$\begin{aligned}
 m_c T_c \frac{dS_c}{dt} &= \sum_{p \in \{c\}} (P_c - P_{cp}) \vec{C}_{cp} \cdot (\vec{u}_p - \vec{u}_c) \\
 &= \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_c - P_{cp})^2}{\rho_c c_c} \|\vec{C}_{cp}\| \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion

- Le schéma semi-discret est donc bien entropique,
- cependant, dans la plupart des cas ($P_{cp} \neq P_c$), l'inégalité est alors stricte et les écoulements isentropiques ne sont pas conservés.

1.2.2 Discrétisations spatiale et temporelle

ORDRE 1 EN TEMPS

Le schéma est conservatif en masse, quantité de mouvement et énergie totale ; la démonstration est exposé dans l'article [7].

Nous allons dans un premier temps calculer la variation de volume qui apparaîtra par la suite dans l'équation d'entropie. Puis, nous montrerons que le schéma GLACE totalement discret est bien entropique sous une certaine condition CFL. Enfin, nous exhiberons le terme d'erreur pour des écoulements isentropiques.

Calcul de $V_c^{n+1} - V_c^n$

Par définition des volumes, nous avons :

$$\begin{aligned} V_c^{n+1} - V_c^n &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{x}_p^n, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^{n+1} - \vec{C}_{cp}^n) \cdot \vec{x}_p^{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_p^{n+1} - \vec{x}_p^n) \cdot \vec{C}_{cp}^n. \end{aligned}$$

Or, nous pouvons lier les grandeurs en $n+1$ à celles en n par $\vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \vec{u}_p^n$, et

$$\vec{C}_{cp}^{n+1} - \vec{C}_{cp}^n = \frac{\Delta t^n}{2} \begin{pmatrix} v_{p^+}^n - v_{p^-}^n \\ u_{p^-}^n - u_{p^+}^n \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

(d'après l'expression (1.4) de \vec{C}_{cp}^n).

La variation de volume devient donc

$$V_c^{n+1} - V_c^n = \Delta t^n \left(\sum_{p \in \{c\}} \frac{\vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n}{2} + \frac{1}{4} \sum_{p \in \{c\}} \begin{pmatrix} v_{p^+}^n - v_{p^-}^n \\ u_{p^-}^n - u_{p^+}^n \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_p^n \right) + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n \cdot \begin{pmatrix} v_{p^+}^n - v_{p^-}^n \\ u_{p^-}^n - u_{p^+}^n \end{pmatrix}.$$

Simplifions le terme en Δt^n :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{x}_{p^+}^n - \vec{x}_{p^-}^n) * \vec{u}_p^n, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

La notation $*$ correspond au produit mixte $\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{e}_z$.

Nous avons donc la relation suivante pour la variation de volume :

$$V_c^{n+1} - V_c^n = \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \right] + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n). \quad (1.16)$$

Une autre expression du volume est (d'après la relation (1.15)) :

$$V_c^{n+1} - V_c^n = \Delta t^n \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{2} \vec{x}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n) + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n). \quad (1.17)$$

Condition d'entropie

La discrétisation spatiale et temporelle à l'ordre 3 en temps du second principe de la thermodynamique, d'après [18], fournit l'équation :

$$m_c T_c^n \frac{S_c^{n+1} - S_c^n}{\Delta t^n} = m_c \frac{e_c^{n+1} - e_c^n}{\Delta t^n} + m_c \frac{P_c^n}{\Delta t^n} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + O((\Delta t^n)^3),$$

ce qui, combiné à l'équation d'énergie totale amène à :

$$\begin{aligned} m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) &= -\Delta t^n \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \right) - \frac{m_c}{2} \left(\|\vec{u}_c^{n+1}\|^2 - \|\vec{u}_c^n\|^2 \right) + P_c^n (V_c^{n+1} - V_c^n) + O((\Delta t^n)^3), \\ &= -\Delta t^n \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \right) + \frac{\Delta t^n}{2} (\vec{u}_c^{n+1} + \vec{u}_c^n) \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \right) + P_c^n (V_c^{n+1} - V_c^n) + O((\Delta t^n)^3). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Cette expression fait intervenir la différence de volume $V_c^{n+1} - V_c^n$ que nous avons calculé et qui sera utilisée en adaptant les indices pour les autres schémas.

Le calcul du volume précédent permet de développer l'expression (1.18) :

$$\begin{aligned} m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) &= \Delta t^n \left[- \sum_{p \in \{c\}} P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n + \frac{\Delta t^n}{2} (\vec{u}_c^{n+1} + \vec{u}_c^n) \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n \right) + \left[\sum_{p \in \{c\}} P_c^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t^n}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n) \right] + O((\Delta t^n)^3). \end{aligned}$$

Nous savons de plus que $\sum_{p \in \{c\}} P_c^n \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_c^n = 0$ d'après (1.3a), ce qui permet d'obtenir, en introduisant cette expression dans l'équation précédente :

$$m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^n - P_c^n) \vec{C}_{cp}^n \cdot (\vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^n) + \frac{\Delta t^n}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n) \right] + O((\Delta t^n)^3).$$

L'indice $n + \frac{1}{2}$ est utilisé pour représenter la moyenne entre les grandeurs au temps n et celles au temps $n + 1$: $u_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_c^{n+1} + u_c^n}{2}$.

Le solveur acoustique de Riemann (1.1.2) nous a permis de conclure.

$$\begin{aligned}
 m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) &= \underbrace{\Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{\alpha_c^n} (P_{cp}^n - P_c^n)^2 \right]}_A \\
 &+ \underbrace{(\Delta t^n)^2 \left[- \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^n - P_c^n) \frac{\vec{C}_{cp}^n}{2m_c} \sum_{p' \in \{c\}} P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n + \frac{1}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \cdot \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n) \right]}_{\Delta t^n B} + O((\Delta t^n)^3).
 \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se simplifier en :

$$\begin{aligned}
 m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) &= \underbrace{\Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{\alpha_c^n} (P_{cp}^n - P_c^n)^2 \right]}_A \\
 &+ \underbrace{(\Delta t^n)^2 \left[- \left\| \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n}{2m_c} \right\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \cdot \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n) \right]}_{\Delta t^n B} + O((\Delta t^n)^3).
 \end{aligned}$$

Conclusion :

- le terme en Δt^n est bien positif mais du fait de la présence du terme en $(\Delta t^n)^2$, le schéma GLACE est entropique sous une certaine condition de type CFL. En effet, deux cas se présentent :
 - **Cas : $A > 0$**
 Dans ce cas, il existe un $\Delta t > 0$ tel que $A + \Delta t B > 0$. Pour cela on peut voir que si $B > 0$ alors $\Delta t > -\frac{A}{B}$ ce qui est toujours le cas puisque $\Delta t > 0$. Si $B < 0$ alors on trouve une condition que doit vérifier Δt : $0 < \Delta t < -\frac{A}{B}$. (C'est "une condition de type CFL").
 - **Cas particulier : $A = 0$**
 Dans ce cas particulier, $(A = 0) \Rightarrow P_{cp_i}^n = P_c^n \forall p_i \in \{c\}$ d'après l'expression de A , puisque $\vec{C}_{cp}^n \neq \vec{0}$. Aucune conclusion n'a pour le moment été obtenue.

Remarque : Le terme A correspond à une pseudo-viscosité intrinsèque aux schémas centrés ; il permet de déplacer les coins des différentes mailles de manière continue.

- Pour les écoulements isentropiques, le schéma GLACE à l'ordre 1 en temps (et 1 ou 2 en espace) réalise une erreur temporelle de conservation d'entropie en Δt . Pour des solutions suffisamment régulières, la pression est continue, et ΔP aussi. De plus, en notant Δx une longueur caractéristique de la maille, $\Delta P \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$, on a donc $\Delta P =$

$O(\Delta x)$ par développement de Taylor.

$$m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \underbrace{\frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{\alpha_c^n}}_{O(\Delta x)} \underbrace{(P_{cp}^n - P_c^n)^2}_{O(\Delta x^2)} \right] \\ + (\Delta t^n)^2 \left[- \sum_{p \in \{c\}} \underbrace{(P_{cp}^n - P_c^n)}_{O(\Delta x)} \underbrace{\frac{\vec{C}_{cp}^n}{2m_c}}_{O(\Delta x)} \underbrace{\sum_{p' \in \{c\}} P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n}_{V_c(\vec{\nabla} P)_c = O(\Delta x^2)} + \frac{1}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \cdot \vec{u}_p^n * \underbrace{(\vec{u}_{p^+}^n - \vec{u}_{p^-}^n)}_{O(\Delta x)} \right] + O((\Delta t^n)^3).$$

En effet, $V_c = O(\Delta x^2)$ et $(\vec{\nabla} P)(x, t) = (\vec{\nabla} P)_c + O(\Delta x)$. Ainsi, $V_c(\vec{\nabla} P)_c = V_c(\vec{\nabla} P)(x, t) + V_c O(\Delta x) = O(\Delta x^2)$, la variable $(\vec{\nabla} P)(x, t)$ étant indépendante de Δt et Δx . On obtient ainsi, une erreur sur la conservation en entropie en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x)$. L'erreur de troncature sur l'évolution d'entropie est quant à elle égale à $\frac{S_c^{n+1} - S_c^n}{\Delta t^n}$ et est donc en $O(\Delta x^3 + \Delta t \Delta x)$. Théoriquement, le schéma étant d'ordre 1 en temps (et 1 ou 2 en espace), on s'attendrait à obtenir une erreur de troncature en $O(\Delta t \Delta x^*)$, avec l'étoile (*) égale à 1 ou 2 selon l'ordre en espace choisi.

ORDRE 2 EN TEMPS

Conservation de la masse

D'après l'équation (1.12c), le système conserve la masse de chaque maille et donc la masse totale.

Conservation de la quantité de mouvement

En utilisant l'invariance de la masse d'une maille au cours du temps et l'équation (1.12d), nous avons tout d'abord :

$$\sum_c m_c u_c^{n+1} = \sum_c m_c u_c^n - \Delta t^n \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \\ = \sum_c m_c u_c^n - \Delta t^n \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{\vec{F}_{cp}^n + \vec{F}_{cp}^{n+1,1}}{2}.$$

En intervertissant les deux sommes, l'équation se ramène à :

$$\sum_c m_c u_c^{n+1} = \sum_c m_c u_c^n - \Delta t^n \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{\vec{F}_{cp}^n + \vec{F}_{cp}^{n+1,1}}{2}.$$

Or d'après la 3^{ème} loi de Newton, cf (1.6), le dernier terme s'annule. On obtient ainsi la conservation de la quantité de mouvement totale.

Conservation de l'énergie totale

Dans cette section nous allons nous intéresser à la conservation de l'énergie totale.

En utilisant l'équation (1.12e), on a :

$$\sum_c m_c E_c^{n+1} = \sum_c m_c E_c^n - \Delta t^n \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1})}{2} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1})}{2}.$$

Comme $\vec{F}_{cp} = P_{cp} \vec{C}_{cp}$, l'égalité devient en intervertissant les deux sommes :

$$\sum_c m_c E_c^{n+1} = \sum_c m_c E_c^n - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \sum_p \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1})}{2} \cdot \sum_{c \in \{p\}} \frac{(\vec{F}_{cp}^n + \vec{F}_{cp}^{n+1,1})}{2}.$$

Tout comme précédemment, nous obtenons l'annulation du dernier terme grâce à la troisième loi de Newton (1.6) .

Condition d'entropie

On procède de la même manière que pour le calcul de l'entropie à l'ordre 1 en temps. D'après [18], l'équation continue liant l'entropie à la pression et à l'énergie interne massique devient en discret et à l'ordre 3 en temps :

$$m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) = m_c \Delta t^n \frac{e_c^{n+1} - e_c^n}{\Delta t^n} + \frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} (V_c^{n+1} - V_c^n) + O((\Delta t^n)^3). \quad (1.19)$$

Nous utilisons ici la notation $n + \frac{1}{2}, 1$ pour symboliser une moyenne entre les valeurs précédentes et celles prédites ie $u^{n+\frac{1}{2},1} = \frac{u^n + u^{n+1,1}}{2}$, et la notation $n + \frac{1}{2}$ pour une moyenne entre les valeurs précédentes et les nouvelles valeurs ie $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2}$.

En utilisant l'équation (1.12e) ainsi que le calcul de la différence du volume déjà effectué (équation (1.16)), l'équation (1.19) se développe en :

$$\begin{aligned} m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \left[- \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \cdot \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1}}{2} - \frac{m_c}{2\Delta t^n} (\|\vec{u}_c^{n+1}\|^2 - \|\vec{u}_c^n\|^2) \right. \\ \left. + \frac{(P_c^n + P_c^{n+1,1})}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} + \Delta t^n \underbrace{\frac{(P_c^n + P_c^{n+1,1})}{2} \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{4} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} * (\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} - \vec{u}_p^{n-\frac{1}{2},1})}_{(D)} \right] + O((\Delta t^n)^3), \end{aligned}$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \left[- \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \cdot \frac{\vec{u}_c^n + \vec{u}_c^{n+1}}{2} \right. \\ \left. + \left[\sum_{p \in \{c\}} P_c^{n+\frac{1}{2},1} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} + (D) \Delta t^n \right] \right] + O((\Delta t^n)^3). \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{p \in \{c\}} P_c^{n+\frac{1}{2},1} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} = 0$, nous pouvons soustraire ce terme à l'équation précédente, ce qui fournit :

$$\begin{aligned} & m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) \\ &= \Delta t^n \left[- \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n + P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2} \cdot \frac{\vec{u}_c^n + \vec{u}_c^{n+1}}{2} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{p \in \{c\}} P_c^{n+\frac{1}{2},1} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} + \left[\sum_{p \in \{c\}} P_c^{n+\frac{1}{2},1} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} + (D) \Delta t^n \right] \right] + O((\Delta t^n)^3), \\ &= \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} \vec{C}_{cp}^n \cdot (\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} - \vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}}) + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \cdot (\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} - \vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}}) + (D) \Delta t^n \right] + O((\Delta t^n)^3) \end{aligned}$$

Dans le premier terme, nous avons utilisé les relations $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} = \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1}}{2}$ et $\vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}_c^n + \vec{u}_c^{n+1}}{2}$. Nous exprimons ensuite $\vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}}$ dans le dernier terme en fonction de \vec{u}_c^n et $\vec{u}_c^{n+1,1}$ avec

$$\vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}_c^n}{2} + \frac{\vec{u}_c^{n+1,1}}{2} + \frac{\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n - P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2}.$$

En utilisant la généralisation du solveur acoustique de Riemann, l'équation précédente se simplifie en :

$$\begin{aligned} m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) &= \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} (P_c^n - P_{cp}^n)^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{4\rho_c^n c_c^n} + \sum_{p \in \{c\}} (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{n+1,1}\|}{4\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} \right. \\ & \quad + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} \vec{C}_{cp}^n \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^{n+1,1}}{2} - \frac{\vec{u}_c^{n+1}}{2} \right) + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^n}{2} - \frac{\vec{u}_c^n}{2} \right) \\ & \quad \left. + (D) \Delta t^n - \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \frac{\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p' \in \{c\}} \frac{P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n - P_{cp'}^{n+1,1} \vec{C}_{cp'}^{n+1,1}}{2} \right] + O((\Delta t^n)^3) \end{aligned}$$

En réutilisant les équations de mise à jour de la vitesse \vec{u}_c^{n+1} (équations (1.11d) et (1.12d)), on a :

$$\vec{u}_c^{n+1} = \vec{u}_c^{n+1,1} + \frac{\Delta t^n}{m_c} \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n - P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}}{2}.$$

L'équation se ramène ainsi à :

$$\begin{aligned}
 m_c T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) &= \\
 \Delta t^n \left[(A) + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{4} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{n+1,1}\|}{\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}) + \right. \\
 &\quad \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} (\vec{C}_{cp}^n - \vec{C}_{cp}^{n+1,1}) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^{n+1,1}}{2} - \frac{\vec{u}_c^{n+1,1}}{2} \right) + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} \vec{C}_{cp}^n \frac{\Delta t^n}{2m_c} \left(\sum_{p' \in \{c\}} \frac{P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n - P_{cp'}^{n+1,1} \vec{C}_{cp'}^{n+1,1}}{2} \right) \\
 &\quad + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{\rho_c^n c_c^n} + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} (\vec{C}_{cp}^{n+1,1} - \vec{C}_{cp}^n) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^n}{2} - \frac{\vec{u}_c^n}{2} \right) + (D) \Delta t^n \\
 &\quad \left. - \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \frac{\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p' \in \{c\}} \frac{P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n - P_{cp'}^{n+1,1} \vec{C}_{cp'}^{n+1,1}}{2} \right] + O((\Delta t^n)^3) \\
 &= \Delta t^n \left[(A) + (B) + (C) \Delta t^n + (D) \Delta t^n + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^n}{2} \vec{C}_{cp}^n \frac{\Delta t^n}{2m_c} \left(\sum_{p' \in \{c\}} \frac{P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n - P_{cp'}^{n+1,1} \vec{C}_{cp'}^{n+1,1}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}}{2} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \frac{\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p' \in \{c\}} \frac{P_{cp'}^n \vec{C}_{cp'}^n - P_{cp'}^{n+1,1} \vec{C}_{cp'}^{n+1,1}}{2} \right] + O((\Delta t^n)^3),
 \end{aligned}$$

où

$$(A) = \sum_{p \in \{c\}} (P_c^n - P_{cp}^n)^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{4\rho_c^n c_c^n} + \sum_{p \in \{c\}} (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{n+1,1}\|}{4\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}},$$

$$(B) = \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_c^n - P_{cp}^n)}{2} \frac{(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{n+1,1}\|}{\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} + \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})}{2} \frac{(P_c^n - P_{cp}^n)}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^n\|}{\rho_c^n c_c^n},$$

et

$$(C) = \frac{1}{8} \sum_{p \in \{c\}} \left(-(P_c^n - P_{cp}^n)(\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}) * (\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n) + (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) * (\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n) \right).$$

Grâce à ces expressions de (A), (B) et (C), nous voyons que (A) ≥ 0 et que le signe de (B) n'est *a priori* pas défini. Cependant, pour une solution continue, $(P_c^n - P_{cp}^n)$ et $(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})$ ont très souvent le même signe ((B) est alors positif). Si ce n'est pas le cas, cela signifie que les $\vec{\nabla} P^n$ et $\vec{\nabla} P^{n+1}$ sont de signes différents mais très petits, car eux mêmes continus. Etant donné que $\vec{\nabla} P$ est lié à $P_c - P_{cp}$, le terme (B) est dans ce cas très petit.

La différence d'entropie s'exprime enfin comme :

$$m_c T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n [(A) + (B)] + (\Delta t^n)^2 \left[(C) + (D) - \frac{1}{8m_c} \left\| \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n - P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1}) \right\|^2 \right] + O((\Delta t^n)^3),$$

$$\text{car } \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \vec{C}_{cp}^n = 0.$$

Conclusion :

1.2. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION ET D'ENTROPIE

- nous ne pouvons pas affirmer que le schéma GLACE à l'ordre 2 en temps (et ordre 1 ou 2 en espace) est entropique principalement dû à la présence du terme (B) .
- nous savons que l'erreur temporelle de conservation en entropie faite sur les écoulements isentropiques est en $O(\Delta t)$. Pour des solutions régulières, $P_{cp}^n - P_c^n$ représente un saut de pression. Or, P étant continue pour ce type de solutions, ΔP l'est aussi. De plus, $\Delta P \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, donc $\Delta P = O(\Delta x)$.

$$m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \underbrace{[(A) + (B)]}_{O(\Delta x^3)} + (\Delta t^n)^2 \left[\underbrace{(C)}_{O(\Delta x^3)} + \underbrace{(D)}_{O(\Delta x)} - \frac{1}{8m_c} \underbrace{\left\| \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^n \vec{C}_{cp}^n - P_{cp}^{n+1,1} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \right) \right\|^2}_{V_c^n(\vec{\nabla} P)_c^n - V_c^{n+1,1}(\vec{\nabla} P)_c^{n+1,1} = O(\Delta x^2)} \right] + O((\Delta t^n)^3),$$

L'erreur de conservation sur l'entropie faite ici est donc en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta x \Delta t^2)$ tout comme à l'ordre 1 en temps. De même, l'erreur de troncature est ici en $O(\Delta x^3 + \Delta t \Delta x)$ qui est à opposé à un $O(\Delta t^2 \Delta x^*)$ en théorie du fait de l'ordre 2 en temps du schéma. L'étoile (*) vaut 1 ou 2 selon l'ordre en espace choisi.

Remarques :

- Comme vu précédemment, en zone régulière, (B) est nul ou positif; en cas de discontinuité, la positivité de (B) n'est pas garantie. Afin de l'assurer dans tous les cas, une idée est d'ajouter un limiteur temporel pour que $(P_c^n - P_{cp}^n)(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1}) \geq 0$. Cela permettrait de dégénérer à l'ordre 1 en temps près d'un choc.
- Nous pouvons simplifier l'expression de (C) en :

$$\begin{aligned} (C) &= \frac{1}{8} \sum_{p \in \{c\}} \left(-(P_c^n - P_{cp}^n)(\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}) * (\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n) + (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) * (\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n) \right), \\ &= \frac{\Delta t^n}{8} \sum_{p \in \{c\}} \sum_{p \in \{c\}} (P_c^n - P_{cp}^n)(\gamma_c^n - \gamma_p^n) + (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})(\gamma_c^n - \gamma_p^n) \\ &\quad + \frac{1}{8} \sum_{p \in \{c\}} \sum_{p \in \{c\}} (P_c^n - P_{cp}^n)(\vec{u}_c^n - \vec{u}_p^n) + (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{n+1,1})(\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Le schéma EUCCLHYD

*Le schéma EUCCLHYD (Explicit Unstructured Cell Centered Lagrangian **HYD**drodynamics) [20, 23, 24, 22, 25] est un autre schéma centré où l'on résoud le même système continu d'équations que pour le schéma GLACE. La différence se situe dans le choix des vecteurs \vec{C}_{cp} , et deux pressions aux nœuds sont présentes.*

2.1 Présentation théorique

2.1.1 Système continu d'équations

Le système d'équations de base est identique à celui de GLACE : le système (1.1).

2.1.2 Système semi-discret d'équations

Vecteurs géométriques \vec{C}_{cp}

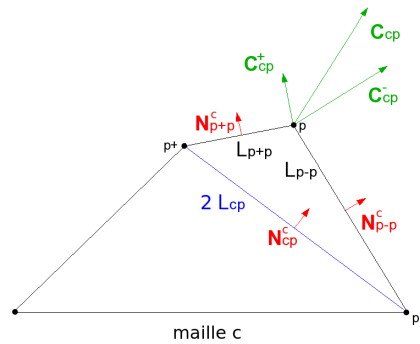


FIG. 2.1 – Vecteurs \vec{C}_{cp}^+ et \vec{C}_{cp}^- .

Dans ce schéma, les vecteurs \vec{C}_{cp} sont décomposés dans la base définie par les vecteurs normaux aux arêtes de la cellule c contenant le point p . Ces vecteurs unitaires seront notés $\vec{N}_{p^+p}^c$ et $\vec{N}_{p^-p}^c$.

Définition 2. On définit $\vec{C}_{cp}^+ = (\vec{C}_{cp} \cdot \vec{N}_{p^+p}^c) \vec{N}_{p^+p}^c$ et $\vec{C}_{cp}^- = (\vec{C}_{cp} \cdot \vec{N}_{p^-p}^c) \vec{N}_{p^-p}^c$ où p^+ est le point suivant p dans le sens trigonométrique dans la maille c et p^- le point précédent p .

Dans le schéma GLACE, nous avons montré que $\vec{C}_{cp} = \frac{1}{2}(L_{p^-p} \vec{N}_{p^-p}^c + L_{p^+p} \vec{N}_{p^+p}^c)$. De cette expression, nous pouvons en déduire celles de \vec{C}_{cp}^+ et \vec{C}_{cp}^- .

Proposition 2. On a :

$$\vec{C}_{cp}^- = \frac{1}{2} L_{p^-p} \vec{N}_{p^-p}^c \quad \text{et} \quad \vec{C}_{cp}^+ = \frac{1}{2} L_{p^+p} \vec{N}_{p^+p}^c.$$

Les vecteurs \vec{C}_{cp}^+ et \vec{C}_{cp}^- vérifient encore certaines relations de conservativité :

Proposition 3.

$$\begin{aligned} \forall c \quad \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^+ + \vec{C}_{cp}^-) &= 0, \text{ invariance par translation} \\ \forall p \quad \sum_{c \in \{p\}} (\vec{C}_{cp}^+ + \vec{C}_{cp}^-) &= 0 \text{ conservation du volume} \end{aligned}$$

Nous avons enfin les deux relations $\vec{N}_{p^+p}^c = \frac{\vec{C}_{cp}^+}{\|\vec{C}_{cp}^+\|}$ et $\vec{N}_{p^-p}^c = \frac{\vec{C}_{cp}^-}{\|\vec{C}_{cp}^-\|}$.

Tout comme dans le schéma GLACE, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} V_c(t) = \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^- + \vec{C}_{cp}^+) \cdot \vec{u}_p.$$

Divergence et gradient : opérateurs discrets

Nous définissons là encore les opérateurs de divergence et gradient discrets par :

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f})_c &= \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{f}_{cp}^- \cdot \vec{C}_{cp}^- + \vec{f}_{cp}^+ \cdot \vec{C}_{cp}^+, \\ (\vec{\nabla} g)_c &= \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} (g_{cp}^- \vec{C}_{cp}^- + g_{cp}^+ \vec{C}_{cp}^+). \end{aligned}$$

Détermination des variables \vec{u}_p , P_{cp} et du solveur nodal

Afin de déterminer les vitesses aux nœuds, $\vec{u}(\vec{x}_p) = \vec{u}_p$, et les pressions nodales, nous allons, ici encore, nous baser sur la troisième loi de Newton et sur une généralisation du solveur acoustique de Riemann 1D. Celui-ci est décomposé selon les deux vecteurs de base $(\vec{N}_{p^-p}^c$ et $\vec{N}_{p^+p}^c)$, ce qui amène à définir deux pressions au nœud p relativement à la maille c (P_{cp}^+ et P_{cp}^-) suivant le système :

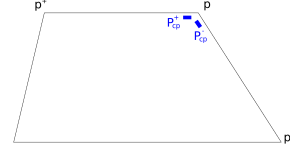


FIG. 2.2 – Pressions nodales \vec{P}_{cp}^+ et \vec{P}_{cp}^- .

$$\begin{cases} P_{cp}^+ = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{p^+p}^c, \\ P_{cp}^- = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{p^-p}^c, \\ \sum_{c \in \{p\}} (P_{cp}^+ \vec{C}_{cp}^+ + P_{cp}^- \vec{C}_{cp}^-) = 0 \end{cases},$$

où $\alpha_c = \rho_c c_c$.

Finalement, nous ramenons ces équations à la résolution du système linéaire $A_p \vec{u}_p = \vec{b}_p$, ou encore à :

$$\begin{cases} \vec{u}_p = A_p^{-1} \vec{b}_p, \\ P_{cp}^+ = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{p^+p}^c, \\ P_{cp}^- = P_c(\vec{x}_p) - \alpha_c(\vec{u}_p - \vec{u}_c(\vec{x}_p)) \cdot \vec{N}_{p^-p}^c, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec

$$A_p = \sum_{c \in \{p\}} \alpha_c \left(\frac{\vec{C}_{cp}^+ \otimes \vec{C}_{cp}^+}{\|\vec{C}_{cp}^+\|} + \frac{\vec{C}_{cp}^- \otimes \vec{C}_{cp}^-}{\|\vec{C}_{cp}^-\|} \right),$$

et

$$\vec{b}_p = \sum_{c \in \{p\}} P_c(\vec{x}_p) \vec{C}_{cp} + \sum_{c \in \{p\}} \alpha_c \left(\frac{\vec{C}_{cp}^+ \otimes \vec{C}_{cp}^+}{\|\vec{C}_{cp}^+\|} + \frac{\vec{C}_{cp}^- \otimes \vec{C}_{cp}^-}{\|\vec{C}_{cp}^-\|} \right) \vec{u}_c(\vec{x}_p).$$

La matrice A_p est inversible, dans le cas général où $n + 1$ cellules sont adjacentes au nœud p en dimension n , puisqu'elle est symétrique, définie, positive [7].

Comme pour le schéma GLACE, la façon de calculer $\vec{u}_c(\vec{x}_p)$ et $P_c(\vec{x}_p)$ conditionne l'ordre spatial du schéma.

• Ordre 1 en espace

La vitesse et la pression sont supposées constantes par maille.

$$\vec{u}_c(\vec{x}_p) = \vec{u}_c,$$

$$P_c(\vec{x}_p) = P_c,$$

où \vec{u}_c et P_c représentent les valeurs moyennes de la vitesse et de la pression dans la cellule c .

• Ordre 2 en espace

On utilise, dans ce cas, une reconstruction Q_1 de la vitesse et de la pression, identique à celle développée pour GLACE à la section 1.1.2.

Une fois ces opérateurs discrets définis, le système continu peut être discrétisé en espace pour former :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^- + \vec{C}_{cp}^+) \cdot \vec{x}_p, \\ \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}_p, \\ \frac{dm_c}{dt}(t) = 0, \\ m_c \frac{d\vec{u}_c}{dt}(t) = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^+ \vec{C}_{cp}^+ + P_{cp}^- \vec{C}_{cp}^-), \\ m_c \frac{dE_c}{dt}(t) = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^+ \vec{C}_{cp}^+ + P_{cp}^- \vec{C}_{cp}^-) \cdot \vec{u}_p, \\ P_c = \mathcal{P}(\rho_c, e_c). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.1.3 Système discret d'équations

Algorithme d'ordre 1 en temps

La discrétisation à l'ordre 1 en temps se fait par un schéma d'Euler explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^{-n+1} + \vec{C}_{cp}^{+n+1}) \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \end{array} \right. \quad (2.3a)$$

$$\vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \vec{u}_p^n, \quad (2.3b)$$

$$m_c^{n+1} = m_c^n, \quad (2.3c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n}), \end{array} \right. \quad (2.3d)$$

$$m_c \frac{E_c^{n+1} - E_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n}) \cdot \vec{u}_p^n, \quad (2.3e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad (2.3f)$$

L'algorithme de résolution numérique d'un tel système est le suivant :

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min_c(\text{CFL} \frac{L_c^n}{c_c^n})$,
2. détermination de $\alpha_c^n = \rho_c^n c_c^n$,
3. calcul des gradients $\vec{\nabla} u_c^n, \vec{\nabla} v_c^n, \vec{\nabla} P_c^n$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
4. calcul d'un limiteur Φ_c^n si nécessaire,
5. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^n par résolution linéaire : $\vec{u}_p^n = (A_p^n)^{-1} \vec{b}_p^n$,

2.1. PRÉSENTATION THÉORIQUE

6. calcul de P_{cp}^{+n} et P_{cp}^{-n} en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^{+n} = P_c^n - \alpha_c^n(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{p+p}^{cn}$ et $P_{cp}^{-n} = P_c^n - \alpha_c^n(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{p-p}^{cn}$,
7. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (2.3b),
8. détermination de \vec{u}_c^{n+1} et E_c^{n+1} par résolution des équations (2.3d) et (2.3e),
9. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{+n+1} , \vec{C}_{cp}^{-n+1} et des \vec{N}_{p+p}^{cn+1} , \vec{N}_{p-p}^{cn+1} ,
10. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la formule (2.3a),
11. détermination de $\rho_c^{n+1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1}}$, de $e_c^{n+1} = E_c^{n+1} - \frac{1}{2}||\vec{u}_c^{n+1}||^2$, de $P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1})$ ainsi que de la vitesse du son c_c^{n+1} .

Algorithme d'ordre 2 en temps

Le même schéma prédictor-correcteur que celui choisi pour GLACE est utilisé : en phase de correction, les moyennes entre les valeurs précédentes et celles prédites sont utilisées dans le calcul des flux. Les équations sont les suivantes : *Phase de prédiction*

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1,1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \cdot \vec{x}_p^{n+1,1}, \end{array} \right. \quad (2.4a)$$

$$\vec{x}_p^{n+1,1} = \vec{x}_p^{n+1} + \Delta t^n \vec{u}_p^n, \quad (2.4b)$$

$$m_c^{n+1,1} = m_c^n, \quad (2.4c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1,1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n}), \end{array} \right. \quad (2.4d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{E_c^{n+1,1} - E_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} (P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n}) \cdot \vec{u}_p^n, \end{array} \right. \quad (2.4e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1,1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1,1}, e_c^{n+1,1}). \end{array} \right. \quad (2.4f)$$

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min(\text{CLF} \frac{L_c^n}{c_c^n})$,
2. détermination de $\alpha_c^n = \rho_c^n c_c^n$,
3. calcul des gradients $\vec{\nabla} u_c^n$, $\vec{\nabla} v_c^n$, $\vec{\nabla} P_c^n$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
4. calcul d'un limiteur Φ_c^n si nécessaire,
5. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^n par résolution linéaire : $\vec{u}_p^n = (A_p^n)^{-1} \vec{b}_p^n$,
6. calcul de P_{cp}^{+n} et P_{cp}^{-n} en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^{+n} = P_c^n - \alpha_c^n(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{p+p}^{cn}$ et $P_{cp}^{-n} = P_c^n - \alpha_c^n(\vec{u}_p^n - \vec{u}_c^n) \cdot \vec{N}_{p-p}^{cn}$,
7. déplacement du maillage : calcul de $\vec{x}_p^{n+1,1}$ avec (2.4b),
8. détermination de $\vec{u}_c^{n+1,1}$ et $E_c^{n+1,1}$ par résolution des équations (2.4d) et (2.4e),
9. calcul des vecteurs $\vec{C}_{cp}^{+n+1,1}$, $\vec{C}_{cp}^{-n+1,1}$, et des $\vec{N}_{p+p}^{cn+1,1} = \frac{\vec{C}_{cp}^{+n+1,1}}{||\vec{C}_{cp}^{+n+1,1}||}$, $\vec{N}_{p-p}^{cn+1,1}$,
10. mise à jour du volume $V_c^{n+1,1}$ selon la formule (2.4a),

11. détermination de $\rho_c^{n+1,1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1,1}}$, de $e_c^{n+1,1} = E_c^{n+1,1} - \frac{1}{2} \|\vec{u}_c^{n+1,1}\|^2$, de $P_c^{n+1,1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1,1}, e_c^{n+1,1})$ ainsi que la vitesse du son $c_c^{n+1,1}$.

Phase de correction

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{C}_{cp}^{-,n+1} + \vec{C}_{cp}^{+,n+1}) \cdot \vec{x}_p^n, \end{array} \right. \quad (2.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1}}{2}, \end{array} \right. \quad (2.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c^{n+1} = m_c^n, \end{array} \right. \quad (2.5c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{\vec{u}_c^{n+1} - \vec{u}_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_{cp}^{+,n} \vec{C}_{cp}^{+,n} + P_{cp}^{-,n} \vec{C}_{cp}^{-,n} + P_{cp}^{+,n+1,1} \vec{C}_{cp}^{+,n+1,1} + P_{cp}^{-,n+1,1} \vec{C}_{cp}^{-,n+1,1})}{2}, \end{array} \right. \quad (2.5d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{E_c^{n+1} - E_c^n}{\Delta t^n} = - \sum_{p \in \{c\}} \frac{(P_{cp}^{+,n} \vec{C}_{cp}^{+,n} + P_{cp}^{-,n} \vec{C}_{cp}^{-,n} + P_{cp}^{+,n+1,1} \vec{C}_{cp}^{+,n+1,1} + P_{cp}^{-,n+1,1} \vec{C}_{cp}^{-,n+1,1})}{2} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1})}{2}, \end{array} \right. \quad (2.5e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad (2.5f)$$

Dans cette phase, nous ne recalculons pas le pas de temps.

1. détermination de $\alpha_c^{n+1,1} = \rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}$,
2. calcul des gradients $\vec{\nabla} \vec{u}_c^{n+1,1}$, $\vec{\nabla} V_c^{n+1,1}$, $\vec{\nabla} P_c^{n+1,1}$ uniquement à l'ordre 2 en espace,
3. calcul d'un limiteur $\Phi_c^{n+1,1}$ si nécessaire,
4. détermination de la vitesse nodale $\vec{u}_p^{n+1,1}$ par résolution linéaire : $\vec{u}_p^{n+1,1} = (A_p^{n+1,1})^{-1} \vec{b}_p^{n+1,1}$,
5. calcul de $P_{cp}^{+,n+1,1}$ et $P_{cp}^{-,n+1,1}$ en résolvant le solveur acoustique de Riemann
 $P_{cp}^{+,n+1,1} = P_c^{n+1,1} - \alpha_c^{n+1,1} (\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}) \cdot \vec{N}_{p^+p}^{cn+1,1}$, $P_{cp}^{-,n+1,1} = P_c^{n+1,1} - \alpha_c^{n+1,1} (\vec{u}_p^{n+1,1} - \vec{u}_c^{n+1,1}) \cdot \vec{N}_{p^-p}^{cn+1,1}$,
6. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (2.5b),
7. détermination de \vec{u}_c^{n+1} et E_c^{n+1} par résolution des équations (2.5d) et (2.5e),
8. calcul des vecteurs $\vec{C}_{cp}^{+,n+1}$, $\vec{C}_{cp}^{-,n+1}$ et des $\vec{N}_{p^+p}^{cn+1}$, $\vec{N}_{p^-p}^{cn+1}$,
9. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la formule (2.5a),
10. détermination de ρ_c^{n+1} , de e_c^{n+1} , de P_c^{n+1} ainsi que la vitesse du son c_c^{n+1} .

Nous pouvons remarquer que nous venons ainsi de définir une vitesse nodale au temps $n + \frac{1}{2}$ par $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\vec{u}_p^{n+1,1} + \vec{u}_p^n)}{2}$.

2.2 Propriétés de conservation et d'entropie

Les propriétés conservées et le respect du second principe de la thermodynamique sont analogues à celles de GLACE ainsi que les méthodes de démonstration. Nous allons ici exprimer les termes d'erreur faits sur la conservation en entropie.

ORDRE 1 EN TEMPS

Condition d'entropie

En suivant la même démarche que celle faite au chapitre 1, nous obtenons la relation suivante sur l'entropie :

$$m_c T_c^n (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n \left[\sum_{p \in \{c\}} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{+n}\|}{\alpha_c^n} (P_{cp}^{+n} - P_c^n)^2 + \frac{\|\vec{C}_{cp}^{-n}\|}{\alpha_c^n} (P_{cp}^{-n} - P_c^n)^2 \right] \\ + (\Delta t^n)^2 \left[-\left\| \sum_{p \in \{c\}} \left(\frac{P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n}}{2m_c} \right) \right\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{p \in \{c\}} P_c^n \cdot \vec{u}_p^n * (\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n) \right] + O((\Delta t^n)^3).$$

Conclusion :

- Le schéma EUCCLHYD est donc entropique.
- Mais il ne vérifie pas la conservation des écoulements isentropiques. L'erreur de conservation d'entropie est la même que celle du schéma GLACE, à savoir $O(\Delta t \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta x)$ et l'erreur de troncature en $O(\Delta x^2 + \Delta t \Delta x)$.

ORDRE 2 EN TEMPS

Condition d'entropie

Là encore, la démarche suivie pour le schéma GLACE (chapitre 1) s'adapte ici pour fournir l'expression :

$$m_c T_c (S_c^{n+1} - S_c^n) = \Delta t^n [(A) + (B)] + (\Delta t^n)^2 [(C) + (D)] \\ - \frac{1}{8m_c} \left\| \sum_{p \in \{c\}} \left(P_{cp}^{+n} \vec{C}_{cp}^{+n} - P_{cp}^{+n+1,1} \vec{C}_{cp}^{+n+1,1} + P_{cp}^{-n} \vec{C}_{cp}^{-n} - P_{cp}^{-n+1,1} \vec{C}_{cp}^{-n+1,1} \right) \right\|^2 + O((\Delta t^n)^3),$$

avec cette fois

$$(A) = \sum_{p \in \{c\}} \left[(P_c^n - P_{cp}^{+n})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{+n}\|}{4\rho_c^n c_c^n} + (P_c^n - P_{cp}^{-n})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{-n}\|}{4\rho_c^n c_c^n} \right] \\ + \sum_{p \in \{c\}} \left[(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{+n+1,1})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{+n+1,1}\|}{4\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} + (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{-n+1,1})^2 \frac{\|\vec{C}_{cp}^{-n+1,1}\|}{4\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} \right],$$

$$(B) = \sum_{p \in \{c\}} \left[\frac{(P_c^n - P_{cp}^{+n}) (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{+n+1,1})}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{+n+1,1}\|}{\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} + \frac{(P_c^n - P_{cp}^{-n}) (P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{-n+1,1})}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{-n+1,1}\|}{\rho_c^{n+1,1} c_c^{n+1,1}} \right] \\ + \sum_{p \in \{c\}} \left[\frac{(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{+n+1,1}) (P_c^n - P_{cp}^{+n})}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{+n}\|}{\rho_c^n c_c^n} + \frac{(P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{-n+1,1}) (P_c^n - P_{cp}^{-n})}{2} \frac{\|\vec{C}_{cp}^{-n}\|}{\rho_c^n c_c^n} \right].$$

et

$$\begin{aligned}
 (C) = & \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^{+n}}{2} \left(\vec{C}_{cp}^{+n} - \vec{C}_{cp}^{+n+1,1} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^{n+1,1}}{2} - \frac{\vec{u}_c^{n+1,1}}{2} \right) \\
 & + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^n - P_{cp}^{-n}}{2} \left(\vec{C}_{cp}^{-n} - \vec{C}_{cp}^{-n+1,1} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^{n+1,1}}{2} - \frac{\vec{u}_c^{n+1,1}}{2} \right) \\
 & + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{+n+1,1}}{2} \left(\vec{C}_{cp}^{+n+1,1} - \vec{C}_{cp}^{+n} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^n}{2} - \frac{\vec{u}_c^n}{2} \right) \\
 & + \sum_{p \in \{c\}} \frac{P_c^{n+1,1} - P_{cp}^{-n+1,1}}{2} \left(\vec{C}_{cp}^{-n+1,1} - \vec{C}_{cp}^{-n} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}_p^n}{2} - \frac{\vec{u}_c^n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Le terme (D) est quant à lui inchangé, *i.e* :

$$(D) = \frac{(P_c^n + P_c^{n+1,1})}{2} \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{4} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2},1} * (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2},1} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2},1}).$$

Conclusion : nous pouvons faire ici les mêmes conclusions que celles du schéma GLACE à l'ordre 2 en temps (et 1 ou 2 en espace). L'erreur de conservation d'entropie est donc en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x)$.

Deuxième partie

Schémas décalés

Chapitre 3

Le schéma VNR

Le schéma VNR (Von Neumann Richtmyer) [31] est un schéma décalé en espace et en temps utilisant une discrétisation en espace de type Wilkins [32] et une discrétisation temporelle de type sautemouton. Les variables cinématiques telles que la position \vec{x} et la vitesse \vec{u} sont définies aux nœuds. En revanche, les variables thermodynamiques telles que la pression P , l'énergie interne e et la masse volumique ρ sont définies au centre des mailles. Comme tous les schémas décalés, basés sur une discrétisation de type Wilkins, le schéma VNR est intrinsèquement d'ordre 2 en espace.

3.1 Présentation théorique

3.1.1 Système continu d'équations

Le système continu d'équations est le même que précédemment (système (1.1) obtenu en écrivant les équations de conservation du volume, de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie auquel on a rajouté l'équation d'état). Néanmoins, les équations locales (EDP) sont ici à l'origine de la discrétisation. Ces équations locales sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \end{array} \right. \quad (3.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}(P + Q), \end{array} \right. \quad (3.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{de}{dt} = -(P + Q) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \end{array} \right. \quad (3.1d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right. \quad (3.1e)$$

où e représente l'énergie interne, puisqu'on résout les équations de ce schéma en énergie interne e plutôt qu'en énergie totale E , variable privilégiée dans les schémas GLACE et EUCCLHYD. Q représente un terme homogène à une pression, correspondant à une viscosité artificielle. La pseudo-viscosité où viscosité artificielle est introduite pour assurer la création d'entropie des solutions (second principe de la thermodynamique) en présence de chocs, voir [31]. Elle sera décrite plus en détails à la section 3.1.3.

Remarque : La méthode pour passer des équations intégrales aux équations locales est ici décrite sur l'équation de la masse. Il en est de même pour les autres équations. Soient x les coordonnées lagrangiennes des nœuds et X celles eulériennes et en suivant la démarche introduite par P. H. Maire dans [22], on a : $dx = F dX$ où F représente la matrice jacobienne. En posant $J = \det(F)$, la conservation de la masse ($\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} \rho(x,t) dx \right) = 0$) devient :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(0)} \rho(X,t) J(X,t) dX \right) = 0. \quad (3.2)$$

Le domaine étant désormais indépendant du temps, l'équation s'écrit :

$$\int_{\Omega(0)} \left(J(X,t) \frac{d}{dt} \rho(X,t) + \rho(X,t) \frac{d}{dt} J(X,t) \right) dX = 0.$$

Comme exposé dans [22], la variable J vérifie :

$$\frac{d}{dt} J(X,t) = J(X,t) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X,t), \quad (3.3)$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega(0)} \left(J(X,t) \frac{d}{dt} \rho(X,t) + \rho(X,t) J(X,t) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X,t) \right) dX = 0,$$

ce qui revient, par le changement de variable, à :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{d}{dt} \rho(x,t) + \rho(x,t) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X,t) dx = 0.$$

Ceci étant valable pour tout Ω , on retrouve bien la première équation du système.

La GCL (conservation du volume) n'apparaît pas directement dans le système précédent puisqu'elle n'est pas explicitement discrétisée. Néanmoins, nous pouvons la retrouver à partir des équations du système (3.1), et plus particulièrement de l'équation (3.1a). C'est d'ailleurs l'objectif du calcul suivant.

En suivant la démarche précédente avec le jacobien J , l'équation (3.1a) permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} J(X,t) dX = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} J(X,t) dX.$$

L'équation (3.3) permet d'aboutir à la GCL :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \int_{\Omega(0)} J(X,t) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X,t) dX = \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x,t) dx. \quad (3.4)$$

3.1. PRÉSENTATION THÉORIQUE

Remarque : La variable J peut également être reliée à la masse volumique ρ .
En effet, d'après l'équation :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(0)} \rho(X,t) J(X,t) dX \right) = 0, \quad (3.5)$$

on a $\frac{d}{dt}(\rho J) = 0$.

$J(X,0)$ étant égale à 1, on obtient alors une expression explicite de J :

$$J = \frac{\rho^0}{\rho}$$

où ρ^0 représente la densité initiale.

Le système continu n'est pas discrétisé sous la forme (3.1) mais un autre choix de discrétisation pour e est suivi. En effet, la conservation de la masse permet d'écrire une formulation continue sans faire intervenir la divergence de u . Le système se réorganise donc en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} \rho dx \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \end{array} \right. \quad (3.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}(P + Q), \end{array} \right. \quad (3.6c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de}{dt} = -(P + Q) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right), \end{array} \right. \quad (3.6d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \mathcal{P}(\rho, e). \end{array} \right. \quad (3.6e)$$

L'équation (3.6a) permet de déduire que la masse m est constante.

3.1.2 Système semi-discret d'équations

Notre objectif est de discrétiser (en espace) ces équations en suivant une approche volumes finis. Elles restent donc continues en temps.

Lors de la discrétisation, un besoin de définir une masse nodale et un volume nodal ainsi qu'un gradient discret de pression apparaît. On va pour cela définir une divergence discrète et travailler par analogie. Une vitesse nodale sera aussi nécessaire afin de déplacer le maillage.

Masse nodale et volume nodal

Nous allons définir un volume nodal ou volume de contrôle qui sera lié au volume d'une maille duale autour d'un point du maillage. On pose pour cela

$$V_p = \sum_{c \in \{p\}} V_{cp},$$

où V_{cp} représente un sous volume de contrôle. Il correspond au volume du quadrilatère défini par le point p , le milieu du segment $[p, p^+]$, le barycentre des sommets de la maille c et le

milieu du segment $[p^-, p]$. On dénote par p^+ (resp. p^-) le point après (resp. avant) p lorsque l'on parcourt la maille c dans le sens trigonométrique.

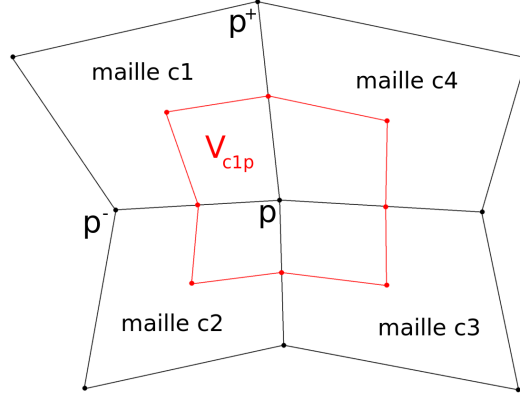


FIG. 3.1 – Volume de contrôle.

Différentes définitions peuvent être choisies pour la masse nodale. Pour notre part, nous posons :

$$m_p = \sum_{c \in \{p\}} \frac{m_c}{Nb_c}$$

où Nb_c représente le nombre de nœuds dans la maille c et m_c la masse dans la maille c . On peut remarquer que cette masse nodale n'est pas nécessairement égale à celle correspondant au volume V_p .

Divergence discrète

Par analogie avec les schémas centrés (Partie I), nous introduisons les vecteurs géométriques \vec{C}_{cp} , nécessaires à la définition d'un gradient et d'une divergence discrets.

Définition 3. On définit les vecteurs géométriques \vec{C}_{cp} par la relation

$$\vec{C}_{cp} = \vec{\nabla}_{x_p} V_c$$

où V_c est le volume de la cellule c et \vec{x}_p les coordonnées du nœud p .

Ce vecteur est défini de la même manière que pour les schémas centrés et vérifie un certain nombre de propriétés, voir pour cela le chapitre 1, section 1.1.2.

En choisissant dans (3.4) $\Omega(t) = V_c(t)$, on peut écrire :

$$\frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{dt} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c \quad (3.7)$$

où $\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c$ est la moyenne sur la maille de la divergence de u .

3.1. PRÉSENTATION THÉORIQUE

Grâce aux vecteurs \vec{C}_{cp} , cette équation (3.7) devient $\frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c$. Cette égalité s'étend à toute variable \vec{f} , ce qui permet de définir une divergence discrète en posant :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{f})_c = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{f}_p \cdot \vec{C}_{cp}. \quad (3.8)$$

Gradient discret

Une fois la divergence discrète définie pour toute variable \vec{f} , on en déduit un gradient discret pour toute variable g locale à la maille :

$$(\vec{\nabla} g)_p = -\frac{1}{V_p} \sum_{c \in \{p\}} g_c \vec{C}_{cp}.$$

Remarque :

Le signe $-$ qui apparaît ici dans la définition du gradient discret et qui n'était pas présent dans les schémas centrés peut s'expliquer par le fait qu'on travaille ici avec les mailles duales et non primales. Les vecteurs géométriques \vec{C}_{cp} sont des vecteurs sortant à une maille c , maille dite primale.

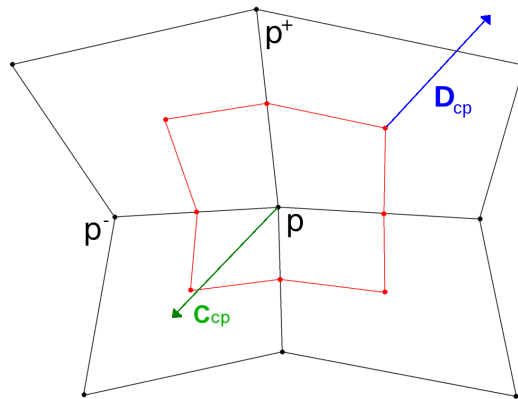


FIG. 3.2 – Vecteurs \vec{D}_{cp} et \vec{C}_{cp} .

D'après la figure 3.2, les vecteurs nodaux sortants à une maille duale (\vec{D}_{cp}) sont les opposés de ces vecteurs, ie $\vec{D}_{cp} = -\vec{C}_{cp}$. Le gradient discret précédemment défini est une variable propre à une maille duale. Ainsi, en suivant la définition des gradients discrets des schémas centrés, nous avons $(\vec{\nabla} g)_p = \frac{1}{V_p} \sum_{c \in \{p\}} g_c \vec{D}_{cp} = \frac{1}{V_p} \sum_{c \in \{p\}} g_c (-\vec{C}_{cp})$.

Ces opérateurs discrets étant définis, le système (3.6) peut être discrétisé en espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} m'_c(t) = 0, \\ \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}_p(t), \\ V_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{x}_p, \\ m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt}(t) = -V_p (\vec{\nabla}(P+Q))_c = \sum_{c \in \{p\}} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp}, \\ \frac{de_c}{dt}(t) = -(P_c + Q_c) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right)(t) \\ P_c = \mathcal{P}(\rho_c, e_c). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.9a) \\ (3.9b) \\ (3.9c) \\ (3.9d) \\ (3.9e) \\ (3.9f) \end{array}$$

3.1.3 Système discret d'équations

Afin de discrétiser en temps le système (3.9), nous introduisons un décalage temporel entre les variables cinématiques et thermodynamiques à l'aide d'un schéma saute-mouton, ce qui nous permet d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps également. Ainsi la vitesse nodale sera calculée à $t^{n+\frac{1}{2}}$ alors que \vec{x}_p , e_c , P_c seront déterminés à t^n . En posant $\Delta t^n = \min_c \text{CFL} \frac{L_c^n}{c_c}$, avec L_c^n la longueur caractéristique de la maille c et c_c la vitesse du son, nous pouvons déterminer t^{n+1} et $t^{n+\frac{1}{2}}$ grâce aux relations $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$ et $t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}}$ où $\Delta t^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t^{n-1} + \Delta t^n}{2}$.

En posant $\vec{\gamma}_p^n$ l'accélération du point p , nous obtenons les formules :

$$\frac{\vec{x}_p^{n+1} - \vec{x}_p^n}{\Delta t^n} = \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}},$$

et

$$\frac{\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^{n-\frac{1}{2}}} = \vec{\gamma}_p^n = \left(\frac{d\vec{u}_p}{dt} \right)^n.$$

Une fois cette discrétisation en temps et en espace réalisée, le système obtenu est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c^{n+1} = m_c^n, \\ \vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^n, \\ V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \\ m_p \frac{\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^{n-\frac{1}{2}}} = \sum_{c \in \{p\}} (P_c^n + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^n, \\ \frac{e_c^{n+1} - e_c^n}{\Delta t^n} = - \frac{P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^n} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right), \\ P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.10a) \\ (3.10b) \\ (3.10c) \\ (3.10d) \\ (3.10e) \\ (3.10f) \end{array}$$

Nous voyons que nous avons eu besoin de définir une pression au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$ dans l'équation (3.10e). Nous avons fait le choix d'approcher implicitement la pression : $P_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (P_c^n + P_c^{n+1})$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer P_c^{n+1} . Dans ce but, nous utilisons une méthode de Newton-Raphson (voir annexe E) ou une méthode directe, afin de mettre à jour simultanément e_c et P_c au temps t^{n+1} en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_c^{n+1} - e_c^n = - \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1}}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right), \\ P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Pseudo-viscosité

En présence de chocs, la solution des équations d'Euler n'est pas unique. Afin de ne conserver que les solutions physiques, c'est-à-dire celles entropiques, un terme de viscosité artificielle est introduit, assurant ainsi la création d'entropie. De plus, le schéma n'est pas stable en présence de chocs, la pseudo-viscosité permet ainsi de stabiliser le schéma, d'étaler le choc et de régulariser la solution à son voisinage. Cette continuité des variables est utilisée pour passer des équations intégrales aux équations différentielles. Cette pseudo-viscosité n'est pas nécessaire pour les schémas centrés puisque l'on travaille directement avec les équations intégrales. Le choix couramment utilisé est :

$$Q \approx a_1 \rho c |\Delta \vec{u}| + a_2 \rho |\Delta \vec{u}|^2,$$

avec $\Delta \vec{u}$ le saut de vitesse dans la direction du choc, a_1, a_2 des coefficients (appelés par la suite coefficients linéaire et quadratique de pseudo-viscosité) et c_c la vitesse du son. Il sera approché par $L \operatorname{div} \vec{u}$ où L est une longueur caractéristique de la maille.

La viscosité artificielle est ensuite discrétisée en temps et en espace. Pour ce faire, nous utilisons l'équation de conservation de la masse (3.1b) qui fournit :

$$(\operatorname{div} \vec{u})_c^{n+\frac{1}{2}} = \rho_c^{n+\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_c^{\bullet, n+\frac{1}{2}}}{\tau_c^{n+\frac{1}{2}}},$$

où nous avons posé $\tau_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} + \frac{1}{\rho_c^n} \right)$ et $\tau_c^{\bullet, n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^n} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right)$. La viscosité artificielle s'écrit donc selon la formule :

$$Q_c^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_c^{n+\frac{1}{2}}} \left[a_1 L_c^{n+1} c_c^n |(\operatorname{div} \vec{u})_c^{n+\frac{1}{2}}| + a_2 (L_c^{n+1})^2 \left((\operatorname{div} \vec{u})_c^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right], & \text{si } (\operatorname{div} \vec{u})_c^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.12)$$

où L_c^{n+1} est une longueur caractéristique et c_c^n la vitesse du son dans la maille c . Cette longueur caractéristique dépend du type de maillage utilisé :

$$\begin{cases} L_c^{n+1} = \sqrt{V_c^{n+1}} & \text{en cartésien,} \\ L_c^{n+1} = R_{\max}^{n+1} - R_{\min}^{n+1} & \text{en polaire.} \end{cases}$$

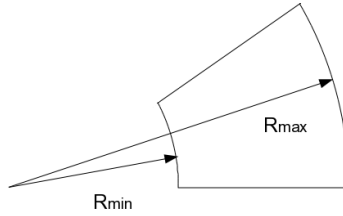


FIG. 3.3 – Longueur caractéristique en polaire.

L'influence de cette longueur caractéristique a été testée sur le cas test de Sod, voir chapitre 6. La grandeur $Q_c^{n+\frac{1}{2}}$ est ainsi une variable calculée au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$. Cependant, dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation (3.10d)), sa valeur au temps t^n est nécessaire. Le choix usuel est de poser $Q_c^n \approx Q_c^{n-\frac{1}{2}}$.

Algorithme

L'algorithme de calcul se résume donc à :

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min_c (\text{CFL} \frac{L_c^n}{c_c^n})$,
2. détermination de la vitesse nodale $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}}$:
 calcul de l'accélération $\vec{\gamma}_p^n = \frac{1}{m_p} \sum_{c \in \{p\}} \left(P_c^n + Q_c^{n-\frac{1}{2}} \right) L_{cp}^n \vec{N}_{cp}^n$,
 puis de $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \vec{u}_p^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \vec{\gamma}_p^n$,
3. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (3.10b),
4. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{n+1} ,
5. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la formule (3.10c),

6. détermination de $\rho_c^{n+1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1}}$,
7. calcul de la pseudo-viscosité $Q_c^{n+\frac{1}{2}}$ avec la formule (3.12),
8. détermination de e_c^{n+1} et de P_c^{n+1} . La résolution du système (3.11) s'effectue par méthode directe ou par la méthode de Newton-Raphson.

Remarque :

- Le décalage spatial et temporel introduit entre les variables cinématiques et thermodynamiques assure l'ordre 2 en espace comme en temps du schéma pour des solutions régulières.
- Ici encore, une vision plus mécanique peut être réalisée en considérant les forces agissant sur la maille c . Avec cette approche, nous considérons, dans les équations de départ, les forces \vec{F}_{cp} (resp. \vec{F}_{cp}^q) forces de la maille c sur le point p avec $\vec{F}_{cp} = P_c \vec{C}_{cp}$ (resp. force de viscosité artificielle). Cela nous donne, par exemple pour l'équation (3.9d)

$$m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \left(\sum_{c \in \{p\}} \vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cp}^q \right).$$

3.2 Propriétés de conservation et d'entropie

Dans toute cette section, nous allons nous intéresser à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans le cadre du schéma VNR.

3.2.1 Semi-discrétisation spatiale

Conservation de la masse

Etant en considération lagrangienne, la masse d'une maille se conserve au cours du temps. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} M_T = \sum_c \frac{d}{dt} m_c = 0, \quad (3.13)$$

où M_T représente la masse totale et m_c la masse de la maille (primale) c .

Conservation de la quantité de mouvement

Dans ce paragraphe, nous allons chercher à montrer que la quantité de mouvement totale, notée $(m\vec{u})_T$, se conserve au cours du temps. Il convient tout d'abord de remarquer que, d'après sa définition, $m_p = \sum_{c \in \{p\}} \frac{m_c}{Nb_c}$, la masse d'une maille duale m_p (ou masse nodale) se conserve elle aussi au cours du temps (à l'aide de (3.13)).

Ainsi :

$$\frac{d(m\vec{u})_T}{dt} = \sum_p \frac{d(m_p \vec{u}_p)}{dt} = \sum_p m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} + \sum_p \vec{u}_p \frac{dm_p}{dt} = \sum_p m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} + \sum_p \vec{u}_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{1}{Nb_c} \frac{dm_c}{dt} = \sum_p m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt}.$$

De plus, nous savons que

$$m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \left(\sum_{c \in \{p\}} \vec{F}_{cp} \right) + \vec{F}_p^q \quad (3.14)$$

où $\vec{F}_{cp} = P_c \vec{C}_{cp}$ et $\vec{F}_p^q = -(\vec{\nabla} Q)_p V_p$ est la force de viscosité artificielle. Comme pour la pression, on calcule le gradient de Q par $(\vec{\nabla} Q)_p = -\frac{1}{V_p} \sum_{c \in \{p\}} \vec{F}_{cp}^q$ avec $\vec{F}_{cp}^q = Q_c \vec{C}_{cp}$ (Voir la section 3.1.2). Ceci constitue la formulation de pseudo-viscosité choisie dans le schéma VNR. D'autres formulations sont possibles mais n'ont pas été étudiées ici.

En sommant sur p l'équation (3.14) et en intervertissant les deux sommes, on obtient alors

$$\sum_p m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum_c \sum_{p \in \{c\}} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp} = \sum_c (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}.$$

Or, $\sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} = 0$, équation (1.3a), on obtient ainsi la conservation de la quantité de mouvement totale, à savoir :

$$\frac{d(m\vec{u})_T}{dt} = 0.$$

Conservation de l'énergie totale

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la conservation en énergie totale pour le schéma VNR. Une première difficulté apparaît dans les schémas décalés. En effet, la vitesse et donc l'énergie cinétique sont définies aux nœuds. En revanche, l'énergie interne est définie au centre de chaque maille. Se pose alors le problème de la définition de l'énergie totale. Pour notre part, nous avons choisi deux définitions. La première est de considérer l'énergie totale dans une maille.

1^{ère} définition : $m_c E_c = m_c e_c + \sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p$

où nous avons laissé les paramètres β_{cp} comme des inconnues à déterminer afin de garantir la conservation en énergie totale.

• Contribution de l'énergie interne :

Tout comme expliqué auparavant, la masse de chaque maille est conservée au cours du temps. Nous avons donc, d'après l'équation (3.9e) :

$$\sum_c \frac{d(m_c e_c)}{dt} = \sum_c m_c \frac{de_c}{dt} = - \sum_c (P_c + Q_c) m_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right) = - \sum_c (P_c + Q_c) \frac{dV_c}{dt}.$$

Ainsi, avec l'équation (1.13),

$$\sum_c \frac{d(m_c e_c)}{dt} = - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p.$$

On reconnaît ici l'expression des forces \vec{F}_{cp} et \vec{F}_{cp}^q dont la définition a été rappelée dans le paragraphe précédent. Ainsi, en intervertissant les deux sommes,

$$\sum_c \frac{d(m_c e_c)}{dt} = - \sum_p \sum_{c \in \{p\}} (\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cp}^q) \cdot \vec{u}_p$$

- Contribution de l'énergie cinétique :

$$\sum_c \frac{d(\sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p)}{dt} = \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} m_p \vec{u}_p \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt}.$$

En utilisant (3.14), on obtient :

$$\sum_c \sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} m_p \vec{u}_p \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} \vec{u}_p \cdot \sum_{c' \in \{p\}} (\vec{F}_{c'p} + \vec{F}_{c'p}^q).$$

En intervertissant les deux premières sommes, on obtient :

$$\sum_c \sum_{p \in \{c\}} \beta_{cp} m_p \vec{u}_p \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum_p \left(\sum_{c \in \{p\}} \beta_{cp} \right) \vec{u}_p \cdot \sum_{c' \in \{p\}} (\vec{F}_{c'p} + \vec{F}_{c'p}^q).$$

Finalement, l'énergie totale devient :

$$\sum_c m_c \frac{dE_c}{dt} = \sum_p \left[-1 + \sum_{c \in \{p\}} \beta_{cp} \right] \vec{u}_p \cdot \sum_{c' \in \{p\}} (\vec{F}_{c'p} + \vec{F}_{c'p}^q).$$

Afin d'avoir la conservation de l'énergie totale du système, une condition suffisante est que $\sum_{c \in \{p\}} \beta_{cp} = 1$, $\forall p$. On pose Nb_p , le nombre de mailles attachées au sommet p . Le choix $\beta_{cp} = \frac{1}{Nb_p}$ assure la conservation de l'énergie totale du système.

Remarque :

Dans le cadre de la semi-discrétisation spatiale, la variation de volume correspond, comme on l'a déjà rappelé, à un volume près, à la divergence de vitesse $\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p$. Le calcul de $P\Delta V$ est donc une discrétisation de $\int_{\Omega} P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV$, où le choix du gradient discret est pris compatible avec la discrétisation de la divergence discrète, de manière à assurer la conservation discrète de $\int_{\Omega(t)} (P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P) dV = 0$. (Cette égalité repose sur le calcul suivant : $\int_{\Omega(t)} (P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P) dV = \int_{\Omega_c} \vec{\nabla} \cdot (P \vec{u}) dV = \int_{\partial \Omega_c} P \vec{u} \cdot \vec{n} d\vec{s} = 0$, puisque les flux aux frontières du domaine Ω_c sont supposés nuls.) C'est, en réalité, de cette propriété que découle la conservation en énergie totale démontrée ci-dessus. L'utilisation des forces la masque cependant. Reprenons ; les conservations d'énergie interne et cinétique s'écrivent :

$$\sum_c \frac{d(m_c e_c)}{dt} = - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} P_c \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p = - \sum_c V_c P_c \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c,$$

$$\sum_c \frac{d(\sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p)}{dt} = - \sum_p V_p \vec{u}_p \cdot \left(\vec{\nabla} P \right)_p.$$

Finalement, nous retrouvons :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega(t)} \left(P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P \right) dV \\
 &= \sum_c \int_{\Omega_c(t)} P \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \sum_p \int_{\Omega_p(t)} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P dV \\
 &= \sum_c V_c P_c \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c + \sum_p V_p \vec{u}_p \cdot \left(\vec{\nabla} P \right)_p \\
 &= - \frac{d(mE)_T}{dt}.
 \end{aligned}$$

Il est possible de définir l'énergie totale associée à la masse duale ce qui nous a conduit à considérer une deuxième définition :

$$2^{\text{ème}} \text{ définition : } m_p E_p = \sum_{c \in \{p\}} \frac{m_c e_c}{Nb_c} + \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p$$

• Contribution de l'énergie interne :

En utilisant toujours la conservation de la masse d'une maille au cours du temps, on a :

$$\sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_c e_c}{Nb_c} \right) = \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{m_c}{Nb_c} \frac{de_c}{dt},$$

où Nb_c est le nombre de nœuds de la maille c . En combinant (3.9e) et (1.13), on obtient :

$$\sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_c e_c}{Nb_c} \right) = - \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{1}{Nb_c} (P_c + Q_c) \frac{dV_c}{dt} = - \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \sum_{p' \in \{c\}} \frac{1}{Nb_c} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp'} \cdot \vec{u}_{p'}.$$

On reconnait de nouveau l'expression des forces $F_{cp'}$ et $F_{cp'}^q$ (grâce à la compatibilité entre les gradients et divergences discrets), ce qui nous permet d'écrire :

$$\sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_c e_c}{Nb_c} \right) = - \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{1}{Nb_c} \sum_{p' \in \{c\}} \left(F_{cp'} + F_{cp'}^q \right) \cdot \vec{u}_{p'}.$$

Or, on a de façon générique pour une quantité f_c aux mailles :

$$\sum_p \sum_{c \in \{p\}} f_c = \sum_c \sum_{p \in \{c\}} f_c = \sum_c f_c \sum_{p \in \{c\}} 1 = \sum_c Nb_c f_c. \quad (3.15)$$

On utilise ici cette formule avec $f_c = \frac{1}{Nb_c} \sum_{p' \in \{c\}} \left(F_{cp'} + F_{cp'}^q \right) \cdot \vec{u}_{p'}$ afin d'obtenir :

$$\sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_c e_c}{Nb_c} \right) = - \sum_c \sum_{p' \in \{c\}} \left(F_{cp'} + F_{cp'}^q \right) \cdot \vec{u}_{p'}.$$

3.2. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION ET D'ENTROPIE

- Contribution de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} \sum_p \frac{d}{dt} (m_p \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p) = \sum_p m_p \vec{u}_p \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt}.$$

Cette égalité peut également s'exprimer à l'aide de l'équation (3.9d) :

$$\frac{1}{2} \sum_p \frac{d}{dt} (m_p \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p) = \sum_p \vec{u}_p \cdot \sum_{c \in \{p\}} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp} = \sum_p \vec{u}_p \cdot \sum_{c \in \{p\}} (\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cp}^q).$$

Finalement,

$$\frac{d(mE)_T}{dt} = \sum_p m_p \frac{dE_p}{dt} = \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_c e_c}{Nb_c} \right) + \frac{1}{2} \sum_p \frac{d}{dt} (m_p \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p) = 0.$$

Avec cette deuxième définition de l'énergie totale, on retrouve donc bien également la conservation.

Condition d'entropie

On sait que

$$T_c \frac{dS_c}{dt} = \frac{de_c}{dt} + P_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right). \quad (3.16)$$

À l'aide de l'équation (3.9e), nous savons que :

$$\rho_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right) = -\frac{de_c}{dt} - Q_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right),$$

donc

$$T_c \frac{dS_c}{dt} = -Q_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right).$$

Cette dernière expression est positive ou nulle par définition : $Q_c > 0$ si $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c = \rho_c \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_c} \right) < 0$, et $Q_c = 0$ sinon. Ainsi, $\frac{dS}{dt} \geq 0$: la condition d'entropie imposée par le second principe de la thermodynamique donc est vérifiée.

Conclusion :

En semi-discret, nous venons de montrer que le schéma VNR est conservatif en masse et en quantité de mouvement. Il satisfait aussi la condition d'entropie $\frac{dS}{dt} \geq 0$. De plus, nous avons montré qu'avec une certaine définition de l'énergie totale, ce schéma est aussi conservatif en énergie totale.

3.2.2 Discrétisations spatiale et temporelle

Conservation de la masse

Dans le schéma, on impose $m_c^{n+1} = m_c^n$. En sommant cette égalité sur l'ensemble des mailles c , on obtient directement la conservation de la masse.

Conservation de la quantité de mouvement

On peut écrire, à l'aide de l'équation (3.10d) et de la conservation de la masse duale :

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_p \Delta t^n \sum_{c \in \{p\}} (P_c^n + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^n = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_c \Delta t^n (P_c^n + Q_c^n) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n.$$

Or, d'après la propriété d'invariance par translation (1.3a), la conservation de la quantité de mouvement totale est obtenue.

Conservation de l'énergie totale

La conservation de l'énergie totale n'est pas garantie. La définition même de l'énergie totale en discret n'est pas claire du fait du décalage temporel entre l'énergie cinétique (définie au temps $n + \frac{1}{2}$) et l'énergie interne (au temps n).

Condition d'entropie

Nous repartons à nouveau de l'égalité (3.16) que nous discrétisons à l'ordre 3 en temps [18] :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = e_c^{n+1} - e_c^n + P_c^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + O((\Delta t^n)^3).$$

La pression étant une variable définie au temps t^n , nous avons posé $P_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_c^n + P_c^{n+1}}{2}$.

Avec l'équation (3.10e), nous obtenons :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = -Q_c^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + O((\Delta t^n)^3). \quad (3.17)$$

Or, ceci est positif par définition même de $Q_c^{n+\frac{1}{2}}$ (cf équation (3.12)).

Conclusion

- le schéma VNR est bien entropique en discrétisation spatiale et temporelle.
- pour un écoulement isentropique, on devrait avoir $S_c^{n+1} = S_c^n$. Cette égalité n'est vérifiée que si $Q_c^{n+\frac{1}{2}} = 0$ ou si ρ_c est constant (d'après l'équation (3.17)). Cependant, le critère d'activation de la pseudo-viscosité pris ici est tel qu'elle s'allume quand même en phase de compression isentropique. Dans ce cas, l'erreur d'entropie obtenue est due à la différence $V_c^{n+1} - V_c^n$. Pour des solutions suffisamment régulières, $\Delta \vec{u} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, on a donc :

$$V_c^{n+1} - V_c^n = \Delta t^n \underbrace{\left[\sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \right]}_{V_c(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c = O(\Delta x^2)} + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n * \underbrace{(\vec{u}_{p+}^n - \vec{u}_{p-}^n)}_{O(\Delta x)}.$$

En effet, $V_c = O(\Delta x^2)$ et $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})(x, t) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c + O(\Delta x)$. Ainsi, $V_c(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c = V_c(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})(x, t) + V_c O(\Delta x) = O(\Delta x^2)$, la variable $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x, t)$ étant indépendante de Δt et Δx . La pseudo-viscosité étant linéaire et quadratique (i.e en $O(\Delta x)$), nous obtenons une erreur de conservation de l'entropie en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$. D'autres formulations de pseudo-viscosité

3.2. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION ET D'ENTROPIE

mieux adaptées et plus sophistiquées sont possibles [3, 5], mais nous ne les avons pas implémentées au cours de ce stage. Le schéma VNR, avec le choix de pseudo-viscosité fait ici, ne permet donc pas de préserver le caractère isentropique des écoulements.

Chapitre 4

Le schéma SGPC

Ce schéma décalé repose sur un schéma prédicteur-correcteur en temps identique à celui des schémas centrés et sur la discrétisation spatiale de VNR (schéma de Wilkins) d'où la dénomination SGPC Staggered Grid Predictor Corrector . La démarche suivie pour aboutir au système semi-discret ne sera pas redéveloppée (cf section 3.1.2 du chapitre 3) afin de ne se consacrer ici qu'à la discrétisation temporelle. L'objectif ici n'est pas de reproduire un schéma prédicteur-correcteur conservatif en énergie totale par construction [4], il s'agit simplement de tester une variante du schéma VNR qui s'affranchise du décalage temporel afin d'en mesurer l'effet.

4.1 Présentation théorique

4.1.1 Système discret d'équations

L'ordre 2 en temps n'est pas ici assuré par un schéma saute-mouton comme pour VNR mais par un schéma prédicteur-correcteur de type trapèze. Il s'agit du même prédicteur-correcteur que pour les schémas centrés.

Algorithme

Phase de prédiction

Dans cette première étape, on peut remarquer que les second membres des équations sont évalués au temps n . Dans l'équation semi-discrète de conservation de l'énergie (3.10e), la pseudo-viscosité et la pression sont définies ici au temps n , ce qui rend cette équation explicite et la

découple de la loi d'état contrairement au schéma VNR.

$$\begin{cases} m_c^{n+1,1} = m_c^n, & (4.1a) \\ \vec{x}_p^{n+1,1} = \vec{x}_p^n + \vec{u}_p^n \Delta t^n, & (4.1b) \\ V_c^{n+1,1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \cdot \vec{x}_p^{n+1,1}, & (4.1c) \\ e_c^{n+1,1} = e_c^n - (P_c^n + Q_c^n) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1,1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right), & (4.1d) \\ P_c^{n+1,1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1,1}, e_c^{n+1,1}). & (4.1e) \end{cases}$$

Un opérateur de diffusion non-linéaire (pseudo-viscosité) en zone de compression est là encore introduit afin de préserver le caractère entropique des solutions. On utilise la même formulation que pour le schéma VNR :

$$Q_c^n \approx \begin{cases} \rho_c^n [a_1 L_c^n c_c^n |(\text{div} \vec{u})_c^n| + a_2 (L_c^n)^2 ((\text{div} \vec{u})_c^n)^2], & \text{si } (\text{div} \vec{u})_c^n < 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Le terme $(\text{div} \vec{u})_c^n$ est ici calculée à partir de l'équation (3.8) :

$$(\text{div} \vec{u})_c^n = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n.$$

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min_c (CFL \frac{L_c}{c_c})$,
2. calcul de la pseudo-viscosité Q_c^n avec la formule (4.2),
3. déplacement du maillage : calcul de $\vec{x}_p^{n+1,1}$ avec (4.1b),
4. calcul des vecteurs $\vec{C}_{cp}^{n+1,1}$ et \vec{N}_{cp}^{n+1} ,
5. mise à jour du volume $V_c^{n+1,1}$ selon la formule (4.1c)
6. détermination de $\rho_c^{n+1,1} = \frac{m_c}{V_c^{n+1,1}}$, de $e_c^{n+1,1}$ et de $P_c^{n+1,1}$ d'après les équations (4.1d) et (4.1e) ainsi que de la vitesse du son $c_c^{n+1,1}$.

Phase de correction

Durant cette phase, les second membres des équations sont moyennés entre ceux au temps n et

ceux issus de la prédiction (notés $n + 1, 1$). Les équations discrétisées sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c^{n+1} = m_c^n, \\ \vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \frac{(\vec{u}_p^{n+1} + \vec{u}_p^n)}{2}, \\ V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \\ m_p \frac{\vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n}{\Delta t^n} = m_p \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{c \in \{p\}} \frac{(P_c^{n+1,1} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+1,1} + (P_c^n + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^n}{2} \\ e_c^{n+1} - e_c^n = \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} + Q_c^n \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right), \\ P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.3a) \\ (4.3b) \\ (4.3c) \\ (4.3d) \\ (4.3e) \\ (4.3f) \end{array}$$

La pseudo-viscosité n'est pas recalculée. On utilise donc Q_c^n dans l'équation de quantité de mouvement (4.3d) et l'équation d'énergie (4.3e).

pas de calcul du pas de temps Δt^n dans cette partie, ni de Q_c^{n+1} ,

1. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^{n+1} grâce à (4.3d),
2. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (4.3b),
3. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{n+1} et \vec{N}_{cp}^{n+1} ,
4. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la même formule qu'en prédiction à savoir (4.3c),
5. détermination de ρ_c^{n+1} , de e_c^{n+1} grâce à l'équation explicite (4.3e), de P_c^{n+1} ainsi que de la vitesse du son c_c^{n+1} .

4.2 Propriétés de conservation et d'entropie

4.2.1 Semi-discrétisation spatiale

Le schéma SGPC se base sur un schéma de Wilkins en espace tout comme le schéma VNR. Ils partagent donc tout deux la même semi-discrétisation spatiale et donc les mêmes propriétés de conservation, voir section 3.2.1.

4.2.2 Discrétisations spatiale et temporelle

Conservation de la masse

Etant en considération lagrangienne, la conservation de la masse totale est assurée.

Conservation de la quantité de mouvement

Comme expliqué en section 3.2.2, la masse d'une maille duale se conserve au cours du temps. La méthode suivie ici est la même que celle du schéma VNR.

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_p \Delta t^n m_p^n \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

$$= \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_p \Delta t^n \sum_{c \in \{p\}} \frac{(P_c^{n+1,1} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+1,1} + (P_c^n + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^n}{2}, \quad (4.5)$$

d'après l'équation (4.3d). En intervertissant les deux sommes, on obtient :

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \Delta t^n \sum_c \frac{(P_c^{n+1,1} + Q_c^n)}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1,1} + \Delta t^n \sum_c \frac{(P_c^n + Q_c^n)}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n.$$

On utilise finalement la propriété (1.3a) des vecteurs \vec{C}_{cp} pour obtenir :

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n.$$

Conservation de l'énergie totale

Contrairement au schéma VNR totalement discret, la définition de l'énergie totale peut s'écrire de la même manière que celle introduite pour le schéma VNR semi-discret, à savoir :

$$m_c E_c = m_c e_c + \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p^n \cdot \vec{u}_p^n.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \sum_c (E_c^{n+1} - E_c^n) \\ = & \sum_c m_c (e_c^{n+1} - e_c^n) + \frac{1}{2} \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{m_p}{Nb_p} \left(|\vec{u}_p^{n+1}|^2 - |\vec{u}_p^n|^2 \right) \\ = & - \sum_c m_c \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} + Q_c^n \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + \frac{1}{2} \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{m_p}{Nb_p} \left((\vec{u}_p^n + \Delta t^n \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}) \cdot (\vec{u}_p^n + \Delta t^n \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}) - |\vec{u}_p^n|^2 \right), \\ = & - \sum_c \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} + Q_c^n \right) (V_c^{n+1} - V_c^n) + \frac{1}{2} \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{m_p}{Nb_p} \left(2 \Delta t^n \vec{u}_p^n \cdot \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} + (\Delta t^n)^2 |\vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}|^2 \right), \\ = & \underbrace{- \sum_c \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} + Q_c^n \right) (V_c^{n+1} - V_c^n)}_{(a)} + \underbrace{\sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{m_p}{Nb_p} \Delta t^n \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}}_{(b)}, \end{aligned}$$

en utilisant $\Delta t^n \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} = \vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n$ et avec $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1}}{2}$.

(a) est, par analogie au calcul au calcul de $V_c^{n+1} - V_c^n$ dans (1.17), égal à :

$$(a) = - \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1,1}}{2} + Q_c^n \right) \left(\frac{\Delta t^n}{2} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right)$$

L'équation (4.3d) permet d'exprimer (b) en fonction des pressions :

$$\begin{aligned} (b) &= \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{\Delta t^n}{Nb_p} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{c' \in \{p\}} \frac{(P_{c'}^{n+1,1} + Q_{c'}^n) \vec{C}_{c'p}^{n+1,1} + (P_{c'}^n + Q_{c'}^n) \vec{C}_{c'p}^n}{2} \right] \\ &= \sum_p \sum_{c \in \{p\}} \frac{\Delta t^n}{2} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left[(P_c^{n+1,1} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+1,1} + (P_c^n + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^n \right] \end{aligned}$$

Nous avons ensuite cherché à exprimer $\sum_c (E_c^{n+1} - E_c^n)$ sous la forme :

$$\boxed{\sum_c (E_c^{n+1} - E_c^n) = (c) P_c^n + (d) P_c^{n+1,1} + (e) Q_c^n.}$$

Calcul de (c) :

$$(c) = - \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{C}_{cp}^n$$

En adaptant l'égalité (1.15), l'équation se simplifie en :

$$\begin{aligned} (c) &= - \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Calcul de (d) :

Nous procédons de la même manière que pour le calcul de (c)

$$\begin{aligned} (d) &= - \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{C}_{cp}^{n+1,1} \\ &= - \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^{n+1,1} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.1b), on obtient finalement :

$$(d) = \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{8} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

Calcul de (e) :

$$(e) = (c) + (d) = \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

Or, $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_{p^-}^{n+1}}{2}$.

Ainsi, en utilisant l'équation (4.3d), on a :

$$\begin{aligned} (e) &= (c) + (d) = -\frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \frac{(\vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n)}{2} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{(\Delta t^n)^3}{4} \sum_{p \in \{c\}} \frac{\vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}}{2} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Condition d'entropie

Nous partons à nouveau de l'égalité

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = e_c^{n+1} - e_c^n + P_c^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + O((\Delta t^n)^3),$$

où l'on a posé $p_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_c^n + p_c^{n+1,1}}{2}$. que nous simplifions avec l'équation (4.3e) pour obtenir :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = -Q_c^n \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) + O(\Delta t^*)$$

Contrairement au schéma VNR, le choix de la définition de Q_c^n et plus particulièrement de $(\text{div} \vec{u})_c^n$, voir section 4.1.1, ne permet pas d'assurer, sous aucune condition, le caractère entropique du schéma discret. En effet, cette divergence discrète de \vec{u} , utilisée pour le calcul de la pseudo-viscosité, correspond à une variation de volume qui n'est pas égale exactement à la variation de volume utilisée pour l'énergie.

Notons :

- $\Delta V_1 \doteq V_c^{n+1} - V_c^n$ avec $V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}$. Il s'agit de la définition choisie pour la mise à jour du volume afin que le volume calculé soit bien le volume lagrangien.
- $\Delta V_2 = \Delta t \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n$: cette deuxième définition est quant à elle utilisée dans la définition donnée à $(\text{div} \vec{u})_c^n$ pour le calcul de la pseudo-viscosité.

$$\begin{aligned} T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) &= -\frac{Q_c^n}{m_c}(\Delta V_1), \\ &= -\frac{Q_c^n}{m_c}(\Delta V_2) + \frac{Q_c^n}{m_c}(\Delta V_2 - \Delta V_1). \end{aligned}$$

D'après le calcul effectué dans le paragraphe conservation de l'énergie interne du schéma GLACE, équation (1.17), on a :

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = \frac{-\Delta t^n}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \sum_{p \in \{c\}} \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta t^n \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n,$$

$$\text{où } \vec{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}^n + \vec{u}^{n+1}}{2}.$$

De plus, on sait d'après l'équation (1.15) que :

$$\sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n = \frac{1}{2} \vec{x}_p^n * (\vec{u}_{p^-}^n - \vec{u}_{p^+}^n)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 - \Delta V_1 &= \frac{\Delta t^n}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left[-(\vec{u}_{p^-}^{n+1} - \vec{u}_{p^+}^{n+1}) + (\vec{u}_{p^-}^n - \vec{u}_{p^+}^n) \right] - \sum_{p \in \{c\}} \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{\gamma}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{\gamma}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Finalement de l'équation précédente, on en déduit :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = \underbrace{-\frac{Q_c^n}{m_c} \Delta V_2}_{\geq 0} + \frac{Q_c^n}{m_c} \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \left[\sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \left(\vec{\gamma}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{\gamma}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (4.7)$$

Conclusion

- Au vu de l'égalité (4.2.2), on constate alors que le schéma SGPC est entropique sous une condition de type CFL,
- sur les écoulements isentropiques, la présence de la pseudo-viscosité provoque une erreur que nous allons évaluer. On sait que, $\Delta V_2 = \Delta t V_c(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c = O(\Delta t \delta x^2)$. On note Δx une longueur caractéristique de la maille, et on considère une pseudo-viscosité linéaire et quadratique (*i.e* en $O(\Delta x)$). Pour des solutions suffisamment régulières ($\vec{\gamma}$ et \vec{u} de classe C^1), on a :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = -\frac{Q_c^n}{m_c} \Delta V_2 + \frac{Q_c^n}{m_c} \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \left[\sum_{p \in \{c\}} \vec{x}_p^n * \underbrace{\left(\vec{\gamma}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{\gamma}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} \right)}_{O(\Delta x)} + \sum_{p \in \{c\}} \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} * \underbrace{\left(\vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} \right)}_{O(\Delta x)} \right]$$

On obtient une erreur sur la conservation d'entropie en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$.

Cependant, si Q_c^n est désactivée ($Q_c^n = 0$), il n'y a alors pas d'erreur ; le schéma devient bien entropique et préserve alors les écoulements isentropiques.

Remarque : Comme vu précédemment, le schéma SGPC n'est pas conservatif en énergie totale. Nous avons testé un autre prédicteur-correcteur de type point milieu qui assure, par construction, la conservation en énergie totale. L'étude de cette variante, appelée SGPC2, est effectuée dans l'annexe G. Il est possible de construire une autre variante de SGPC conservative en énergie totale en préservant un prédicteur-correcteur de type trapèze mais en modifiant l'équation de mise à jour de l'énergie comme dans les schémas compatibles introduits par Shashkov [4].

Troisième partie

Comparaisons des propriétés de conservations et d'entropie des différents schémas

Chapitre 5

Synthèse des propriétés de conservations et d'entropie

Dans cette partie, nous avons récapitulé les différents résultats obtenus dans les sections 1.2, 2.2, 3.2 et 4.2. Les résultats exhibés dans le tableau 5.1 sont ceux obtenus lors de la discrétisation spatiale et temporelle.

	Conservation de la masse	Conservation de la quantité de mouvement	Conservation en énergie totale	Respect du 2 nd principe de la thermodynamique	Erreur de conservation en entropie lors d'écoulements isentropiques
GLACE / EUCCLHYD ordre 1 en temps	✓	✓	✓	✓ sous condition de type CFL	erreur en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x)$
GLACE / EUCCLHYD ordre 2 en temps	✓	✓	✓	✗	erreur en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x)$
VNR	✓	✓	✗	✓	erreur en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$
SGPC	✓	✓	erreur en $O(\Delta t^2)$	✓ sous condition de type CFL	erreur en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2)$

TAB. 5.1 – Récapitulatif des différentes propriétés

- On constate tout d'abord que du fait de la considération lagrangienne, tous les schémas sont bien conservatifs en masse.
- Ils sont également tous conservatifs en quantité de mouvement.
- Sur le schéma VNR, les variables thermodynamiques (dont e_c^n) et cinématiques (dont

$\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}}$) sont décalées en espace et en temps. La définition même de l'énergie totale pose donc déjà un problème. Une définition de pseudo-énergie pourrait être choisie :

$$m_c E_c^n = m_c e_c^n + \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p^{n-\frac{1}{2}} \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}},$$

mais ce choix ne correspond ni à une énergie physique, ni à une énergie mathématique. En effet, la conservation de cette pseudo-énergie n'assure pas la stabilité : borner $\vec{u}_p^{n-\frac{1}{2}} \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}}$ ne permet pas de borner la suite $\|\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}}\|^2$. Le prédicteur-correcteur utilisé lors de la construction du schéma SGPC n'avait pas pour but de transformer le schéma VNR pour le rendre conservatif en énergie totale de manière intrinsèque mais a été choisi le plus proche possible de celui des schémas centrés tout en gardant une mise à jour de l'énergie proche de celle de VNR. On constate d'ailleurs une erreur en $O(\Delta t^2)$ sur ce schéma. Une autre variante SGPC2, voir annexe G, a par la suite été développée. Celle-ci utilise un autre type de prédicteur-correcteur afin justement de supprimer l'erreur sur la conservation en énergie totale faite par le schéma SGPC. Les calculs de conservations associés à cette variante se trouvent dans la section G.2.

- On remarque que pour certains schémas (GLACE/EUCCLHYD à l'ordre 1 en temps et SGPC), une condition de type CFL apparaît lors de l'écriture du 2nd principe de la thermodynamique. En effet, ces schémas ne vérifient l'inégalité $S_c^{n+1} - S_c^n \geq 0$ que pour Δt assez petit.
- Nous nous sommes également intéressées au terme d'erreur sur la conservation de l'entropie lors d'écoulements isentopiques. On constate que les deux familles de schémas se distinguent sur ce point. En effet, l'erreur obtenue pour les schémas centrés est plus grande que celle des schémas décalés. Ceci traduit le caractère plus dissipatif des schémas centrés. Enfin, on constate que pour l'ensemble des schémas, deux termes apparaissent "en compétition", l'un où l'ordre en temps domine, l'autre où l'ordre spatial domine.

Quatrième partie

Comparaisons expérimentales

Dans cette partie, notre objectif est de comparer les quatre schémas d'ordre 2 :

- GLACE ordre 2 espace et temps,
- EUCCLHYD ordre 2 espace et temps,
- VNR,
- SGPC.

Pour ce faire, nous avons travaillé sur différents cas tests polaires et cartésiens :

1. tube à choc de Sod [28],
2. compression isentropique de Kidder [17],
3. problème de Noh [26],
4. problème de Sedov [15],
5. problème de Saltzman [13],
6. Choc Oblique [14].

Nous avons cherché à lancer les cas tests « à l'aveugle », sans optimisation ou artifice propre à un cas, afin de voir le comportement des schémas dans le même cadre que s'ils étaient utilisés sur un cas inconnu. Ainsi, l'ensemble des cas tests a été réalisé avec pseudo-viscosité et avec limiteur pour les schémas concernés. Les comparaisons ont été réalisées sur la densité, la pression, la vitesse et l'énergie. Les profils de ces grandeurs ont été tracés au temps final en fonction de la position du centre des mailles et toutes les cellules du maillage ont été prises en compte. Ceci nous permettra de vérifier l'absence de dispersion des valeurs.

Pour les schémas centrés :

Le limiteur utilisé est un limiteur directionnel :

- dans les directions \vec{e}_r et \vec{e}_θ pour les cas tests polaires (2 à 4)
- dans les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y pour les cas tests cartésiens.

Le limiteur employé pour chaque cas est celui de Barth Jespersen. L'influence de ce choix a parfois été étudiée.

Pour les schémas décalés :

Les paramètres de pseudo-viscosité sont, là encore, les mêmes sur les cinq premiers cas tests à savoir :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5 && \text{coefficient linéaire} \\ a_2 &= \frac{\gamma+1}{8} && \text{coefficient quadratique} \end{aligned}$$

Sur le cas test du Choc Oblique, les paramètres choisis sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.15 && \text{coefficient linéaire} \\ a_2 &= 1.5 && \text{coefficient quadratique} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la longueur caractéristique, nous prenons :

$$\begin{aligned} L_c &= \sqrt{V_c} && \text{en maillage cartésien} \\ L_c &= R_c^{\max} - R_c^{\min} && \text{en maillage polaire} \end{aligned}$$

Toutes les grandeurs associées aux différents cas tests seront exprimées dans le système CGS (cm, g, s).

Chapitre 6

Tube à choc de Sod

Ce cas test [28] représente l'évolution de deux gaz, de pression et densité différentes, initialement au repos séparés par un diaphragme que l'on enlève au début de l'expérience. Il y a ainsi présence d'une discontinuité de contact en pression et en densité. L'intérêt de ce cas test réside dans le fait que trois types d'ondes sont présentes et que la solution analytique est connue.

6.1 Description du cas et analyse théorique

Ce cas test a été réalisé en 2D sur différents maillages polaires et cartésiens.

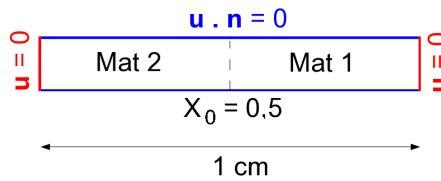


FIG. 6.1 – Cas test Sod 2D cartésien : conditions aux limites.

Une condition de type mur ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$) est imposée sur les axes horizontaux. Les extrémités ont une condition de vitesse nulle.

PARAMÈTRES		
	Matériau 1	Matériau 2
densité initiale	$\rho_d = 0.125 \text{ g.cm}^{-2}$	$\rho_g = 1 \text{ g.cm}^{-2}$
pression initiale	$p_d = 0.1 \text{ barye}$	$p_g = 1 \text{ barye}$
vitesse initiale	$\vec{u}_d = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$	$\vec{u}_g = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$
γ	1.4	
t_{final}	0.2 s	
CFL	0.5	

Ce cas test, ayant une solution analytique, est utilisé pour la validation des schémas.

Solution analytique

La solution est constituée d'une onde de choc à droite, d'une discontinuité de contact, ainsi que d'une onde de détente à gauche. Nous avons pu étudier cette solution grâce à [29].

Nous avons ici supposé que la discontinuité se situait en x_0 . La solution se décompose en cinq parties, suivant la position du point x :

- l'onde de détente n'a pas encore atteint l'extrémité gauche du maillage, les valeurs sont donc toujours celles de l'état gauche initial. Cette zone correspond à $(x - x_0) < s_{fg}t$ où $\vec{s}_{fg} = s_{fg}\vec{e}_x$ en cartésien (resp. \vec{e}_r en polaire), représente la vitesse de front de la détente gauche ;
- la région suivante ie $s_{fg}t \leq (x - x_0) < s_{qg}t$, correspond à l'onde de détente. La vitesse de queue de cette onde de détente gauche est $\vec{s}_{qg} = s_{qg}\vec{e}_x$.
- se rencontre ensuite une région entre l'onde de détente et la discontinuité de contact où les valeurs sont celles issues du solveur de Riemann acoustique. La discontinuité de contact se situe en $x = u^*t$ avec $\vec{u}^* = u^*\vec{e}_x$ (la vitesse de la discontinuité ;
- vient alors le plateau du choc ;
- la dernière région représente une zone non encore atteinte par le choc où les valeurs sont celles de l'état droit initial.

La vitesse et la pression issues du solveur de Riemann sont données par

$$\begin{aligned}\vec{u}^* &= 0.92745 \vec{e}_x \text{ cm.s}^{-1}, \\ P^* &= 0.30313 \text{ barye}.\end{aligned}$$

En terme d'équations, cela revient à :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\text{théo}} &= \begin{cases} \rho_g & \text{si } (x - x_0) < s_{fg}t, \\ \rho_g \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma P_g}{\rho_g}}} \left(u_g - \frac{x-x_0}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} & \text{si } s_{fg}t \leq (x - x_0) < s_{qg}t, \\ \rho_g \left(\frac{P^*}{P_g} \right)^{\frac{1}{\gamma}} & \text{si } s_{qg}t \leq (x - x_0) < u^*t, \\ \rho^* & \text{si } u^*t \leq (x - x_0) < s_d t, \\ \rho_d & \text{si } (x - x_0) \geq s_d t, \end{cases} \\
 P_{\text{théo}} &= \begin{cases} P_g & \text{si } (x - x_0) < s_{fg}t, \\ P_g \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma P_g}{\rho_g}}} \left(\vec{u}_g - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} & \text{si } s_{fg}t \leq (x - x_0) < s_{qg}t, \\ P^* & \text{si } s_{qg}t \leq (x - x_0) < s_d t, \\ P_d & \text{si } (x - x_0) \geq s_d t, \end{cases} \\
 e_{\text{théo}} &= \frac{P_{\text{théo}}}{(\gamma-1)\rho_{\text{théo}}}, \\
 \vec{u}_{\text{théo}} &= \begin{cases} \vec{u}_g & \text{si } (x - x_0) < s_{fg}t, \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\sqrt{\frac{\gamma P_g}{\rho_g}} + \frac{\gamma-1}{2} \vec{u}_g + \frac{x}{t} \right) & \text{si } s_{fg}t \leq (x - x_0) < s_{qg}t, \\ \vec{u}^* & \text{si } s_{qg}t \leq (x - x_0) < s_d t, \\ \vec{u}_d & \text{si } (x - x_0) \geq s_d t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nous avons posé ici $\vec{s}_{fg} = s_{fg}\vec{e}_x$ la vitesse de tête de l'onde de détente gauche donnée par :

$$s_{fg} = u_g - \sqrt{\frac{\gamma P_g}{\rho_g}},$$

$\vec{s}_{qg} = s_{qg}\vec{e}_x$ la vitesse de queue de l'onde de détente gauche, égale à :

$$s_{qg} = u^* - \sqrt{\frac{\gamma P_g}{\rho_g}} \left(\frac{P^*}{P_g} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}},$$

et $\vec{s}_d = s_d\vec{e}_x$, la vitesse du choc à droite :

$$s_d = \left(u_d + \sqrt{\frac{\gamma P_d}{\rho_d}} \sqrt{\left(\frac{(\gamma+1)P^*}{2\gamma P_d} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)} \right).$$

6.2 Résultats

6.2.1 Comparaison des quatre schémas d'ordre 2 en espace et en temps

Le tube à choc de Sod est le premier cas test sur lequel nous avons comparé les différents schémas d'ordre 2 en espace et en temps. Les options activées pour chaque schémas ont été rappelées au début de la troisième partie. Différents maillages ont été utilisés (400×40 , 100×2 , 500×2 , 5000×2 ...) au cours de l'étude, mais seuls les résultats obtenus sur le maillage $n_x = 5000$ et $n_y = 2$ sont présentés ci-dessous. (NB : quelque soit le raffinement du maillage initial, l'ordonnée y des mailles a été adaptée de sorte à toujours avoir initialement des mailles carrées).

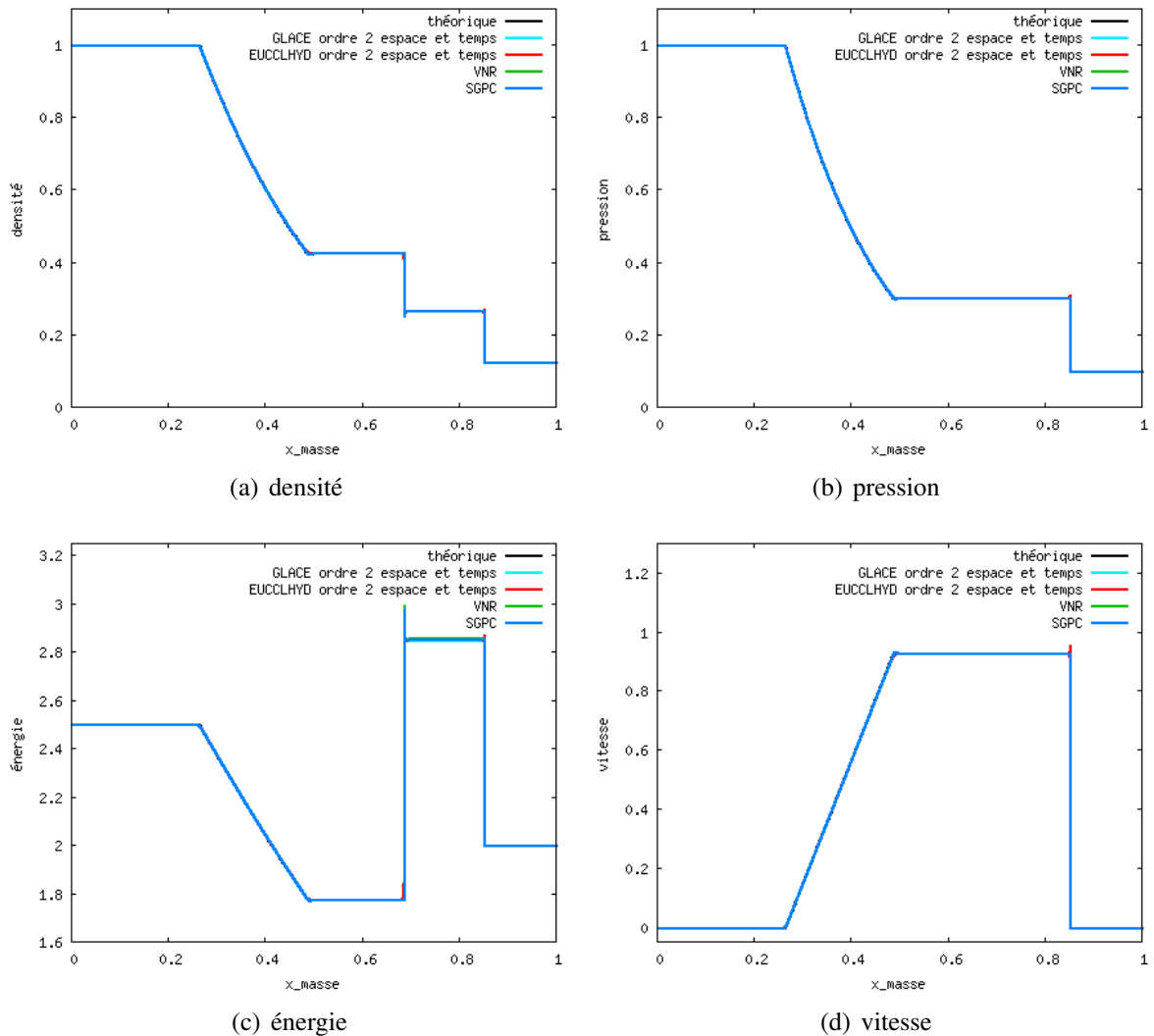


FIG. 6.2 – Tube à choc de Sod cartésien à $t_{\text{final}} = 0.2$ s.

6.2. RÉSULTATS

Nous avons ensuite tracé les zooms des profils de densité correspondant aux lettres de la figure 6.2(a).

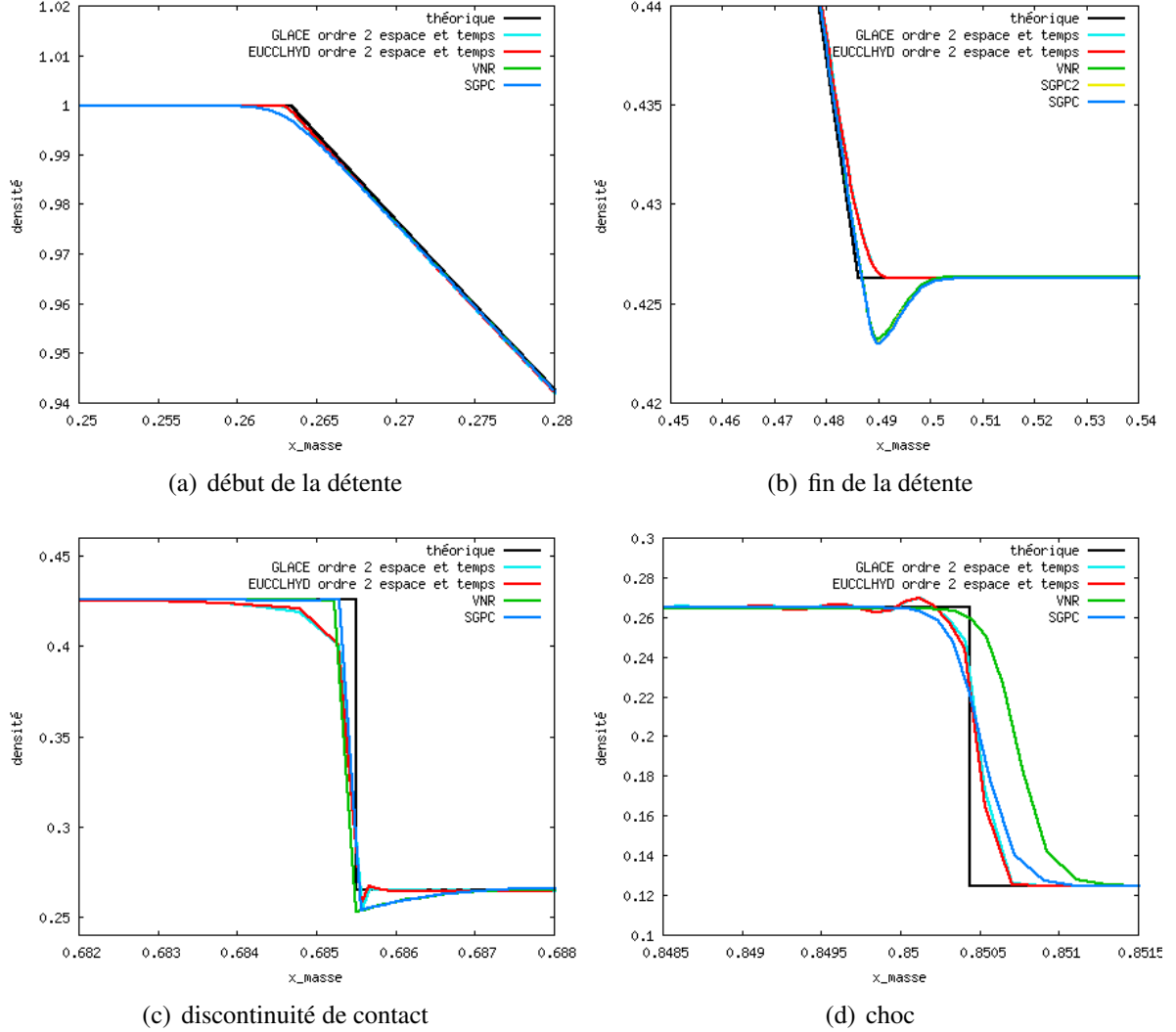


FIG. 6.3 – Densité du tube à choc de Sod cartésien à $t_{\text{final}} = 0.2$ s.

Il convient tout d'abord de remarquer que deux groupes de schémas apparaissent au niveau des courbes 6.3(a), 6.3(b), 6.3(c) : les schémas centrés et les schémas décalés. Les schémas centrés semblent mieux approximer la courbe théorique au niveau de la détente. En revanche, les schémas décalés sont plus raides et décrivent donc mieux la discontinuité de contact. Au niveau du choc, (zoom 6.3(d)) les schémas centrés convergent vers la solution, malgré de légères oscillations sur le plateau (voir explications à la section 6.2.2). Le schéma VNR, quant à lui, semble ne pas converger vers la bonne solution. Une étude plus approfondie de ce point a été réalisée, voir la section 6.2.4. L'utilisation d'un prédicteur-correcteur tout en gardant la même discrétisation spatiale (schéma SGPC) permet en revanche de combler cette lacune.

6.2.2 Comparaison intra schéma

Afin de mesurer l'amélioration des résultats par la montée en ordre en espace et en temps, nous allons étudier différentes variantes (ordre 1, ordre 2 en espace uniquement, ordre 2 en temps, ordre 2 en espace et en temps) pour un même schéma (ici, le schéma GLACE). Les comparaisons portent sur les profils de densité au temps $t_{\text{final}} = 0.2\text{s}$. La même étude a été réalisée sur le schéma EUCCLHYD et les conclusions obtenues sont similaires.

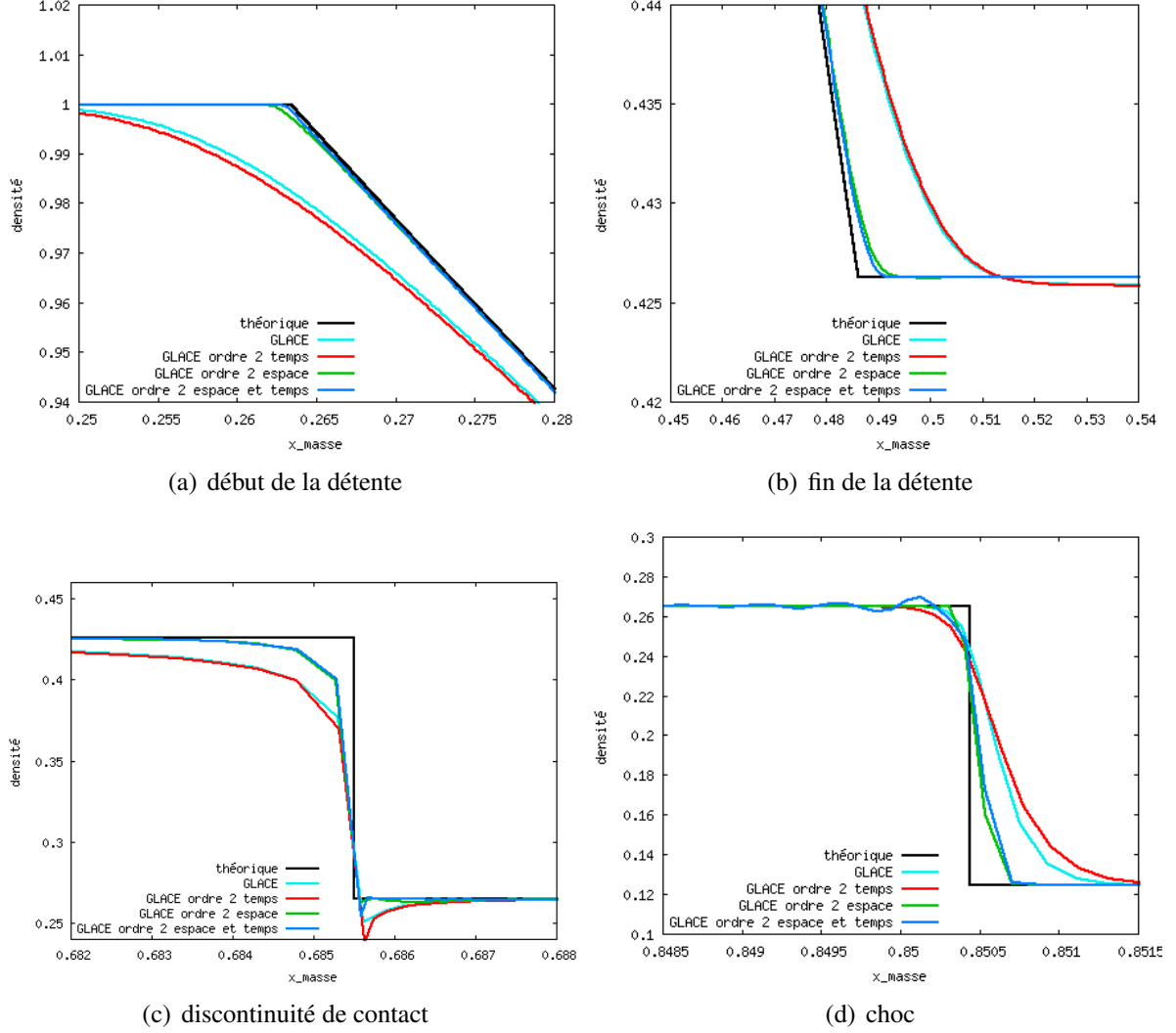


FIG. 6.4 – Profils de densité du tube à choc de Sod cartésien à $t_{\text{final}} = 0.2\text{ s}$ sur le schéma GLACE.

Deux groupes de courbes se distinguent sur les figures 6.4(a), 6.4(b) et 6.4(c), celles associées au schéma GLACE d'ordre 1 en espace et celles d'ordre 2 en espace. On constate, en effet, que l'amélioration des résultats est principalement due à la montée en ordre spatial ; en revanche l'ordre temporel semble peu influencer. Néanmoins, comme indiqué dans la section C.2, un limiteur temporel était nécessaire pour les schémas centrés d'ordre 2 en espace et 1 en temps. On

6.2. RÉSULTATS

retrouve ici sur un maillage 5000×2 , l'absence d'oscillations sur le plateau du choc pour le schéma GLACE d'ordre 2 en espace et 1 en temps. En revanche, pour les schémas d'ordre 2 en espace et 2 en temps, le limiteur de type Barth Jespersen est toujours activé mais pas le limiteur temporel. Ainsi, la présence de légères oscillations à l'ordre 2 en espace et 2 en temps est à nuancer. En effet, les oscillations présentes ici sont négligeables comparées à celles observées sur la figure C.2(a) à l'ordre 1 en temps et 2 en espace sans limiteur temporel. Cette forte atténuation des oscillations est une des principales améliorations apportées par l'ordre 2 en temps.

Remarque : le peu de différences observées entre le schéma d'ordre 2 en espace et 1 en temps et le schéma d'ordre 2 en espace et 2 en temps s'explique par le fait que l'utilisation d'un limiteur temporel revient quasiment à monter le schéma temporellement en ordre.

6.2.3 Influence du choix du limiteur sur le schéma GLACE ordre 2 en espace et 2 en temps

Le maillage utilisé dans cette section est un maillage 400×40 . Les différences entre les trois limiteurs implémentés sont très peu marquées. La figure 6.5, où chaque courbe représente la densité au temps final avec un limiteur spatial plus le limiteur temporel, illustre cet aspect.

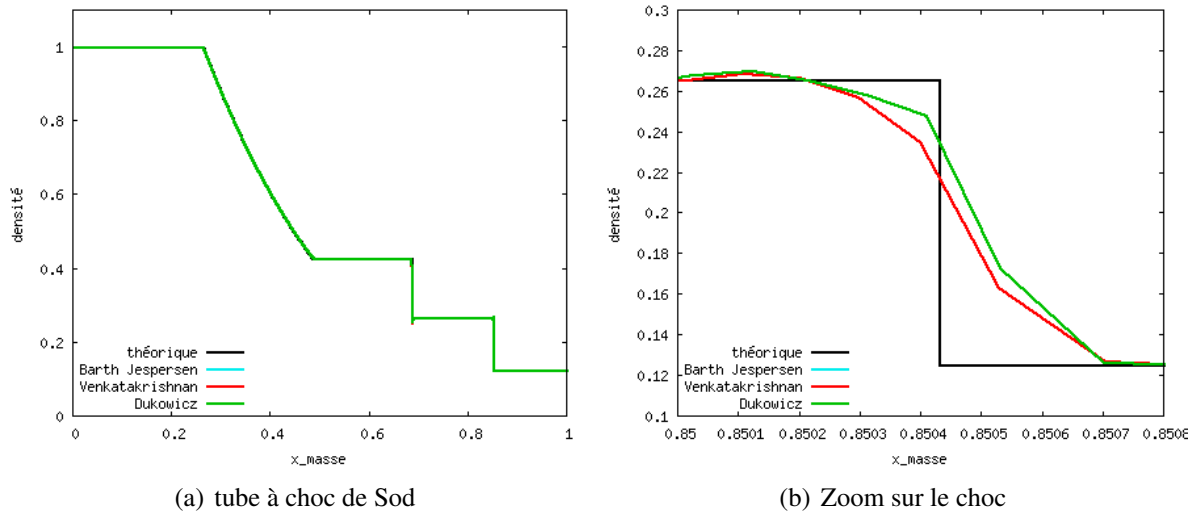


FIG. 6.5 – Comparaison des trois limiteurs additionnés au limiteur temporel

6.2.4 Influence des différents paramètres du schéma VNR

Nous avons ici joué sur l'influence des différents paramètres associés au schéma VNR.

Convergence en maillage à CFL fixée ($\Delta t \rightarrow 0$ & $\Delta x \rightarrow 0$)

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressées à la convergence du schéma VNR. La CFL a été fixée à 0.5 et le maillage affiné de plus en plus ($\Delta x_c \rightarrow 0$). Le pas de temps étant calculé

par la formule : $\Delta t = \min_c(CFL \frac{\Delta x_c}{c_c})$, Δt tend lui aussi vers 0. On constate alors la convergence du schéma VNR vers une mauvaise solution.

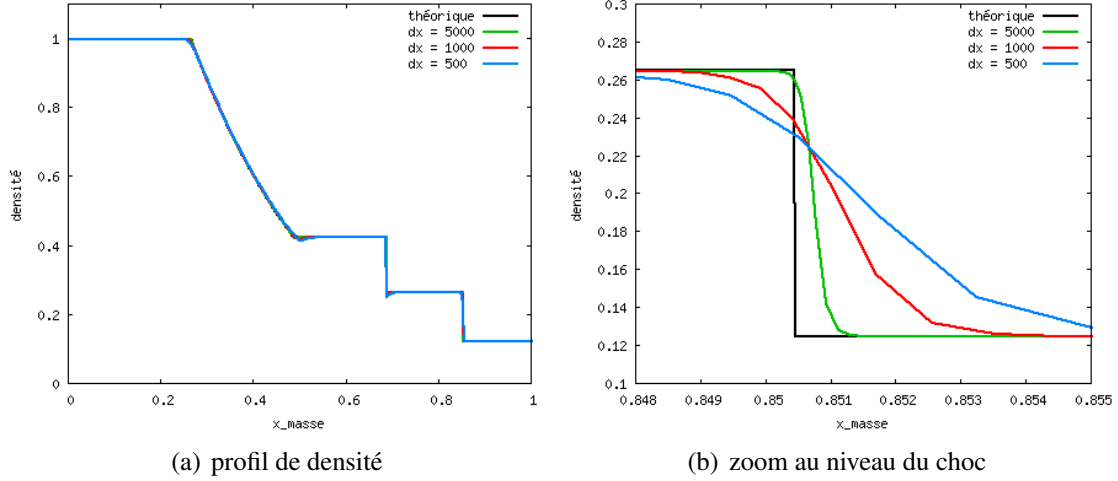


FIG. 6.6 – Densité à t_{final} pour le schéma VNR : convergence à $\Delta x_c \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$.

Influence de la CFL

Comme vu précédemment, le schéma VNR semble converger en maillage vers une mauvaise solution avec une CFL fixée à 0.5. Nous nous sommes intéressées dans ce paragraphe au comportement du schéma lorsque Δt tend vers 0 uniquement ce qui revient à faire tendre la CFL vers 0. Trois valeurs ont été testées : 0.5, 0.1 et 0.05. Δx est ici fixé et le maillage utilisé est le maillage 5000×2 .

Comme observé figure 6.7, une faible CFL permet de mieux capter le choc. Ainsi, le schéma VNR converge bien (au sens classique : $\Delta t \rightarrow 0$) vers la bonne solution.

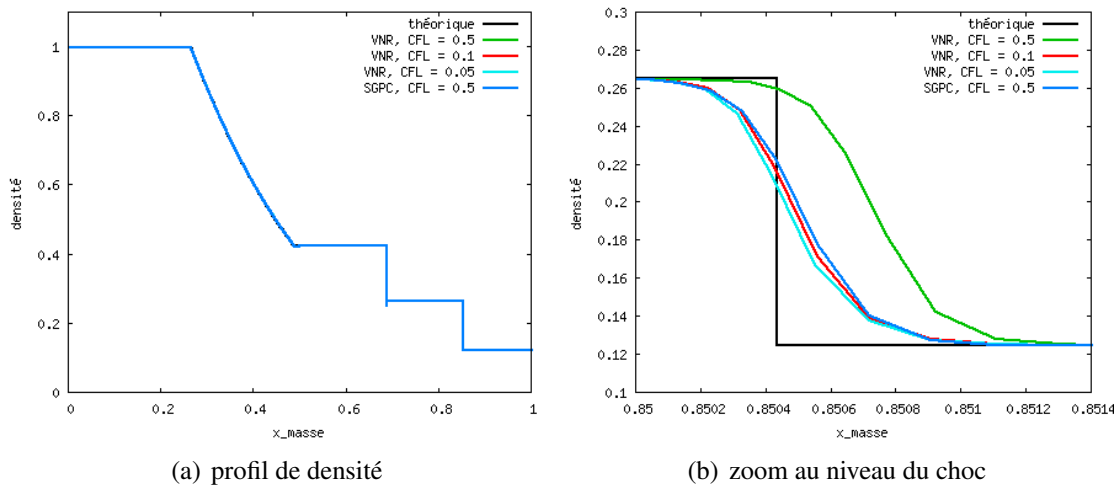


FIG. 6.7 – Densité à t_{final} pour le schéma VNR : influence de la CFL.

6.2. RÉSULTATS

Remarque : Avant de tester différentes valeurs de CFL sur le schéma VNR, nous avons vérifié que le pas de temps de ce schéma était sensiblement le même que celui des autres schémas. De part le test réalisé, nous constatons donc que pour capturer la bonne solution avec le schéma VNR, un pas de temps plus petit (CFL plus petite) est nécessaire. On obtient, avec une CFL plus petite, des résultats similaires à ceux de SGPC.

Influence de la longueur caractéristique L de la pseudo-viscosité

Jusqu'à présent, nous avons choisi de calculer la pseudo-viscosité avec la longueur caractéristique $L_c = \sqrt{V_c}$ en cartésien (cf section 3.1.3). Une autre longueur caractéristique a été testée ici : $L_c = dx_c$ (en prenant dx_c la longueur d'une cellule dans le sens horizontal). Ce choix est à comparer avec celui fait pour les maillages polaires, où la longueur caractéristique vaut $L_c = R_{\max} - R_{\min}$, ie la longueur de la maille dans la direction du choc.

Voici les résultats obtenus sur un maillage raffiné 5000×2 .

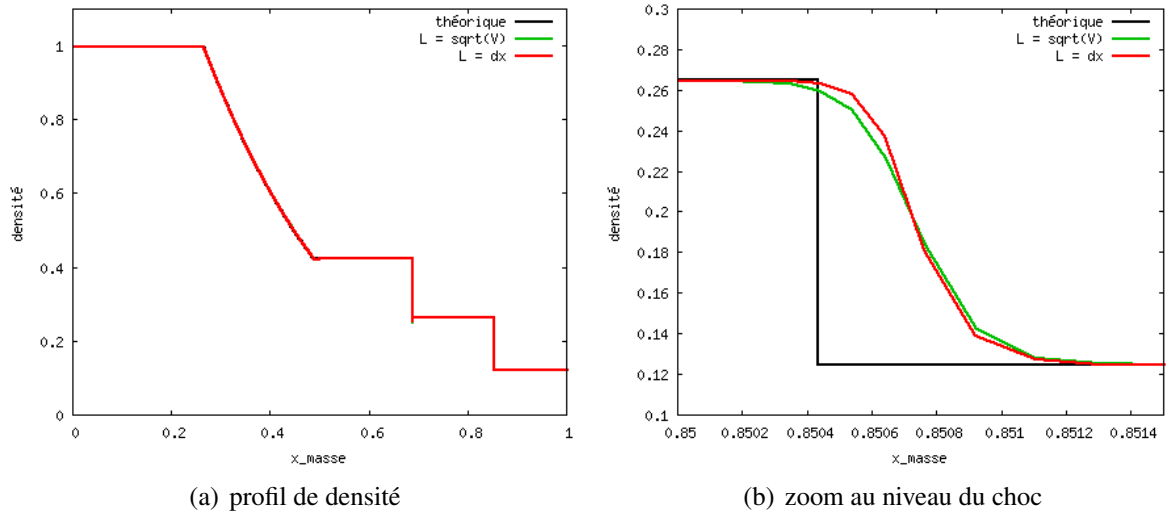


FIG. 6.8 – Densité à t_{final} pour le schéma VNR : influence de la longueur caractéristique.

L'ordonnée de ce maillage ayant été adaptée pour que les mailles soient initialement toujours carrées, les valeurs $\sqrt{V_c}$ et dx_c sont égales à l'instant initial et restent relativement équivalentes au cours du temps. C'est pourquoi, ce paramètre n'influe pas de manière marquée sur la position du choc obtenue par le schéma VNR.

Influence des coefficients de pseudo-viscosité

Nous avons ensuite testé, toujours sur le même maillage, plusieurs coefficients quadratiques a_2 intervenant dans le calcul de la pseudo-viscosité :

- $a_2 = \frac{\gamma+1}{8}$ (coefficient utilisé pour tous les cas tests présentés),
- $a_2 = \frac{\gamma+1}{4}$
- $a_2 = \frac{\gamma+1}{2}$.

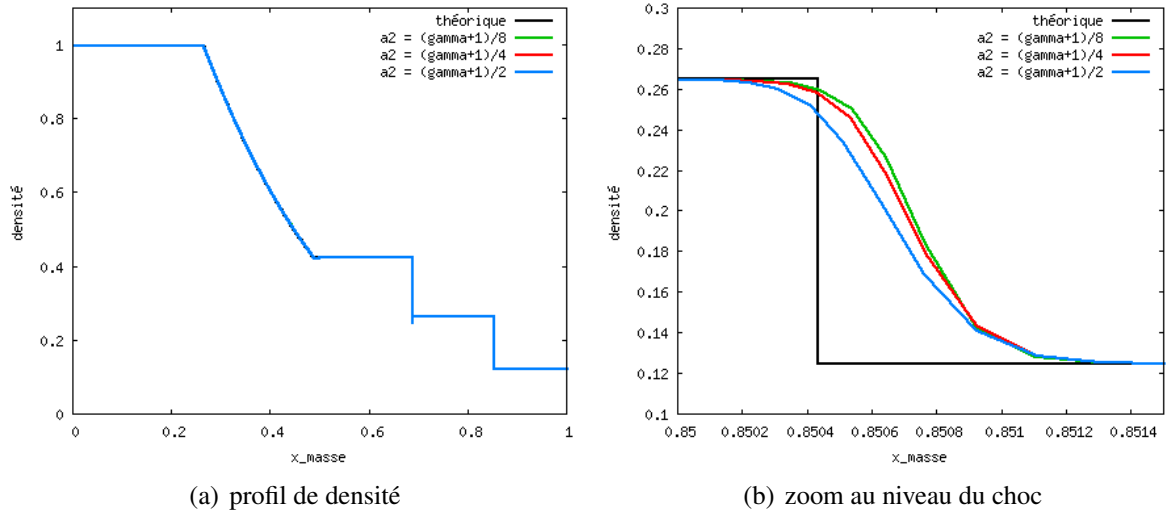


FIG. 6.9 – Densité à t_{final} pour le schéma VNR : influence de a_2 .

Au vu des courbes, la modification du coefficient quadratique joue principalement sur l'étalement du choc et non sur sa position qui reste décalée par rapport à la courbe théorique.

La CFL semble donc être le paramètre déterminant pour obtenir la convergence du schéma VNR vers la bonne solution théorique, surtout au niveau de la position du choc.

Chapitre 7

Compression isentropique de Kidder

Ce cas test, introduit dans [17] modélise une compression isentropique d'un gaz parfait situé dans une coquille en forme d'anneau. Il permet de voir le comportement des schémas sur une solution régulière. Il est également souvent utilisé pour mesurer l'ordre numérique des schémas.

7.1 Description du cas et analyse théorique

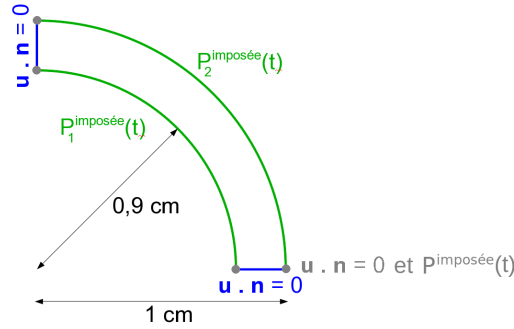


FIG. 7.1 – Cas test de Kidder : conditions aux limites.

Les axes sont toujours affectés d'une condition de mur et une pression est imposée sur les couches internes et externes : $P_1^{\text{imposée}}(t) = P(R(r_1, t), t) = P_1 h(t)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ et $P_2^{\text{imposée}}(t) = P(R(r_2, t), t) = P_2 h(t)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$, suivant la position de la couche externe (intérieure ou extérieure). La variable $R(r, t)$, rayon eulérien, est posée $R(r, t) = rh(t)$, avec r le rayon lagrangien et $h(t)$ le coefficient d'homothétie $h(t) = \sqrt{1 - \frac{t^2}{\tau^2}} \forall t \in [0, \tau]$, où τ est le temps de focalisation.

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0(r) = \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \rho_1^{\gamma-1} + \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \rho_2^{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ g.cm}^{-2}$
pression	$P_0(r) = s(\rho_0(r))^\gamma \text{ barye}$
rayons initiaux	$r_1 = 0.9 \text{ cm}$ et $r_2 = 1 \text{ cm}$
vitesse	$\vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$
γ	2
t_{final}	$0.85\tau \text{ s}$
CFL	0.1
MAILLAGE POLAIRE	
nb_couches	40
nb_secteurs	20

avec $\rho_1 = 10^{-3} \text{ g.cm}^{-2}$, $\rho_2 = 10^{-2} \text{ g.cm}^{-2}$, $p_1 = 0.1 \text{ barye}$, $p_2 = 10 \text{ barye}$, $s = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$ et le temps de focalisation $\tau = \sqrt{\frac{(\gamma-1)(r_2^2 - r_1^2)}{2(c_2^2 - c_1^2)}} = 7.265 \times 10^{-3} \text{ s}$, où c est la vitesse du son.

Ce cas test est particulièrement utilisé pour montrer la stabilité et la robustesse des schémas. Là encore, nous avons pu comparer la solution obtenue à la solution analytique dont voici l'expression :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\text{théo}}(R(r,t),t) &= h(t)^{\frac{-2}{\gamma-1}} \rho_0 \left(\frac{R(r,t)}{h(t)} \right), \\
 P_{\text{théo}}(R(r,t),t) &= h(t)^{\frac{-2\gamma}{\gamma-1}} P_0 \left(\frac{R(r,t)}{h(t)} \right), \\
 e_{\text{théo}}(R(r,t),t) &= \frac{P_{\text{théo}}}{(\gamma-1)\rho_{\text{théo}}}, \\
 \vec{u}_{\text{théo}}(R(r,t),t) &= \frac{dh(t)}{dt} \frac{R(r,t)}{h(t)}.
 \end{aligned}$$

7.2 Résultats

7.2.1 Comparaison des schémas d'ordre 2

Nous avons tracé les profils de densité, pression, énergie, vitesse et du paramètre d'entropie au temps final. Ce paramètre est défini par

$$\alpha_s = \frac{P}{s\rho^\gamma},$$

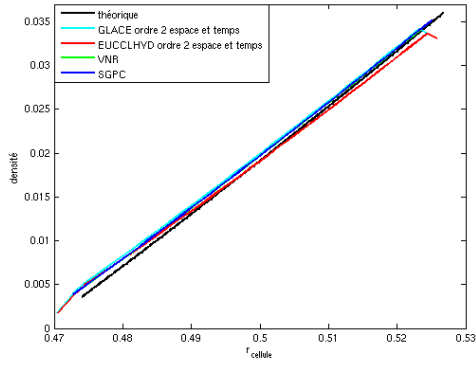
et vaut 1 pour une compression parfaitement isentropique.

Nous avons pris le parti de tracer les grandeurs avec limiteur et avec pseudo-viscosité pour les schémas concernés bien que la solution étant régulière, ces artifices sont inutiles.

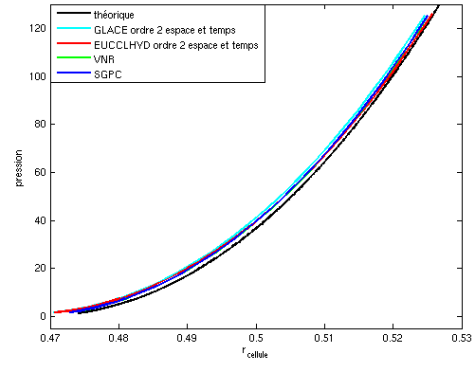
Les courbes sont obtenues par le tracé des grandeurs de toutes les cellules du maillage. Elles permettent donc de vérifier l'absence de dispersion des valeurs au sein d'une couche, et ainsi de

7.2. RÉSULTATS

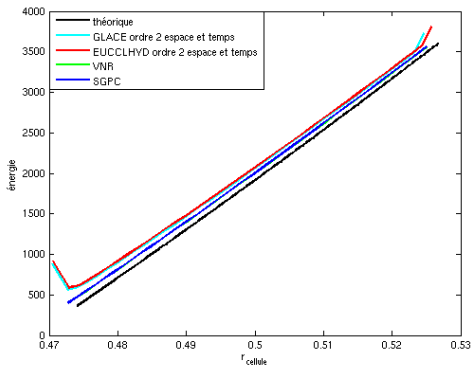
s'assurer de la préservation de la sphéricité et du caractère 1D, propriété vérifiée pour chaque cas test polaire.



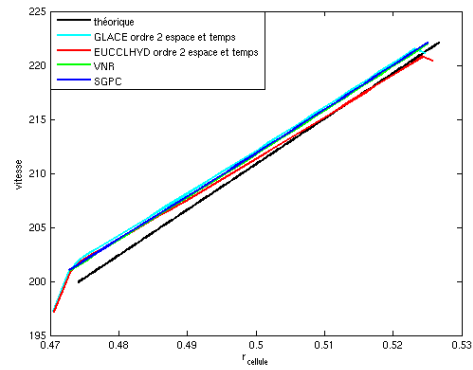
(a) densité



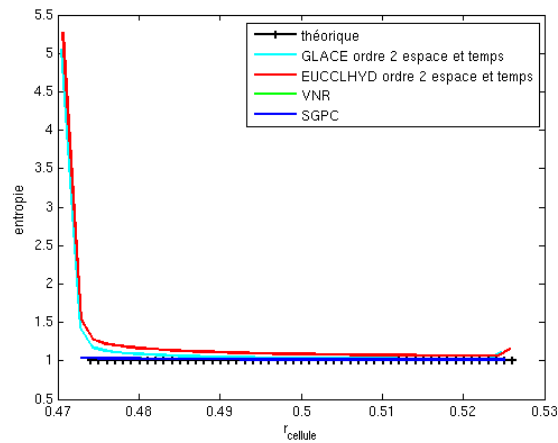
(b) pression



(c) énergie



(d) vitesse



(e) entropie

FIG. 7.2 – Problème de Kidder à $t_{\text{final}} = 0.85$ s.

Les quatre schémas approchent bien les solutions théoriques et la distinction centré/décalé est peu visible. On visualise sur la figure 7.2(e) que le schéma Eucclhyd dépose davantage d'entropie. Il est donc plus dissipatif que le schéma GLACE.

L'anneau au temps final a également été tracé.

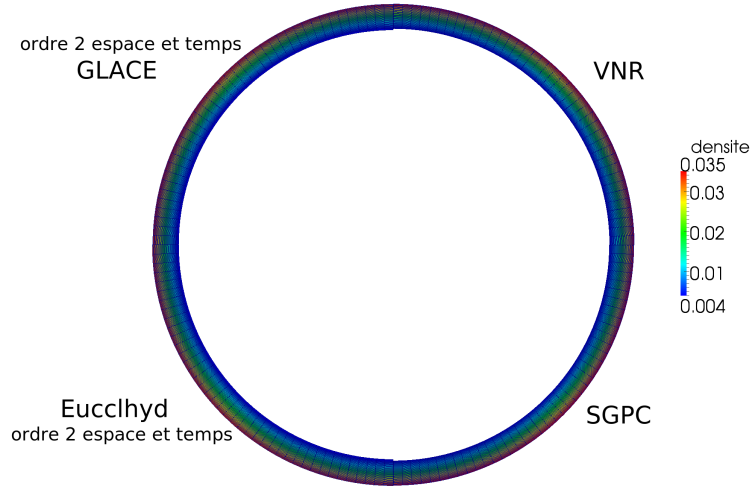


FIG. 7.3 – Densité des quatre schémas d'ordre 2 à t_{final} .

Une différence de compression entre les schémas centrés et décalés est observée. Cette différence se retrouve sur les courbes de profil de la figure 7.2. Pour les schémas centrés, la couche interne atteint le rayon de un rayon de 0.470 cm contrairement aux schémas décalés qui ont une couche interne moins comprimés (0.472 cm). Le rayon théorique de la couche interne au temps final est de $R(r_1, t_{\text{final}}) = r_1 h(t_{\text{final}}) \approx 0.474$. La compression de l'anneau des schémas décalés est donc plus proche de celle théorique.

7.2.2 Ordre numérique des schémas

Ce cas test est également utilisé pour mesurer l'ordre numérique des schémas. Cette ordre numérique a été étudié sur la densité pour tous les schémas d'ordre 1 comme d'ordre 2, avec ou sans pseudo-viscosité, avec ou sans limiteur (cf. TAB. 7.1). Lorsqu'un limiteur est activé, il s'agit de celui de Barth Jespersen.

Pour ce faire, nous avons utilisé différentes normes, absolues et relatives :

$$\begin{aligned}
 \text{Erreur } L_1 \text{ absolue} \quad E_{L_1}^{abs}(\rho) &= \sum_c |\rho_{\text{théo}} - \rho_{\text{exp}}| V_c^0, \\
 \text{Erreur } L_1 \text{ relative} \quad E_{L_1}^{rel}(\rho) &= \frac{\sum_c |\rho_{\text{théo}} - \rho_{\text{exp}}| V_c^0}{\sum_c |\rho_{\text{théo}}| V_c^0}, \\
 \text{Erreur } L_2 \text{ absolue} \quad E_{L_2}^{abs}(\rho) &= \sqrt{\sum_c (\rho_{\text{théo}} - \rho_{\text{exp}})^2 V_c^0}, \\
 \text{Erreur } L_2 \text{ relative} \quad E_{L_2}^{rel}(\rho) &= \frac{\sqrt{\sum_c (\rho_{\text{théo}} - \rho_{\text{exp}})^2 V_c^0}}{\sqrt{\sum_c \rho_{\text{théo}}^2 V_c^0}},
 \end{aligned}$$

7.2. RÉSULTATS

Ces formules sont obtenues en partant de la définition continue de ces différentes normes. L'erreur absolue L_2 (exprimée sur la densité par exemple) est donnée par la formule continue

$$\int_{\Omega_0} (\rho_{\text{théo}}(X, t) - \rho_{\text{exp}}(X, t)) dX$$

où X représente les coordonnées eulériennes. Nous noterons x les coordonnées lagrangiennes. En introduisant le Jaccobien J défini par $J = \det F$ où $dx = F dX$ nous pouvons adapter cette définition de l'erreur absolue L_2 à un maillage discret.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\rho_{\text{théo}}(X, t) - \rho_{\text{exp}}(X, t)) dX &= \int_{\Omega(t)} (\rho_{\text{théo}}(x, t) - \rho_{\text{exp}}(x, t)) \frac{1}{J} dx, \\ &= \sum_c (\rho_{\text{théo}}(x_c, t_{\text{final}}) - \rho_{\text{exp}}(x_c, t_{\text{final}})) \frac{1}{J_c} V_c(t_{\text{final}}). \end{aligned}$$

Or, $J_c = \frac{\rho_c^0}{\rho_c}$ d'après la sous-section 3.1.1 du chapitre 3, où ρ_c^0 représente la densité initiale. Cela fournit donc une expression de l'erreur L_2 absolue en discret

$$\text{Erreur } L_2^{\text{abs}} = \sum_c (\rho_{\text{théo}}(x_c, t_{\text{final}}) - \rho_{\text{exp}}(x_c, t_{\text{final}})) \frac{m_c}{\rho_c^0}.$$

La masse m_c étant conservée au cours du temps, $\frac{m_c}{\rho_c^0} = V_c^0$, où nous avons posé V_c^0 le volume initial de la cellule c . L'erreur devient donc

$$\text{Erreur } L_2^{\text{abs}} = \sum_c (\rho_{\text{théo}}(x_c, t_{\text{final}}) - \rho_{\text{exp}}(x_c, t_{\text{final}})) V_c^0.$$

C'est à partir de cette expression que nous avons pu effectuer les calculs d'ordre numérique des schémas implémentés.

maillages			$E_{L_1}^{\text{abs}}(\rho)$				$E_{L_1}^{\text{rel}}(\rho)$			
			20	40	60	ordre	20	40	60	ordre
Avec pseudo viscosité	VNR	S2 T2	8.43 10 ⁻⁵	4.68 10 ⁻⁵	2.96 10 ⁻⁵	1.31	2.85 10 ⁻²	1.58 10 ⁻²	1.00 10 ⁻²	1.31
	SGPC	S2 T2	9.01 10 ⁻⁵	4.59 10 ⁻⁵	3.17 10 ⁻⁵	1.21	3.05 10 ⁻²	1.55 10 ⁻²	1.07 10 ⁻²	1.21
Sans pseudo-viscosité	VNR	S2 T2	1.68 10 ⁻⁵	4.83 10 ⁻⁶	2.18 10 ⁻⁶	2.45	5.68 10 ⁻³	1.63 10 ⁻³	7.40 10 ⁻⁴	2.45
	SGPC	S2 T2	1.80 10 ⁻⁵	3.35 10 ⁻⁶	1.61 10 ⁻⁶	2.65	6.08 10 ⁻³	1.13 10 ⁻³	5.43 10 ⁻⁴	2.65
Avec Limiteur	GLACE	S2 T1	2.37 10 ⁻⁴	6.48 10 ⁻⁵	3.13 10 ⁻⁵	2.36	8.01 10 ⁻²	2.19 10 ⁻²	1.06 10 ⁻²	2.36
		S2 T2	2.80 10 ⁻⁴	8.97 10 ⁻⁵	4.84 10 ⁻⁵	2.03	9.48 10 ⁻²	3.04 10 ⁻²	1.64 10 ⁻²	2.03
	EUCCLHYD	S2 T1	3.32 10 ⁻⁴	1.19 10 ⁻⁴	6.89 10 ⁻⁵	1.81	1.12 10 ⁻¹	4.04 10 ⁻²	2.33 10 ⁻²	1.81
		S2 T2	3.73 10 ⁻⁴	1.44 10 ⁻⁴	8.56 10 ⁻⁵	1.70	1.26 10 ⁻¹	4.85 10 ⁻²	2.90 10 ⁻²	1.70
Sans Limiteur	GLACE	S1 T1	5.53 10 ⁻⁴	3.11 10 ⁻⁴	2.18 10 ⁻⁴	1.11	1.87 10 ⁻¹	1.05 10 ⁻¹	7.36 10 ⁻²	1.11
		S2 T1	1.93 10 ⁻⁴	5.33 10 ⁻⁵	2.50 10 ⁻⁵	2.41	6.53 10 ⁻²	1.80 10 ⁻²	8.445 10 ⁻³	2.41
		S1 T2	5.87 10 ⁻⁴	1.31 10 ⁻⁴	2.32 10 ⁻⁴	1.11	1.99 10 ⁻¹	1.12 10 ⁻¹	7.85 10 ⁻²	1.11
		S2 T2	2.35 10 ⁻⁴	7.73 10 ⁻⁵	4.16 10 ⁻⁵	2.01	7.96 10 ⁻²	2.62 10 ⁻²	1.41 10 ⁻²	2.02
	EUCCLHYD	S1 T1	6.22 10 ⁻⁴	3.53 10 ⁻⁴	2.48 10 ⁻⁴	1.10	2.11 10 ⁻¹	1.19 10 ⁻¹	8.39 10 ⁻²	1.10
		S2 T1	2.89 10 ⁻⁴	1.07 10 ⁻⁴	6.23 10 ⁻⁵	1.78	9.79 10 ⁻²	3.63 10 ⁻²	2.11 10 ⁻²	1.78
		S1 T2	6.55 10 ⁻⁴	3.73 10 ⁻⁴	2.62 10 ⁻⁴	1.09	2.22 10 ⁻¹	1.26 10 ⁻¹	8.87 10 ⁻²	1.09
		S2 T2	3.31 10 ⁻⁴	1.31 10 ⁻⁴	7.86 10 ⁻⁵	1.66	1.12 10 ⁻¹	4.42 10 ⁻²	2.66 10 ⁻²	1.67

TAB. 7.1 – Erreurs L_1 .

maillages			$E_{L_2}^{abs}(\rho)$				$E_{L_2}^{rel}(\rho)$			
			20	40	60	ordre	20	40	60	ordre
Avec pseudo-viscosité	VNR	S2 T2	2.28 10 ⁻⁴	1.26 10 ⁻⁴	7.97 10 ⁻⁵	0.99	2.70 10 ⁻²	1.49 10 ⁻²	9.41 10 ⁻³	0.99
	SGPC	S2 T2	2.45 10 ⁻⁴	1.24 10 ⁻⁴	8.53 10 ⁻⁵	0.95	2.89 10 ⁻²	1.46 10 ⁻²	1.01 10 ⁻²	0.95
Sans pseudo-viscosité	VNR	S2 T2	5.78 10 ⁻⁵	1.57 10 ⁻⁵	7.05 10 ⁻⁶	1.93	6.83 10 ⁻³	1.85 10 ⁻³	8.32 10 ⁻⁴	1.93
	SGPC	S2 T2	6.02 10 ⁻⁵	1.18 10 ⁻⁵	5.12 10 ⁻⁶	2.20	7.12 10 ⁻³	1.39 10 ⁻³	6.05 10 ⁻⁴	2.20
Avec Limiteur	GLACE	S2 T1	6.55 10 ⁻⁴	2.20 10 ⁻⁴	1.24 10 ⁻⁴	1.49	7.74 10 ⁻²	2.60 10 ⁻²	1.47 10 ⁻²	1.49
		S2 T2	7.58 10 ⁻⁴	2.70 10 ⁻⁴	1.65 10 ⁻⁴	1.43	8.96 10 ⁻²	3.19 10 ⁻²	1.83 10 ⁻²	1.43
	EUCCLHYD	S2 T1	8.92 10 ⁻⁴	3.41 10 ⁻⁴	2.03 10 ⁻⁴	1.33	1.05 10 ⁻¹	4.02 10 ⁻²	2.40 10 ⁻²	1.33
		S2 T2	9.96 10 ⁻⁴	3.98 10 ⁻⁴	2.42 10 ⁻⁴	1.28	1.18 10 ⁻¹	4.70 10 ⁻²	2.86 10 ⁻²	1.28
Sans Limiteur	GLACE	S1 T1	1.43 10 ⁻³	8.08 10 ⁻⁴	5.68 10 ⁻⁴	0.85	1.69 10 ⁻¹	9.54 10 ⁻²	6.70 10 ⁻²	0.85
		S2 T1	5.12 10 ⁻⁴	1.41 10 ⁻⁴	6.71 10 ⁻⁵	1.85	6.05 10 ⁻²	1.67 10 ⁻²	7.92 10 ⁻³	1.85
		S1 T2	1.52 10 ⁻³	8.58 10 ⁻⁴	6.03 10 ⁻⁴	0.85	1.80 10 ⁻¹	1.01 10 ⁻¹	7.13 10 ⁻²	0.85
		S2 T2	6.25 10 ⁻⁴	2.02 10 ⁻⁴	1.09 10 ⁻⁴	1.57	7.39 10 ⁻²	2.39 10 ⁻²	1.29 10 ⁻²	1.57
	EUCCLHYD	S1 T1	1.62 10 ⁻³	9.15 10 ⁻⁴	6.43 10 ⁻⁴	0.84	1.91 10 ⁻¹	1.08 10 ⁻¹	7.60 10 ⁻²	0.85
		S2 T1	7.75 10 ⁻⁴	2.86 10 ⁻⁴	1.68 10 ⁻⁴	1.38	9.16 10 ⁻²	3.38 10 ⁻²	1.98 10 ⁻²	1.38
		S1 T2	1.70 10 ⁻³	9.65 10 ⁻⁴	6.79 10 ⁻⁴	0.84	2.01 10 ⁻¹	1.14 10 ⁻¹	8.02 10 ⁻²	0.84
		S2 T2	8.84 10 ⁻⁴	3.48 10 ⁻⁴	2.10 10 ⁻⁴	1.29	1.04 10 ⁻¹	4.11 10 ⁻²	2.48 10 ⁻²	1.30

TAB. 7.2 – Erreurs L_2 .

Notation :

S1 : ordre 1 en espace

S2 : ordre 2 en espace

T1 : ordre 1 en temps

T2 : ordre 2 en temps.

La norme L_2 est habituellement utilisée pour les solutions régulières tandis que la norme L_1 est quant à elle utilisée pour les solutions présentant un choc. On vérifie, avec les tableaux, que l'ordre numérique d'un schéma ne dépend pas du caractère relatif ou absolu de l'erreur. Dans le cas du cas test de Kidder, la solution étant régulière, nous avons tracé les courbes d'ordre avec les erreurs $E_{L_2}^{abs}(\rho)$ avec pseudo-viscosité et limiteur.

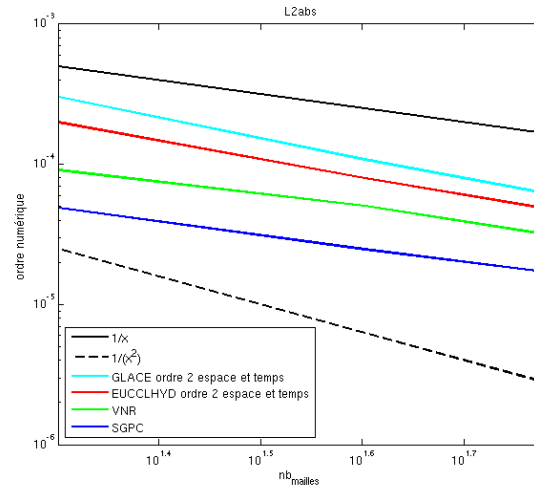


FIG. 7.4 – Problème de Kidder : ordre numérique des schémas.

On remarque que les schémas décalés ont bien un ordre numérique très proche de 2 sans pseudo-

7.2. RÉSULTATS

viscosité. Cependant, le critère d'allumage de la pseudo-viscosité provoque une chute à l'ordre 1. L'ordre du schéma SGPC est meilleur que celui du schéma VNR. Or, lors du calcul de l'ordre théorique du schéma VNR, la propriété Δt constant est utilisée ce qui n'est pas le cas dans la simulation numérique. SGPC est peut-être moins sensible à cette propriété, ce qui pourrait expliquer la différence avec le schéma VNR. Sur les schémas centrés, la différence, sur les schémas GLACE et EUCCLHYD, entre l'ordre numérique obtenu et l'ordre théorique égal à 2 (en espace et en temps) peut s'expliquer par le fait que la condition aux limites de type $P^{\text{imposée}}$ ne serait pas d'ordre 2. Nous obtenons des résultats similaires à ceux de l'article [2] ; de meilleurs ordres numériques sont obtenus dans l'article [8] où la pression analytique est réimposée dans la première couche [6].

Remarque : Théoriquement la pseudo-viscosité ne devrait s'allumer qu'en zone de choc, néanmoins, de part sa définition et son critère d'activation, équation (3.12), celle-ci s'allume en zone de compression. On observe donc une pseudo-viscosité non nulle sur le cas test de Kidder. Voici quelques résultats qui montrent son influence (toutes les courbes sont tracées avec le schéma VNR mais les mêmes conclusions ont été obtenues sur le schéma SGPC).

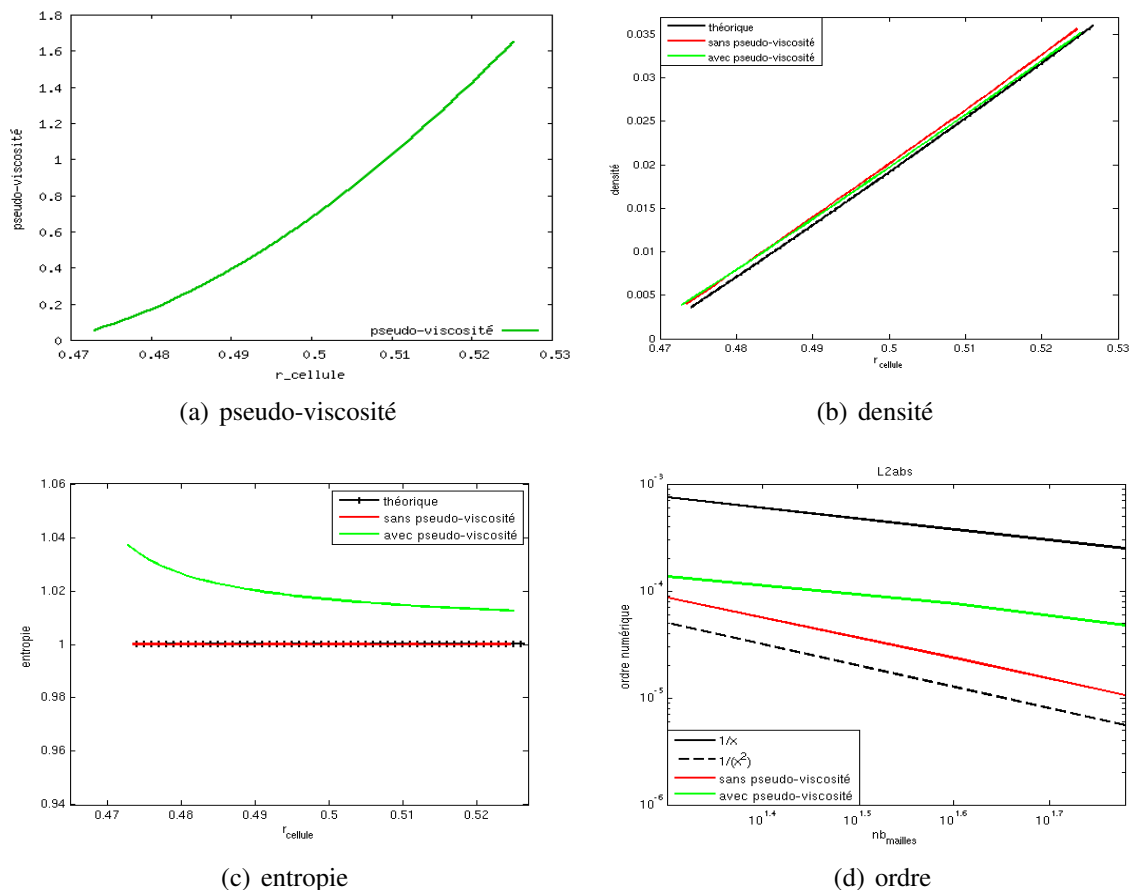


FIG. 7.5 – Problème de Kidder : influence de la pseudo-viscosité sur le schéma VNR.

Sur la figure 7.5(b), on constate que l'effet de la pseudo-viscosité sur la solution numérique de

la densité reste limité. Il en est de même pour la pression, la vitesse et l'énergie. En revanche, l'effet de la pseudo-viscosité se fait ressentir sur le paramètre d'entropie (7.5(c)) ce qui était attendu. En effet, d'après l'équation (3.17), le schéma est bien isentropique en l'absence de pseudo-viscosité. L'absence de pseudo-viscosité permet également d'obtenir un meilleur ordre numérique pour ce schéma, plus proche de 2 (ordre théorique) (voir 7.5(d)).

Les résultats avec et sans limiteurs sont quasiment superposés hormis aux bords (7.6(a)) sur le profil de densité. Le paramètre d'entropie est quant à lui modifié (7.6(b)) tout comme l'ordre numérique du schéma (7.6(c)). L'utilisation du limiteur provoque le retour à certains endroits à un ordre inférieur à 2.

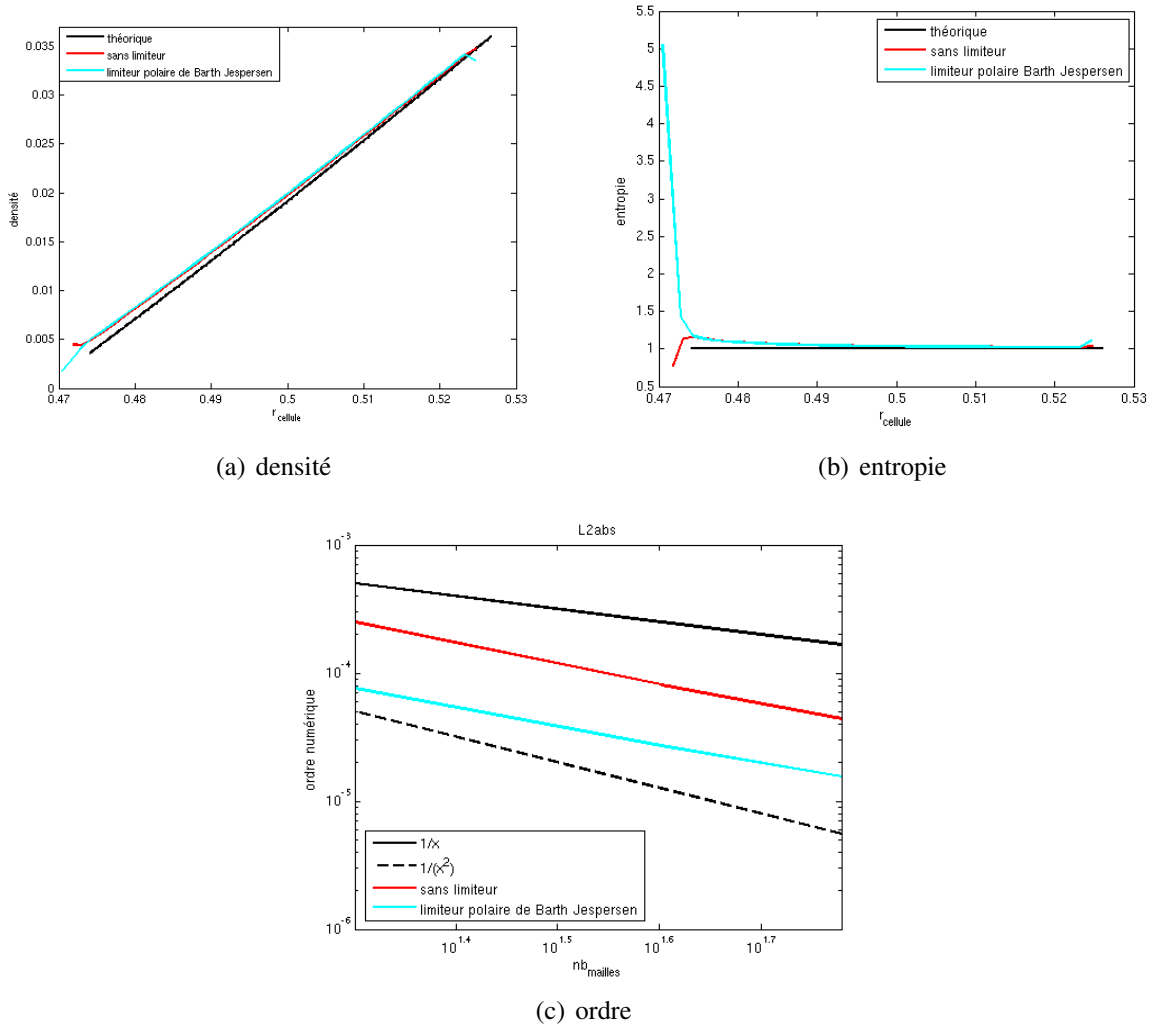


FIG. 7.6 – Problème de Kidder : influence du limiteur sur le schéma GLACE ordre 2 espace et temps.

Chapitre 8

Problème de Noh

Le problème de Noh, introduit dans [26], a été mis en place afin de tester la capacité des schémas à simuler un choc divergent.

8.1 Description du cas et analyse théorique

À l'instant $t = 0$ s, on considère un quart de disque rempli d'un gaz parfait de coefficient polytropique γ et de densité ρ_0 . Ce gaz est animé d'une vitesse centripète égale à 1 cm.s^{-1} . Une onde de choc divergente prend alors naissance à l'origine du quart de disque (point de convergence du champ de vitesse).

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-2}$
pression	$P_0 = 1 \text{ barye}$
vitesse	$\vec{u} = -\vec{e}_r \text{ cm.s}^{-1}$
γ	$5/3$
t_{final}	0.6 s
CFL	0.1
MAILLAGE POLAIRE	
nb_couches	40
nb_secteurs	20

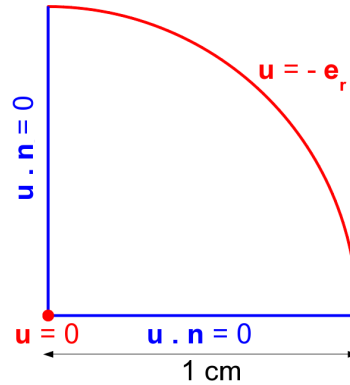


FIG. 8.1 – Cas test de Noh : conditions aux limites.

Nous avons testé ce cas en géométrie cylindrique. Les conditions aux limites sont de type mur sur les axes. La couche externe est affectée d'une condition limite en vitesse (vitesse radiale centripète de module 1).

Un des intérêt de ce cas test est qu'il possède une solution analytique. Au temps final t_{final} , le rayon du choc atteint la valeur $r_c = 0.2 \text{ cm}$ et la solution théorique à cet instant est :

$$\rho_{\text{théo}} = \begin{cases} 16 & \text{si } r < r_c, \\ (1 + \frac{3}{5r}) & \text{si } r \geq r_c, \end{cases}$$

$$e_{\text{théo}} = 0.5 \mathbf{1}_{r < r_c},$$

$$P_{\text{théo}} = (\gamma - 1) \rho_{\text{théo}} e_{\text{théo}},$$

$$\vec{u}_{\text{théo}} = \mathbf{1}_{r \geq r_c} \vec{e}_r.$$

Les choix effectués sur les limiteurs directionnels, sur les coefficients de pseudo-viscosité *etc* ont été rappelés au début de la troisième partie.

8.2 Résultats

Les figures suivantes illustrent les résultats obtenus pour ce cas test.

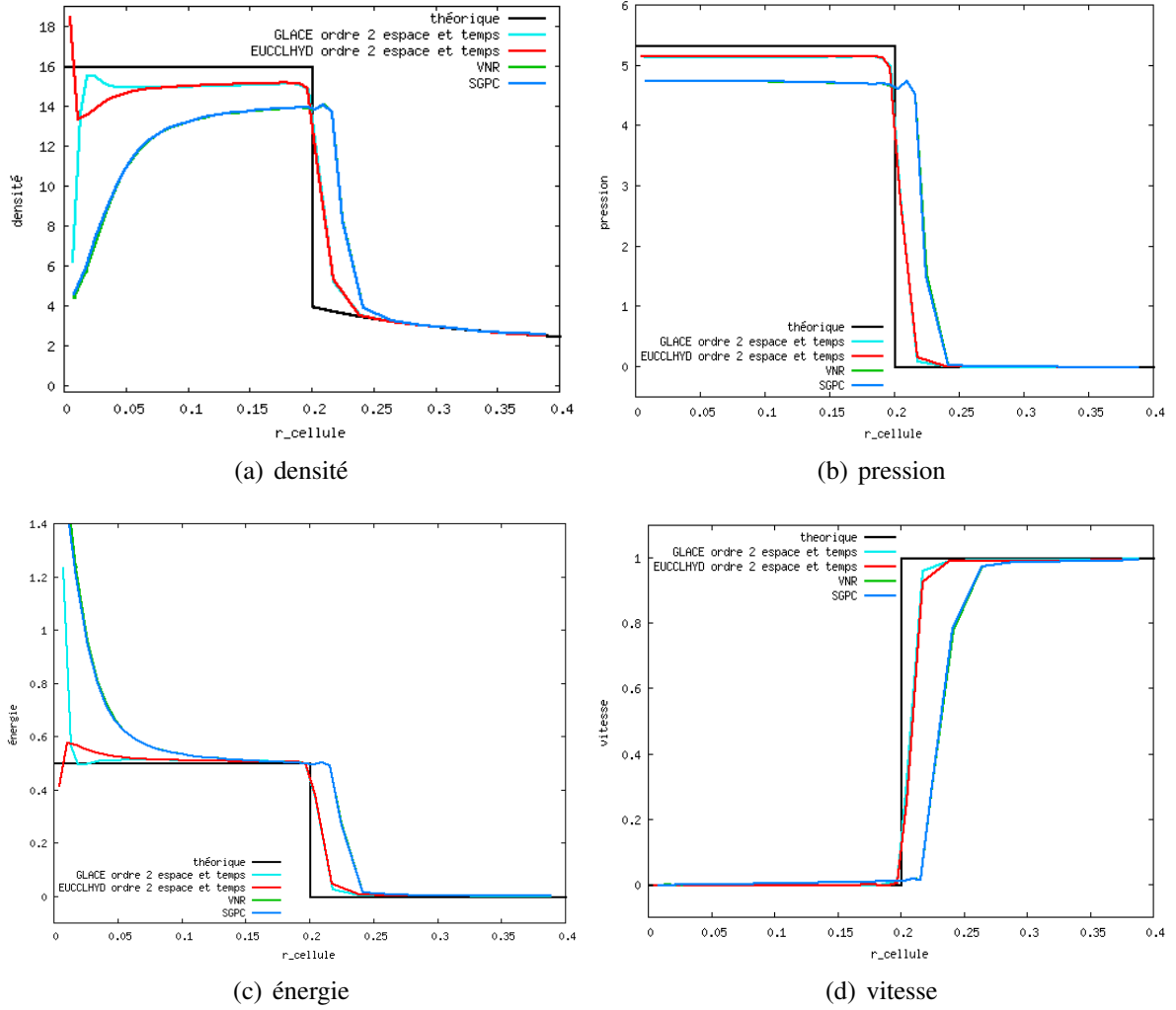


FIG. 8.2 – Problème de Noh à $t_{\text{final}} = 0.6$ s.

8.2. RÉSULTATS

La première remarque qui apparaît est la forte influence du caractère centré ou décalé qui vient ainsi créer deux groupes de schémas. En effet, on observe peu de différences entre les schémas d'un même groupe, en revanche, la distinction des groupes est très nette. Les plateaux de pression et densité sont mieux approchés par les schémas centrés (GLACE et EUCCLHYD) ainsi que la position du choc. La sphéricité et le caractère 1D sont bien préservés (pour plus de détails voir la section 7.2.1). Enfin, on observe le phénomène de "Wall-heating" avec tous les schémas exceptés sur le schéma Eucclhyd qui présente donc un défaut à l'origine. Le phénomène usuel de "Wall-heating" peut être retrouvé sur ce schéma par un traitement particulier au niveau des triangles (afin d'éviter leur dégénérescence) qui n'a pas été mis en place ici.

Nous avons synthétisé les résultats de densité et de maillage au temps final, chaque quart de disque représentant un schéma.

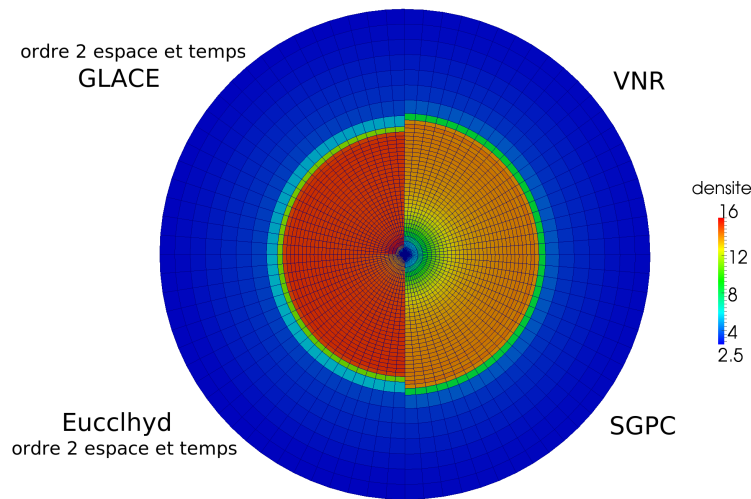


FIG. 8.3 – Densité des quatre schémas d'ordre 2 à t_{final} .

Les conclusions sont identiques à celles précédentes (voir figure 8.2), à savoir, la forte distinction, en raison du décalage temporel, entre les schémas centrés et décalés.

Chapitre 9

Problème de Sedov

Ce cas test, présenté dans [16], modélise la propagation d'une onde de choc associée à un fort dépôt d'énergie dans un volume restreint .

9.1 Description du cas et analyse théorique

À l'instant $t = 0$ s, un quart de disque est rempli d'un gaz parfait d'indice polytropique γ . Les conditions initiales du gaz sont les suivantes :

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-2}$
pression	$P_0 = 10^{-5}$ barye
vitesse	$\vec{u} = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$
énergie	$\mathcal{E}_0 = 0.05$ erg
γ	$5/3$
t_{final}	0.1 s
CFL	0.1
MAILLAGE POLAIRE	
nb_couches	40
nb_secteurs	20

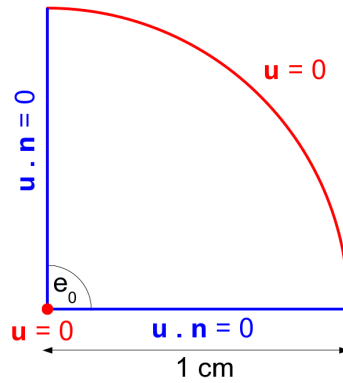


FIG. 9.1 – Cas test de Sedov : conditions aux limites.

Les conditions aux limites sont de type mur sur les axes et vitesse nulle à l'origine et sur la couche externe.

Une forte énergie e_0 est déposée dans chaque maille de la première couche et la pression dans ces mailles est recalculée selon la formule $P = (\gamma - 1)\rho_0 e_0 = (\gamma - 1)\rho \frac{\mathcal{E}_0}{V_0}$ où V_0 représente le volume à l'origine. Le dépôt d'énergie provoque la création d'une onde de choc divergente. La

valeur du pic de densité qui en découle est donnée par la formule $\rho^* = \rho_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ qui vaut 4 pour les valeurs initiales choisies.

Un programme en Fortran [15], nous a fournit une solution pseudo-exacte. L'énergie *eblast* du programme représente la totalité de l'énergie déposée au centre d'un disque, ce qui correspond pour le maillage étudié à 4×40 mailles ; soit $0.05 \times 4 \times 40 = 8 \text{ erg}$

9.2 Résultats

Les profils de densité, pression, énergie et vitesse au temps final pour chacun des schémas d'ordre deux en espace et en temps en fonction du rayon sont présentés ci-dessous.

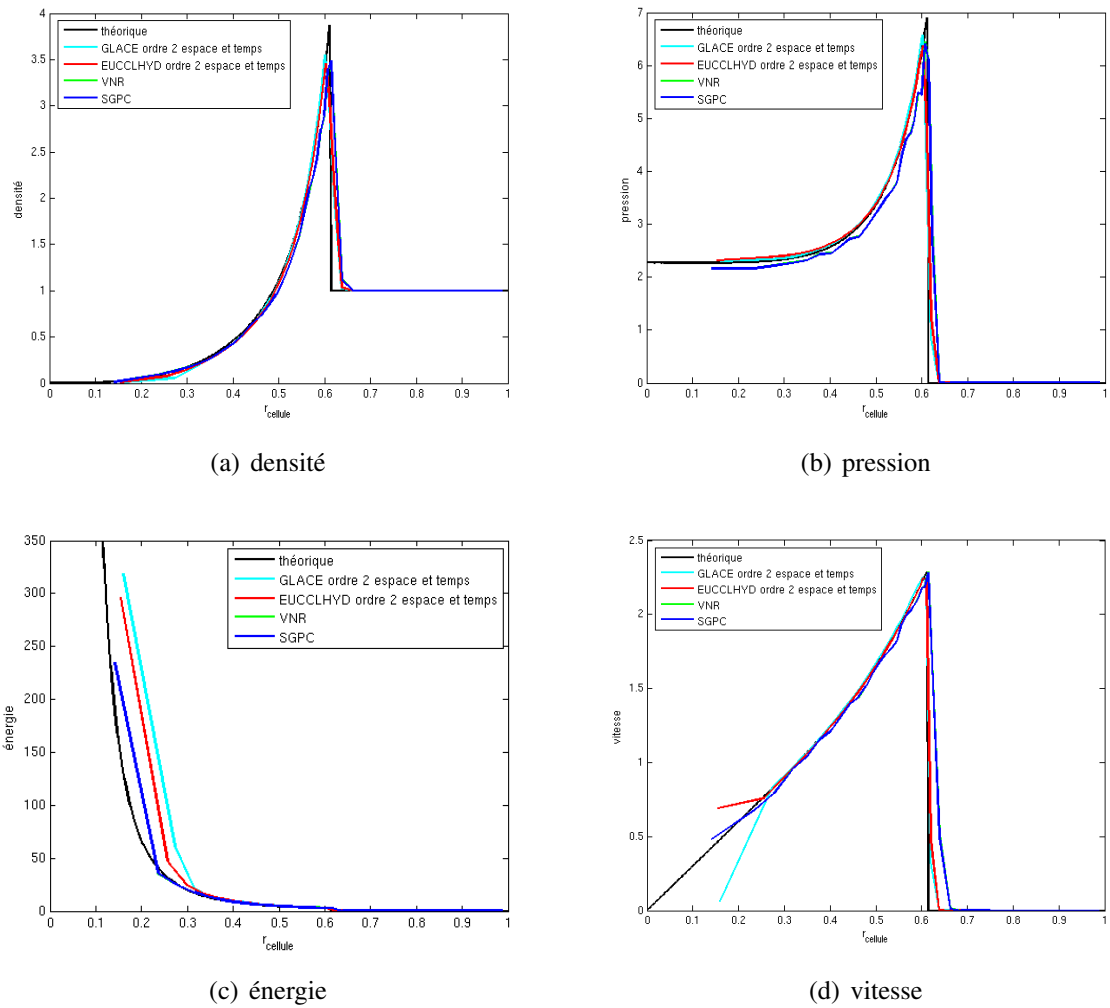


FIG. 9.2 – Problème de Sedov à $t_{\text{final}} = 0.1$ s.

Il convient tout d'abord de constater que, quel que soit le schéma, la valeur 4 du pic théorique de densité n'est pas respectée. La légère différence de hauteur de ce pic entre GLACE et EUCCLHYD est due au caractère plus dissipatif du schéma EUCCLHYD (Voir la figure 7.2(e) du

9.2. RÉSULTATS

cas test Kidder). On remarque finalement un léger décalage temporel, sur toutes les grandeurs, entre les schémas centrés d'une part (GLACE et EUCCLHYD) et les schémas décalés d'autre part (VNR, SGPC). Là encore, la sphéricité est conservée (Voir la section 7.2.1).

Nous avons enfin tracé la densité et le maillage au temps final.

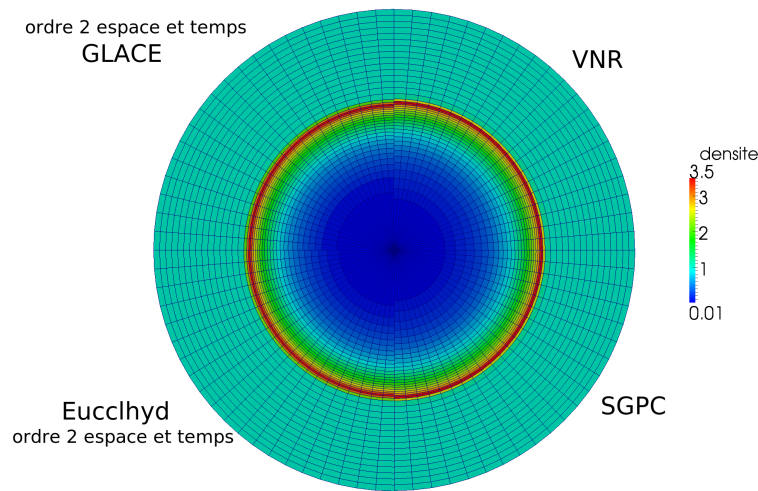


FIG. 9.3 – Densité des quatre schémas d'ordre 2 à t_{final} .

Influence de la pseudo-viscosité

Sur la figure 9.2, on constate la présence d'oscillations pour les schémas décalés. Celles-ci sont dues à des erreurs numériques. Les schémas GLACE et EUCCLHYD dissipant partout (en compression comme en détente) élimine cette erreur. En revanche, pour les schémas décalés, la pseudo-viscosité n'est déposée qu'en zone de compression et ne permet donc pas de lisser cette erreur. Nous avons donc testé ce même cas test en appliquant une pseudo-viscosité partout même en détente, il n'y a donc plus de critère d'activation (courbe rouge sur la figure 9.4). On constate, toujours sur la figure 9.4, que ceci permet bien de limiter les oscillations. De plus, l'élimination de ce problème permet également de mieux capter la hauteur du pic de densité ainsi que sa position. La position du pic de vitesse est également mieux capturer.

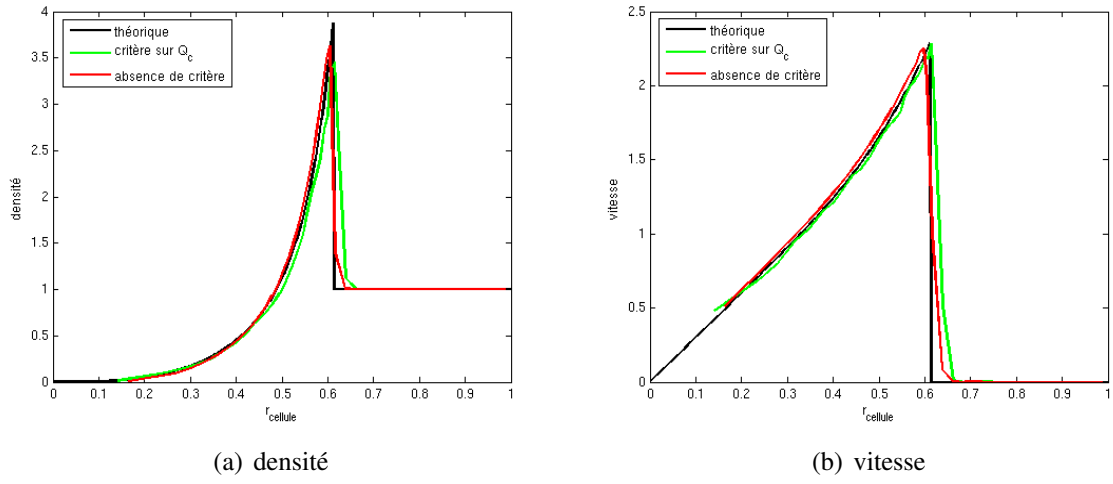


FIG. 9.4 – Problème de Sedov à t_{final} : influence du critère d'activation de la pseudo-viscosité

Chapitre 10

Problème de Saltzmann

Le problème de Saltzmann [13] est utilisé pour évaluer la robustesse des schémas numériques lagrangiens. Ce cas test à effets numériques bidimensionnels nous a également permis de voir le comportement des schémas sur un maillage non structuré.

10.1 Description du cas et analyse théorique

Ce test, comme expliqué dans [13], modélise l'avancée d'un piston dans un gaz parfait d'indice polytropique γ , créant ainsi une très forte onde de choc se propageant de la gauche vers la droite. Le maillage initial est un maillage cartésien rectangulaire composé de 100×10 mailles auquel on fait subir la déformation bidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} x = x_{\text{init}} + (0.1 - y_{\text{init}})\sin(\pi x_{\text{init}}), \\ y = y_{\text{init}}. \end{cases}$$

Le maillage de ce cas test est donc le suivant :

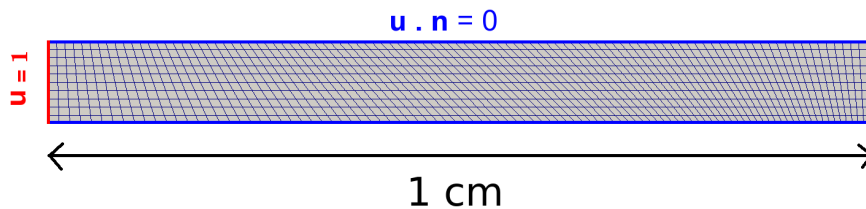


FIG. 10.1 – Maillage initial de Saltzmann.

Afin de modéliser le piston, une vitesse horizontale de module 1 est appliquée sur la condition $x = 0$, les autres bords ayant des conditions aux limites de type mur.

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-2}$
énergie	$e_0 = 10^{-6} \text{ cm}^2.\text{s}^{-2}$
pression	$P_0 = (\gamma_0 - 1)\rho_0 e_0 \frac{2}{3} 10^{-6} \text{ baryes}$
vitesse	0 cm.s^{-1}
γ	$5/3$
t_{final}	0.75 s
CFL	0.1
MAILLAGE CARTESIEN	
nb_cellules horizontales	100
nb_cellules verticales	10

Le choc se déplace à une vitesse de $\frac{4}{3} \text{ cm.s}^{-1}$ et atteint théoriquement l'extrémité droite du tube au temps $t_{\text{final}} = 0.75 \text{ s}$. À ce même temps, la densité théorique est de 4 g.cm^{-2} derrière le choc.

10.2 Résultats

La figure suivante représente la carte de densité obtenue, au temps t_{final} , pour les différents schémas implémentés.

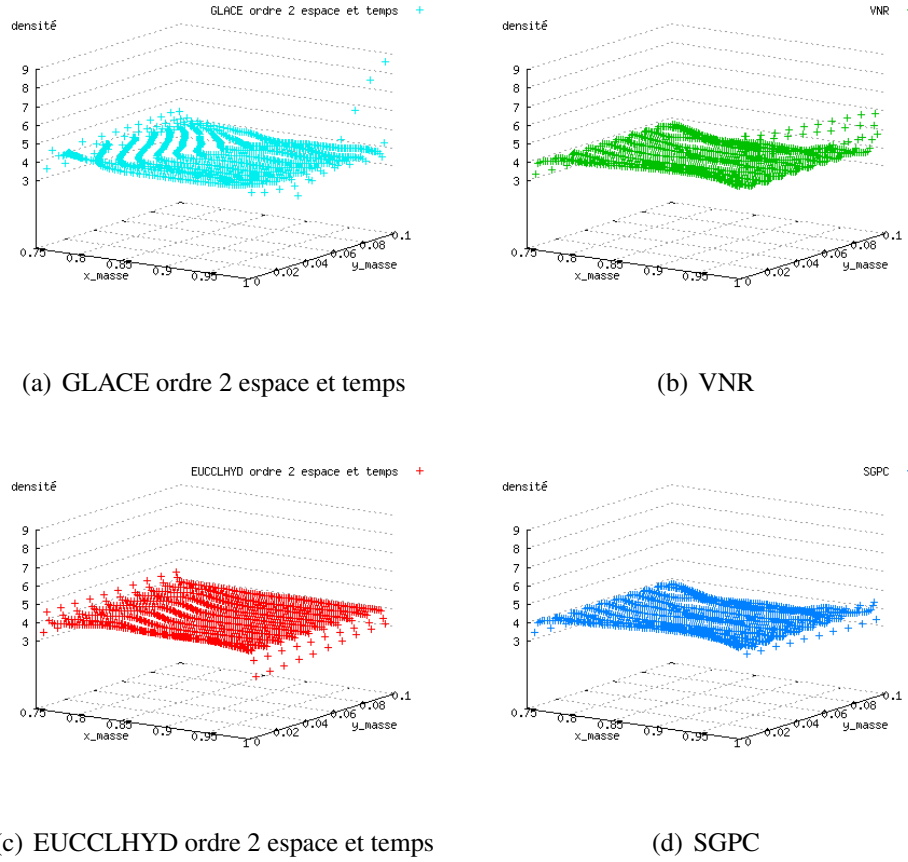
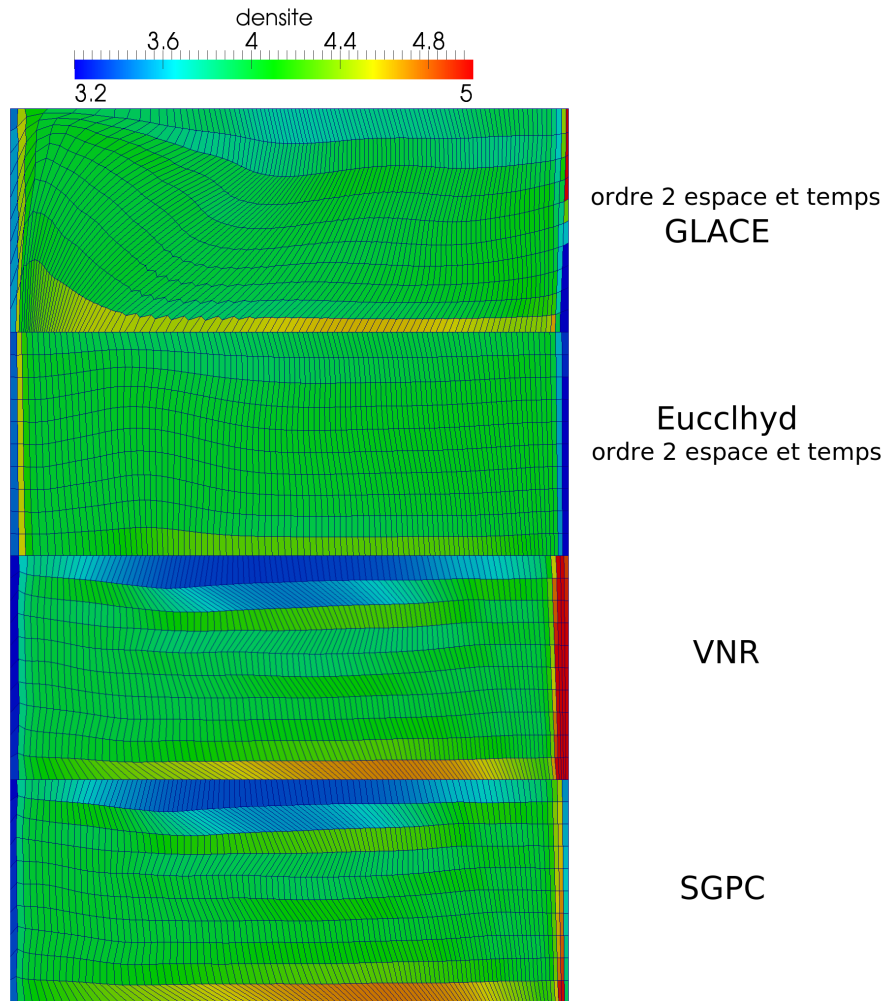


FIG. 10.2 – Carte de la densité au temps final $t_{\text{final}} = 0.75$ s.

La principale différence que l'on peut observer entre les schémas est la vitesse de déplacement du choc. En effet, la densité est plus faible sur le schéma EUCCLHYD au niveau du bord $x = 1$ puisque le choc n'a pas encore tout à fait atteint ce bord. Par contre, les fortes densités du schéma GLACE à l'ordre 2 en espace et en temps et du schéma VNR s'expliquent par un rebond du choc. Le temps final semble mieux correspondre à l'instant où le choc atteint le mur droit pour le schéma SGPC.

De plus, pour tous les schémas, on observe bien une densité de 4 g.cm^{-2} juste derrière le choc.

Ces résultats se retrouvent sur les maillages finaux (cf figure 10.3), sur lesquels nous pouvons retrouver le rebond du choc sur les schémas VNR et GLACE ordre 2 espace et temps, modélisé par une densité plus forte.

FIG. 10.3 – Maillages au temps final $t_{\text{final}} = 0.75$ s.

On observe, sur la figure 10.3, l'apparition de cisaillements pour les schémas VNR et SGPC. Ils correspondent au développement de modes parasites. Il est indispensable sur ce cas test d'utiliser un mécanisme de contrôle de ces modes parasites, par exemple de l'anti-dérive. Ceci n'a pas été implémentée ici.

Le maillage associé au schéma GLACE apparaît fort déformé à l'ordre 2 comme à l'ordre 1. Ce schéma est également sensible aux modes parasites. Un mécanisme de stabilisation a été mis en place par B.Després et E.Labourasse [10]

Le schéma EUCCLHYD semble, quant à lui, être bien adapté en ce qui concerne la déformation du maillage. Néanmoins, on observe un retard de chronométrie sur ce schéma.

Chapitre 11

Choc Oblique

Le dernier cas test utilisé, dont la solution théorique nous a été fournie par D. Herbez [14], est celui d'un choc s'impactant sur un mur oblique. Ce cas est intéressant puisqu'il permet d'étudier le comportement des schémas face à un test à effets physiques bidimensionnels.

11.1 Description du cas et analyse théorique

Ce cas test consiste à étudier un choc arrivant de la gauche sur un plan incliné de 45 degrés par rapport à l'horizontal. Nous avons utilisé un maillage de type cartésien courbé en haut à droite à l'aide d'un arc de cercle afin de limiter le jet (instabilité de Richtmyer-Meshkov) formé à l'arrivée du choc sur cette partie du maillage.

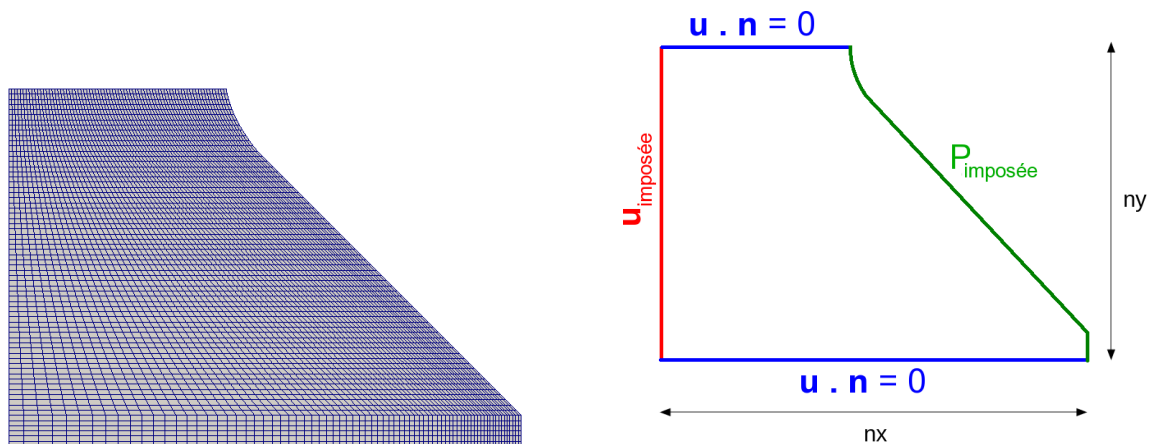


FIG. 11.1 – Maillage initial du Choc Oblique.

Les conditions aux bords sont de type mur sur les axes horizontaux ; le bord gauche est soumis à une vitesse horizontale $\vec{u}_{\text{imposée}}$ afin de modéliser le piston. Le bord oblique est libre. Néanmoins, nous avons imposé sur ce bord la même pression que la pression interne initiale, afin d'éviter une détente.

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 16.654 \text{ g.cm}^{-2}$
énergie	$e_0 = 10^{-6} \text{ cm}^2.\text{s}^{-2}$
pression	$P_0 = 1. 10^6 \text{ baryes}$
vitesse	0 cm.s^{-1}
γ	1.67
t_{final}	$6.6 10^{-6} \text{ s}$
CFL	0.34
$u_{\text{imposée}}$	$45490.4356301 \text{ m.s}^{-1}$
$P_{\text{imposée}}$	0 m.s^{-1}

Nous avons testé les schémas sur plusieurs maillages, plus ou moins raffinés ($n_x = 76$ et $n_y = 69$ ou $n_x = 304$ et $n_y = 273$).

Solution analytique

Au temps final, le bord oblique possède deux inclinaisons marquées, une première de 51.9857 degrés qui correspond à une zone atteinte par le choc, et une seconde d'inclinaison 45 degrés, zone non affectée par le choc au cours du temps.

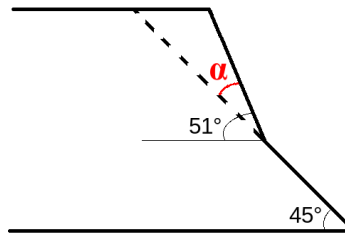


FIG. 11.2 – α théorique.

La solution analytique connue [14] est la courbe représentant la différence d'inclinaisons (variable α) de ce bord entre le temps final et l'angle initial de 45 degrés en fonction de l'abscisse des points du bord. Cette courbe présente donc deux plateaux : un à $\alpha_{\text{théo}} = 6.9857$ degrés et un à 0 degrés.

Coefficients de pseudo-viscosité

Contrairement à ce qui a été utilisé dans les différents cas tests précédents, et pour être plus adaptés au matériau solide, les coefficients de pseudo-viscosité sont pris égaux à :

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.15, \\a_2 &= 1.5.\end{aligned}$$

Ces coefficients ont été modifiés par rapport à ceux adoptés pour les autres cas tests, afin de prendre en compte le mauvais rapport d'aspect des mailles et correspondre ainsi à un coefficient linéaire d'ordre 0.5 dans la direction du choc.

Loi d'état

Pour ce cas test, la loi d'état considérée n'est pas une loi de gaz parfait comme utilisée jusqu'à présent, mais une loi de type Mie-Grüneisen (cf annexe D).

11.2 Résultats

11.2.1 Comparaison des quatre schémas d'ordre 2 en espace et en temps

Les résultats suivants ont été obtenus sur un maillage $n_x = 76$ et $n_y = 69$. La figure 11.3 représente l'angle α de chaque schéma en fonction des abscisses des points du bord. Malgré certaines oscillations, visibles pour les schémas VNR et SGPC, l'angle théorique de 6.9857 degrés, représenté en noir, semble être bien capturé par l'ensemble des schémas d'ordre 2. Les schémas GLACE et EUCCLHYD d'ordre 2 en espace et en temps sont ici utilisés avec le limiteur de Barth Jespersen et paraissent bien adaptés pour ce cas test. On constate cependant que ces deux schémas sont trop dissipatifs à l'ordre 1 en espace et en temps pour pouvoir capturer l'angle α . Enfin, les schémas décalés présentent un caractère oscillatoire qui sera étudié au dernier paragraphe de ce chapitre intitulé : Influence du coefficient linéaire de pseudo-viscosité.

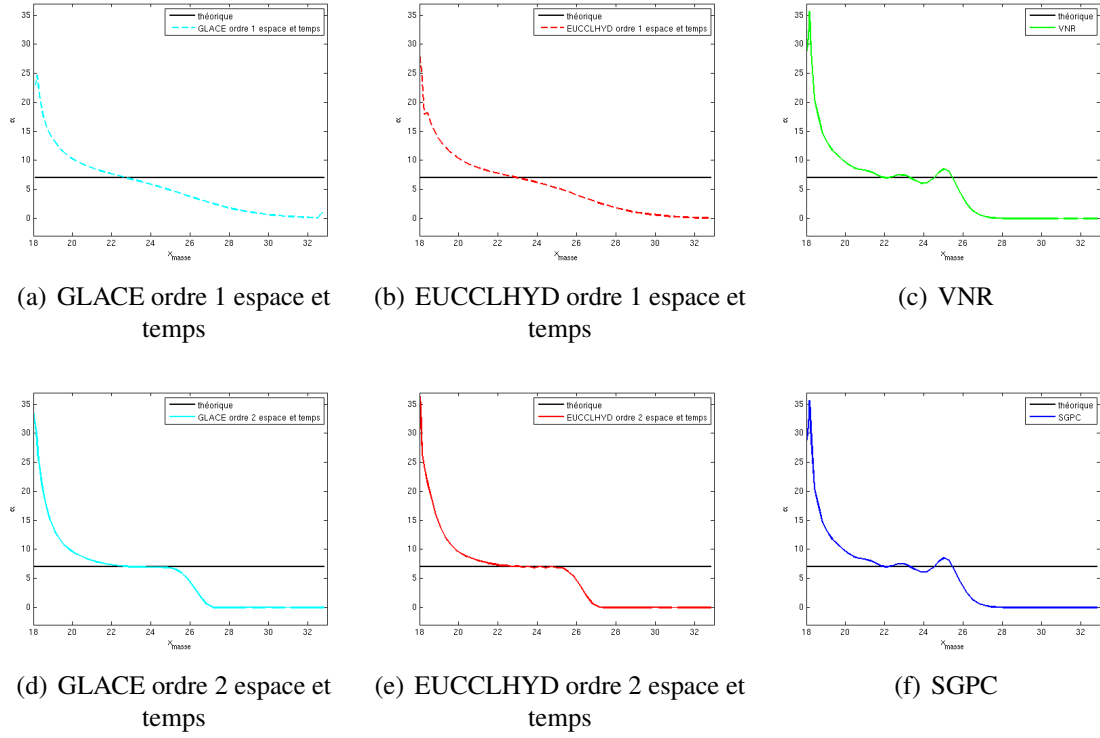


FIG. 11.3 – Angle α au temps final $t_{\text{final}} = 6.6 \cdot 10^{-6}$ s sur un maillage grossier.

Les maillages au temps final sont représentés sur la figure suivante. On peut y retrouver les deux inclinaisons du bord oblique, bien visibles sur les quatre schémas, et les oscillations sur VNR et SGPC.

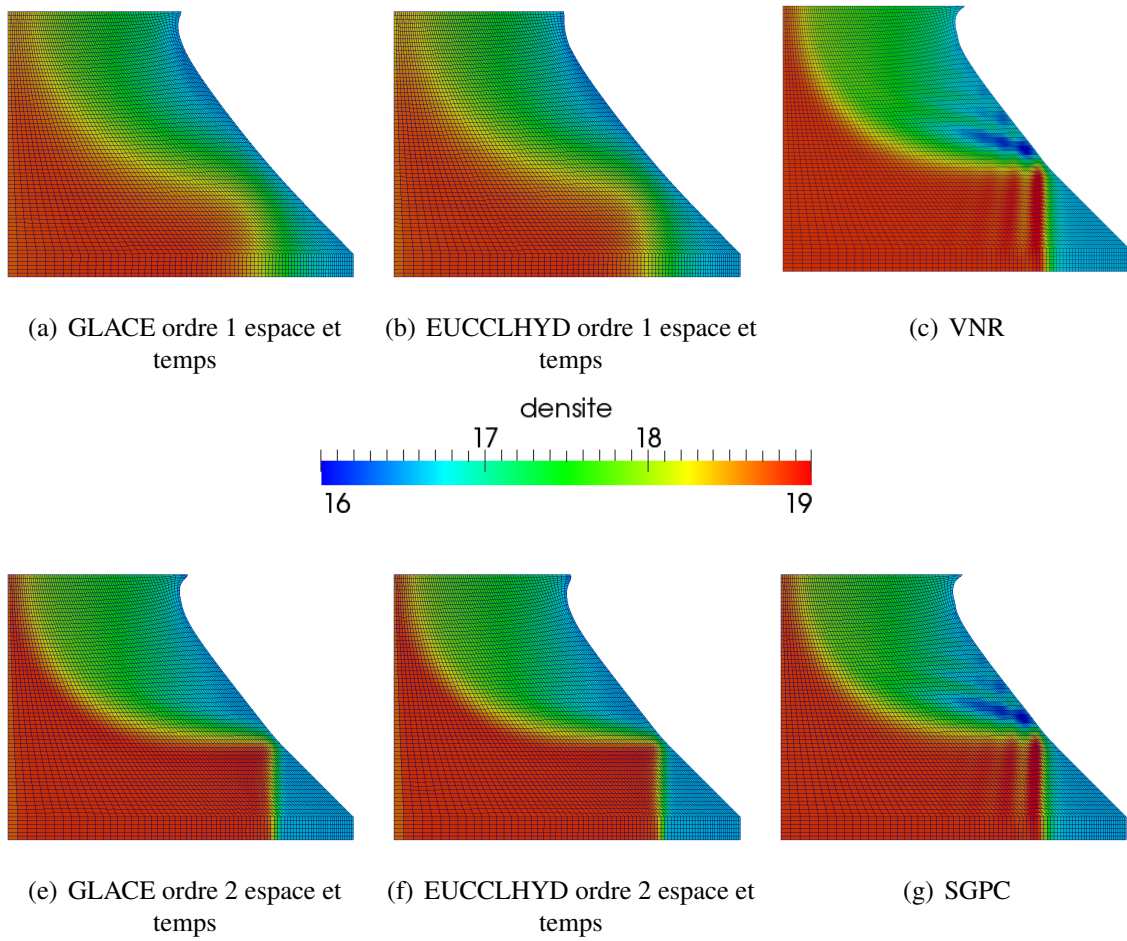


FIG. 11.4 – Maillages au temps final t_{final} pour les différents schémas.

Remarques :

- Les courbes ci-dessus ont été tracées avec le limiteur de Barth Jespersen. Nous avons cependant cherché à étudier l'influence de ce limiteur et avons testé ceux de Vankatakri-shnan et de Dukowicz.
- Les différents limiteurs donnent des résultats similaires. Nous avons choisi de poursuivre l'étude de ce cas test sur d'autres maillages avec le limiteur de Venkatakrishnan.

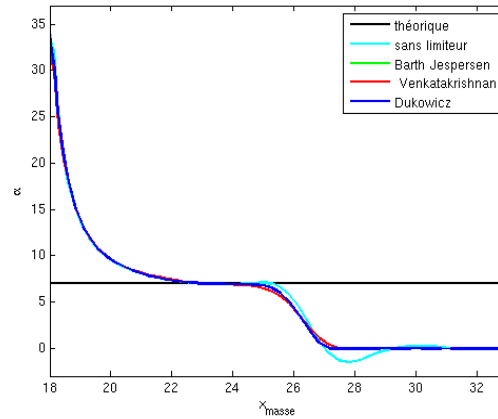


FIG. 11.5 – Angle α à t_{final} s pour le schéma GLACE ordre 2 espace et temps : comparaison des différents limiteurs.

11.2.2 Étude sur maillage bruité

Afin d’observer les comportements des schémas sur des maillages non réguliers, un bruit aléatoire a été ajouté au maillage initial.

Chaque coordonnée des points a ainsi été modifiée par un déplacement limité. Le maillage ainsi obtenu est le suivant :

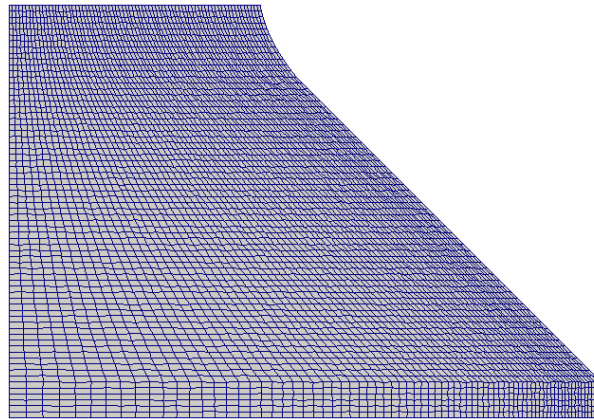
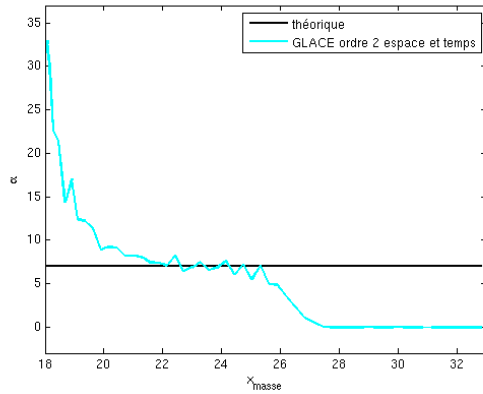
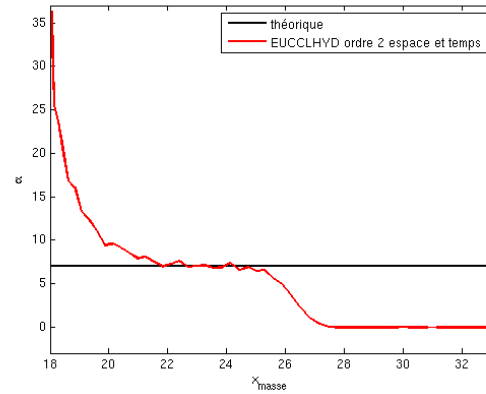


FIG. 11.6 – Maillage bruité.

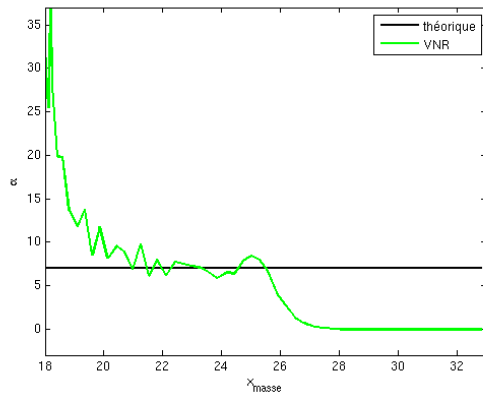
Comme dit précédemment, le limiteur utilisé pour les schémas centrés est celui de Venkatakrishnan. Même en présence de bruit, les quatre schémas d’ordre 2 permettent bien d’approcher l’angle théorique. De plus, la tendance observée précédemment se retrouve : les schémas GLACE et EUCCLHYD d’ordre 2 en espace et en temps semblent plus proches du plateau théorique.



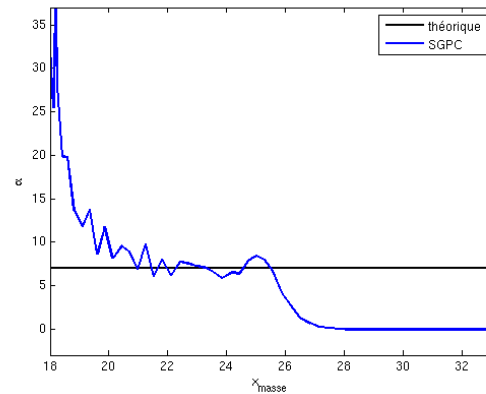
(a) GLACE ordre 2 espace et temps



(b) EUCCLHYD ordre 2 espace et temps



(c) VNR

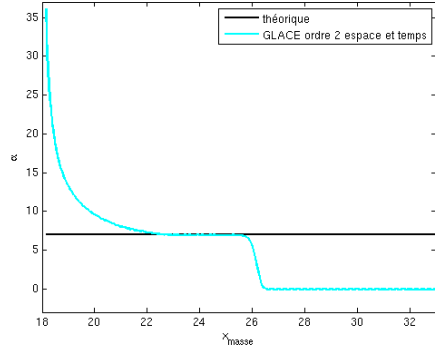


(d) SGPC

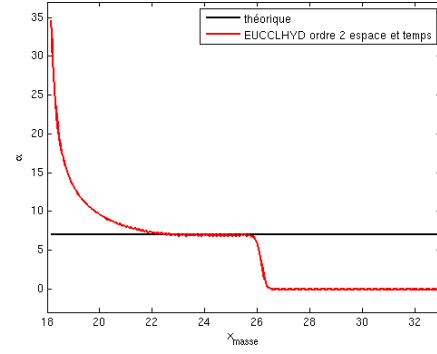
FIG. 11.7 – Angle α au temps final sur un maillage bruité.

11.2.3 Étude sur maillage plus fin

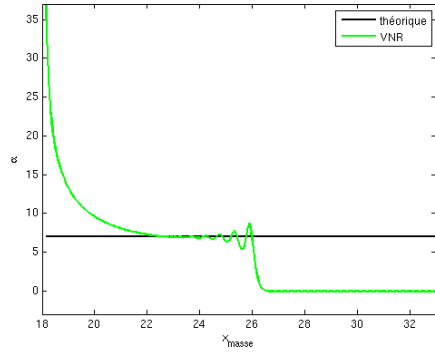
Nous avons cherché à raffiner le maillage pour étudier le comportement des schémas sur des maillages convergés (ici $n_x = 304$ et $n_y = 273$). Le limiteur utilisé pour les schémas cnetrés est ici celui de Venkatakrishnan. Les conclusions sont très similaires aux précédentes : des oscillations subsistent en VNR et SGPC et l'angle théorique semble là encore bien capturé pour l'ensemble des schémas.



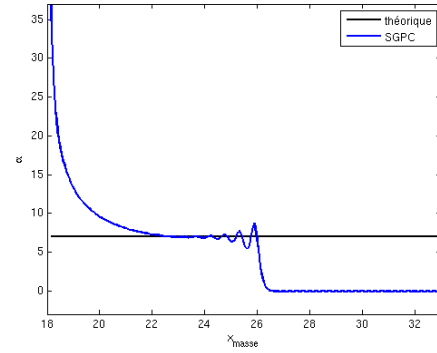
(a) GLACE ordre 2 espace et temps



(b) EUCCLHYD ordre 2 espace et temps



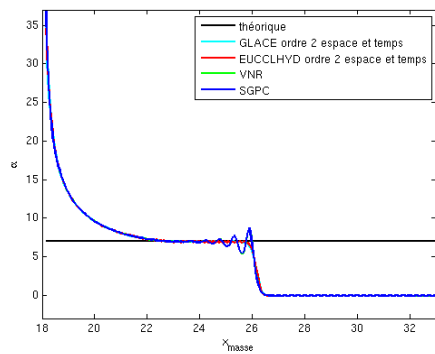
(c) VNR



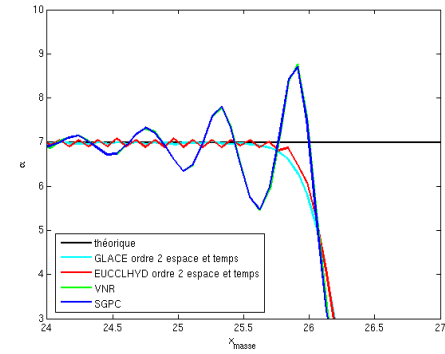
(d) SGPC

FIG. 11.8 – Angle α à t_{final} sur un maillage plus fin.

De plus, la position du changement d'inclinaison est la même pour l'ensemble des schémas d'ordre 2 en espace et en temps comme on peut le voir sur la figure 11.9



(a) position du changement d'inclinaison



(b) zoom

FIG. 11.9 – Angle α à t_{final} sur maillage fin : les différents schémas d'ordre 2 en espace et en temps.

Influence du coefficient linéaire de pseudo-viscosité

Nous avons fait varier le coefficient linéaire de pseudo-viscosité afin de tenter de limiter les oscillations. Les différentes valeurs testées sont :

- $a_1 = 0.15$
- $a_2 = 0.5$

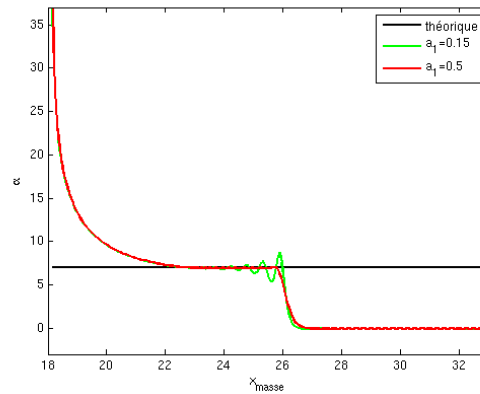


FIG. 11.10 – Angle α à t_{final} sur maillage fin : influence du coefficient a_1 de la pseudo-viscosité sur le schéma VNR.

L'augmentation du coefficient linéaire de pseudo-viscosité permet de supprimer les oscillations présentes avec la plus faible valeur de a_1 . Néanmoins, le changement d'inclinaison devient alors plus étalé.

Conclusion

Notre objectif était d'enrichir un code numérique puis de comparer deux grandes familles de schémas : les schémas centrés ou co-localisés (GLACE et EUCCLHYD à différents ordres) et les schémas décalés (VNR et SGPC). Il convient tout d'abord de souligner que ces deux familles se distinguent assez nettement sur l'ensemble des cas tests utilisés. De plus, les schémas centrés semblent mieux adaptés à ces différents cas : meilleur capture du plateau, meilleur position du choc, *etc.* Au sein des schémas centrés, peu de différences ont été observées entre les schémas GLACE et EUCCLHYD, quel que soit l'ordre, sur les écoulements 1D. En revanche, des distinctions apparaissent sur certains cas tests à effets bidimensionnels tels que le problème de Saltzmann. Sur ce cas, le schéma Eucclhyd apparaît plus adapté grâce à son caractère dissipatif. On constate finalement, sur ces schémas, que l'amélioration par la montée en ordre est principalement due à celle spatiale et non temporelle. Enfin, VNR semble ne pas converger, à CFL fixée, vers la bonne solution au niveau d'un choc, inconvénient corrigé par la mise en place d'un prédicteur-correcteur dans le schéma SGPC.

Ce stage fut très enrichissant à de nombreux égards, notamment pour sa diversité. En effet, la prise en main d'un code existant en C++ nous a tout d'abord beaucoup instruit sur le plan informatique. Par la suite, la confiance qui nous a été accordée nous a permis de participer aux différentes étapes d'extension de ce code (de sa découverte à sa validation) et ainsi de travailler à l'interface entre les mathématiques, la physique et l'informatique. À ce titre, nous avons eu l'occasion de rencontrer des personnes d'horizons diverses (mathématiciens, physiciens, informaticiens) au points de vue très complémentaires. Par ailleurs, nous avons été conviées à des soutenances de thèses, des réunions de travail impliquant tout le laboratoire nous permettant ainsi de participer à des événements propres à l'entreprise. Pour finir, la diversité des contacts (stagiaires, thésards, chercheurs et ingénieurs) et les déjeuners conviviaux nous ont beaucoup enrichies sur le plan humain.

Annexe A

Reconstruction des gradients

L'ordre deux en espace est assurée par une reconstruction de type MUSCL reposant sur une méthode aux moindres carrées. Le gradient des variables u_c , v_c et P_{cp} est ainsi reconstruit grâce à la formule $\vec{\nabla} w_c = M_c^{-1} \sum_{c' \in \{c\}} (w_{c'} - w_c) (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c)$, comme vu au chapitre 1. La matrice M_c fait intervenir les cellules c' voisines à la cellule c étudiée, d'après la formule $M_c = \sum_{c' \in \{c\}} (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c) \otimes (\vec{x}_{c'} - \vec{x}_c)$. Le choix effectué ici est de prendre un voisinage de 9 mailles voisines pour chaque cellule, cependant, les cellules du bord n'ont qu'un nombre limité de voisins. Cette annexe présente l'alternative trouvée pour remédier à ce problème : la prise en compte de mailles virtuelles dans la construction de la matrice M_c pour les cellules du bord.

Lors de la mise en œuvre des schémas GLACE et EUCCLHYD d'ordre deux en espace, il nous a fallu choisir, pour chaque maille étudiée (en rouge sur la figure A.1), un "stencil" de mailles voisines représenté en vert.

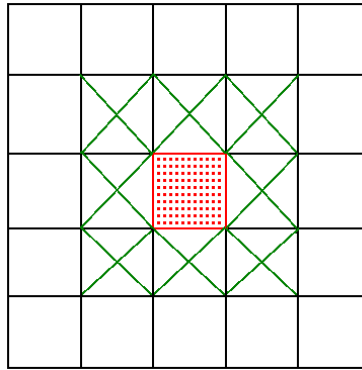


FIG. A.1 – Stencil pour la reconstruction des gradients.

Un gradient au sein de la cellule est calculé à partir des différentes variables des mailles du stencil. Nous avons choisi de travailler avec un stencil de 9 mailles comme indiqué sur le schéma. Un premier problème de condition aux bords a été identifié en travaillant sur le cas test de Sod 2D en maillage cartésien. Dans ce cas test, les valeurs des différentes variables sont, théoriquement, constantes par couche verticale (schématisées par différentes couleurs sur la figure A.2). On note $\Delta w_1 = w_{c'} - w_c$ où c représente la maille étudiée (en pointillé rouge sur le schéma) et $w_{c'}$ la valeur de w dans la couche suivante (verte). De même pour Δw_2 .

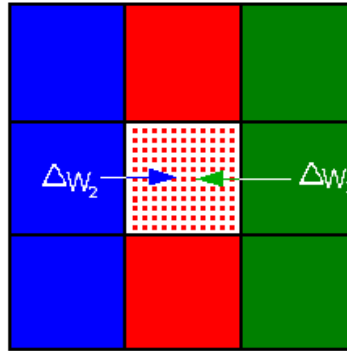


FIG. A.2 – Variables constantes par couche.

En suivant alors la méthode décrite pour les schémas GLACE et EUCCLHYD d'ordre deux en espace pour le calcul des vitesses nodales, les valeurs théoriques des différents gradients pour une cellule située au centre de notre maillage et une cellule située au bord du maillage peuvent être déterminées :

$$\nabla_{w_C} = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta w_1 - \Delta w_2)}{2\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pour une cellule au centre,}$$

$$\nabla_{w_B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta w_1}{2} - \Delta w_2 \right) \\ \frac{1}{\Delta y} \Delta w_2 \end{pmatrix}, \text{ pour une cellule au bord,}$$

où w peut être égale à u , v ou P . On s'aperçoit alors que l'incomplétude du stencil au bord provoque la non-compensation de certains termes ($\nabla_{w_C} \neq \nabla_{w_B}$) et donc un schéma erroné aux bords. Afin de résoudre ce problème présent dans les différents cas tests, nous avons considéré des mailles virtuelles où mailles fantômes, lors de la reconstruction des gradients pour les cellules du bord affectées de la condition $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Nous avons donc choisi de compléter le stencil par création de mailles fantômes (mailles claires sur le schéma A.3). Celles-ci seront créées par symétrie des mailles aux bords et leur seront affectées les valeurs symétriques des variables de la maille existante.

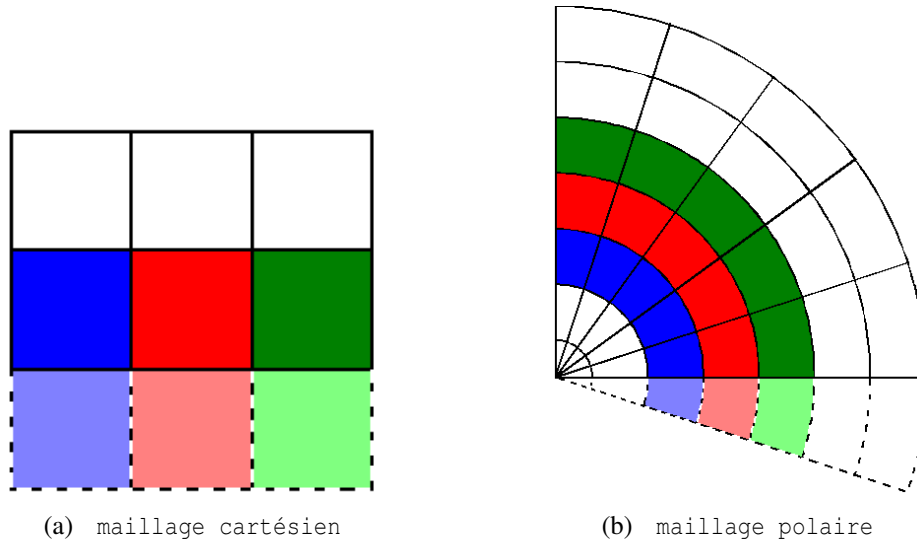


FIG. A.3 – Mailles fantômes.

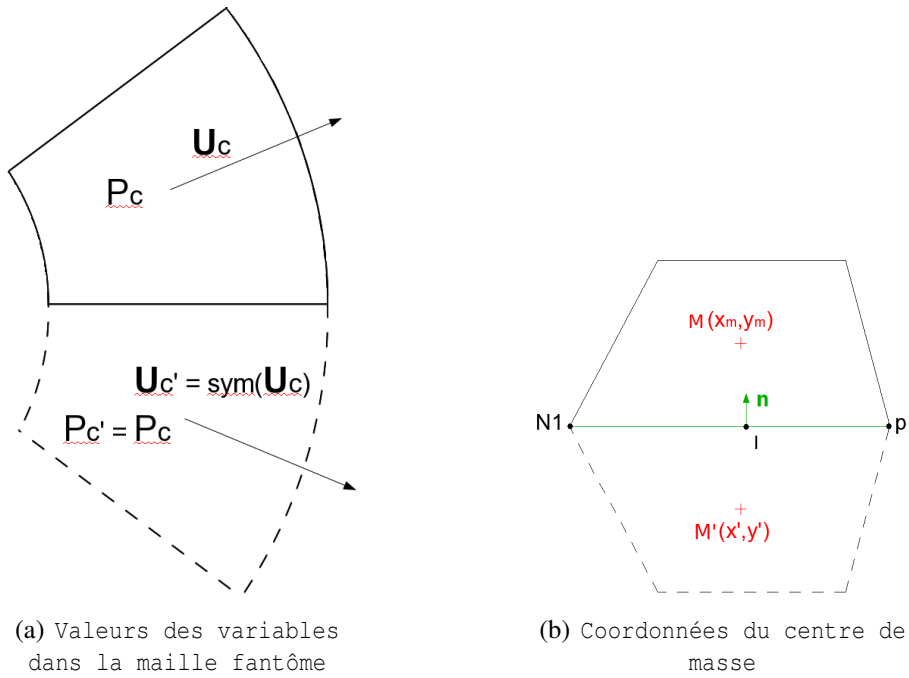


FIG. A.4 – Création des mailles fantômes.

La symétrie est réalisée par rapport au segment du bord $[N_1 p]$ (tracé en vert sur la figure A.4). Nous notons $ax + by = c$ l'équation de cette droite ($N_1 p$) où $a = y_{N_1} - y_n$ et $b = x_n - x_{N_1}$. Celle-ci admet pour vecteur directeur $(-b, a)^t$. On cherche à déterminer les coordonnées du centre de masse de la cellule fantôme $(x', y')^t$, point symétrique à M . Nous posons $c_m = ax_m + by_m$ et commençons par chercher les coordonnées $(u, v)^t$ du point I (milieu du segment $[MM']$). Ce point appartenant au segment $[N_1 p]$, ses coordonnées vérifient l'équation :

$c = au + bv$. De plus, le segment $[MI]$ est orthogonal au segment $[N1p]$; de ce fait : $-b(u - x_m) + a(v - y_m) = 0$.

En réorganisant toutes ces équations, nous nous ramenons à la résolution du système :

$$\begin{aligned} c - c_m &= a(u - x_m) + b(v - y_m), \\ 0 &= -b(u - x_m) + a(v - y_m). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors obtenir les coordonnées du point $I \begin{pmatrix} u = x_m + \frac{a(c - c_m)}{a^2 + b^2} \\ v = y_m + \frac{b(c - c_m)}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$,

du vecteur
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{-a(c - c_m)}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b(c - c_m)}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$

et finalement en déduire les coordonnées du centre de masse de la cellule fantôme :

$$\begin{cases} x' = x_m + \frac{2a(c - c_m)}{a^2 + b^2}, \\ y' = y_m + \frac{2b(c - c_m)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Annexe B

Conditions aux limites

Les conditions aux limites doivent être prises en compte dans le calcul de la vitesse nodale et de la pression nodale. La méthode est d'adapter, pour chaque cellule du bord et selon le type de conditions aux limites, les formules de la matrice A_p et du vecteur \vec{b}_p , qui apparaissent dans le calcul de la vitesse \vec{u}_p (équations (1.7)), .

Condition $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Nous notons ici \vec{n}_p , le vecteur normal au bord et imposons que la vitesse nodale n'ait qu'une composante tangente à la frontière. Cette condition se retrouve dans la plupart des différents cas tests utilisés afin de modéliser une symétrie axiale ou un mur avec glissement parfait. Pour cette condition aux limites, la matrice A_p utilisée lors de la résolution de la vitesse nodale est la suivante :

$$A_p = (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) A_p^0 (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) + \text{tr}(A_p^0) \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p$$

où la matrice A_p^0 correspond à la matrice initiale (celle utilisée pour les nœuds internes). Le vecteur \vec{b}_p est, quant à lui, modifié comme suit :

$$\vec{b}_p = (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) \vec{b}_p^0.$$

L'algorithme de résolution reste ensuite le même que pour les nœuds internes.

Condition P imposée

La matrice A_p est ici inchangée par rapport à celle des nœuds internes. Par contre, le calcul du vecteur \vec{b}_p tient compte de la pression imposée :

$$\vec{b}_p = \vec{b}_p^0 - \sum_{c \in \{p\}} \vec{C}_{cp} P_{\text{imposée}}.$$

La détermination de \vec{u}_p et P_{cp} se fait ensuite selon la méthode habituelle (résolution du système linéaire $A_p \vec{u}_p = \vec{b}_p$ puis utilisation du solveur de Riemann). Il est à noter que P_{cp} n'est pas égale à la pression imposée (pression extérieure) mais est toujours déterminée par le solveur de Riemann.

Condition $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et P imposée

Cette double condition se retrouve, entre autre, dans le cas test de Kidder au niveau des quatre coins du matériau simulé (cf. figure 7.1). Nous avons ici deux conditions aux limites au niveau du nœud p : nous supposons que la vitesse nodale est tangente à un côté de la maille et qu'une pression extérieure est exercée.

La matrice A_p du système linéaire est la même que celle de la condition $\vec{u}_p \cdot \vec{n}_p = 0$, soit

$$A_p = (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) A_p^0 (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) + \text{tr}(A_p^0) \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p.$$

Le vecteur \vec{b}_p devient

$$\vec{b}_p = (I - \vec{n}_p \otimes \vec{n}_p) (\vec{b}_p^0 - \sum_{c \in \{p\}} P_{\text{imposée}} \vec{C}_{cp}).$$

Là encore, la vitesse nodale se retrouve par la méthode usuelle. La pression est quant à elle recalculée avec le solveur de Riemann.

Condition \vec{u} imposée

Cette condition est souvent évaluée en utilisant $\vec{u}_{\text{imposée}} = \vec{0}$, ce qui traduit un encastrement. Pour cette condition, seule l'équation du solveur de Riemann est prise en compte, puisque la vitesse au nœud est déjà connue. Nous n'avons donc pas besoin de définir la matrice A_p ni le vecteur \vec{b}_p . Le calcul de P_{cp} se fait toujours suivant le solveur nodal.

Remarque :

Une autre méthode est de considérer un stencil de 9 mailles voisines pour chaque cellule (au bord comme au centre) et ainsi de compléter, par l'utilisation de mailles fantômes, les stencils incomplets (typiquement ceux du bords). Les formules utilisées pour les mailles au centre et pour celles au bord sont alors les mêmes. Un développement sur les mailles fantômes a déjà été réalisé lors de la montée en ordre en espace (annexe A). Nous avons testé cette autre variante à l'ordre un en temps et avons pu observer des résultats rigoureusement identiques à ceux obtenus avec modifications de A_p et b_p .

Dans cette méthode les calculs de la matrice A_p et du vecteur \vec{b}_p s'effectuent de la façon suivante :

$$A_p = \sum_{\substack{c \in \{p\} \\ \text{mailles réelles}}} \alpha_c \frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|} + \sum_{\substack{c \in \{p\} \\ \text{mailles fantômes} \\ \text{si nécessaire}}} \alpha_c \frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|},$$

$$\vec{b}_p = \sum_{\substack{c \in \{p\} \\ \text{mailles réelles}}} \left[P_c(\vec{x}_p) \vec{C}_{cp} + \alpha_c \left(\frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|} \right) \vec{u}_c(\vec{x}_p) \right] + \sum_{\substack{c \in \{p\} \\ \text{mailles fantômes}}} \left[P_c(\vec{x}_p) \vec{C}_{cp} + \alpha_c \left(\frac{\vec{C}_{cp} \otimes \vec{C}_{cp}}{\|\vec{C}_{cp}\|} \right) \vec{u}_c(\vec{x}_p) \right].$$

Annexe C

Les limiteurs

La reconstruction MUSCL que nous avons utilisée pour l'ordre deux en temps sur les schémas centrés nécessite l'introduction de limiteurs. Cette annexe présente un limiteur temporel nécessaire à l'ordre 2 en espace et 1 en temps, puis un limiteur directionnel utilisé pour les cas tests polaires.

C.1 Présentation et description théorique

Lors de la reconstruction des variables $\vec{u}_c(\vec{x}_p)$ et $P_c(\vec{x}_p)$, il est souvent important dans les applications de ne pas créer de nouveaux minima et maxima locaux. C'est le rôle du limiteur Φ_c . Il s'agit d'une variable propre à chaque cellule c qui sert à limiter la pente des quantités reconstruites. Il se place donc directement devant le gradient :

$$\begin{aligned} u_c(\vec{x}) &= u_c(\vec{x}_c) + \Phi_c^\mu \vec{\nabla} u_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \\ v_c(\vec{x}) &= v_c(\vec{x}_c) + \Phi_c^v \vec{\nabla} v_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \\ P_c(\vec{x}) &= P_c(\vec{x}_c) + \Phi_c^p \vec{\nabla} P_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \end{aligned}$$

Différents limiteurs sont présents dans la littérature [1, 30]. Certains, ceux que nous avons utilisés, s'écrivent sous la forme : $\Phi_c = \min_{p \in \{c\}} \Phi_{cp}$, avec

$$\Phi_{cp} = \begin{cases} \mu\left(\frac{w_c^{\max} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}\right) & \text{si } w_c(\vec{x}_p) - w_c > 0, \\ \mu\left(\frac{w_c^{\min} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}\right) & \text{si } w_c(\vec{x}_p) - w_c < 0, \\ 1 & \text{si } w_c(\vec{x}_p) - w_c = 0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où $w_c^{\max} = \max(\max_{c' \in \{c\}} w_{c'}, w_c)$, $w_c^{\min} = \min(\min_{c' \in \{c\}} w_{c'}, w_c)$. La variable w_c vaut respectivement P_c , u_c et v_c , puisque nous reconstruisons et limitons séparément les deux coordonnées de la vitesse

$$\vec{u}_c = (u_c, v_c).$$

Pour les différents limiteurs utilisés, l'expression de μ diffère, voir [25] :

- limiteur de Barth Jespersen [1] : $\mu(x) = \min(1, x)$,
- limiteur de Venkatakrishnan [30] : $\mu(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2}$.

La fonction μ de Venkatakrishnan a l'avantage d'approcher $\min(1, x)$ tout en étant différentiable.

Nous avons aussi testé celui de Dukowicz qui s'écrit sous la forme

$$\Phi_c = \min \left(1, \max \left(0, \frac{w_c^{\max} - w_c}{\overline{w}_c - w_c} \right), \max \left(0, \frac{w_c^{\min} - w_c}{\underline{w}_c - w_c} \right) \right),$$

où nous avons posé ici $\overline{w}_c = \max_{p \in \{c\}} w_c(\vec{x}_p)$, et $\underline{w}_c = \min_{p \in \{c\}} w_c(\vec{x}_p)$.

C.1.1 Démonstration théorique de l'action du limiteur

La reconstruction de type MUSCL fournit des grandeurs sous la forme

$$w_c(\vec{x}) = w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c),$$

où w_c prend respectivement les valeurs u_c , v_c et P_c . L'objectif est d'obtenir l'inégalité

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c(\vec{x}) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'}. \quad (\text{C.2})$$

en présence du limiteur, et cette partie se consacre à la démonstration de ce point.

Tout d'abord, remarquons que cette inégalité est équivalente à

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c(\vec{x}_i) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall i \in \partial\Omega_c, \quad (\text{C.3})$$

où $\partial\Omega_c$ représente le bord de la cellule. En effet, d'après le principe du maximum, dont l'énoncé est rappelé ci-dessous, et en l'appliquant à la fonction convexe w_c sur le domaine compact convexe Ω_c (une cellule) nous obtenons $w_c(\vec{x}_i) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall i \in \partial\Omega_c$.

De plus, $w_c(\vec{x}) \geq \min_{c' \in \{c\}} w_{c'}$, ce qui s'écrit encore $-w_c(\vec{x}) \leq -\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} = \max_{c' \in \{c\}} (-w_{c'})$. Le théorème précédemment cité s'applique à $-w_c$ puisque $-w_c$ est convexe car w_c est une fonction affine, ce qui donne $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c(\vec{x}_i)$.

Théorème 1 (Principe du maximum). *En optimisation convexe, le principe du maximum affirme que le maximum d'une fonction convexe sur un ensemble compact et convexe est atteint sur sa frontière.*

D'après la reconstruction linéaire, nous cherchons donc à vérifier

$$w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall i \in \partial\Omega_c.$$

On se ramène donc à

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall i \in \partial\Omega_c.$$

Etape 1 : démonstration avec Φ_{cp} et i valant un des sommet de la maille c

Montrons tout d'abord que l'on a

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c + \Phi_{cp} \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall p \text{ un sommet de la maille } \Omega_c.$$

soit

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c \leq \Phi_{cp} \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c. \quad (\text{C.4})$$

On pose $w_c(\vec{x}_p) = w_c + \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_c)$ (variable reconstruite avant l'ajout du limiteur), ce qui revient à écrire (C.4) sous la forme $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c \leq \Phi_{cp} (w_c(\vec{x}_p) - w_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c$.

Plusieurs cas apparaissent alors selon le signe de $w_c(\vec{x}_p) - w_c$ (cette distinction était déjà présente dans la définition des limiteurs) :

– Cas 1 si $w_c(\vec{x}_p) - w_c > 0$

Il faut montrer que

$$\underbrace{\frac{\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}}_m \leq \Phi_{cp} \leq \underbrace{\frac{\max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}}_M,$$

l'inégalité (C.4) sera ainsi satisfaite.

Tout d'abord, puisque $w_c(\vec{x}_p) - w_c > 0$ et que l'on prend en compte w_c dans le calcul des $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'}$ et $\max_{c' \in \{c\}} w_{c'}$, on a

$$m \leq 0 \leq M. \quad (\text{C.5})$$

De plus, le limiteur de Barth Jespersen est dans ce cas défini par

$$\Phi_{cp} = \min\left(1, \frac{\max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}\right),$$

ce qui s'écrit encore $\Phi_{cp} = \min(1, M)$. Or d'après l'inégalité (C.5), $M \geq 0$, donc $0 \leq \min(1, M) \leq M$ et $m \leq 0$, donc $m \leq \Phi_{cp} \leq M$, ce qui constitue l'inégalité voulue.

– Cas 2 si $w_c(\vec{x}_p) - w_c < 0$

Il faut montrer alors que

$$\underbrace{\frac{\max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}}_M \leq \Phi_{cp} \leq \underbrace{\frac{\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}}_m.$$

Dans ce cas, $M \leq 0 \leq m$ et $\Phi_{cp} = \min\left(1, \frac{\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}\right) = \min(1, m)$, d'où $0 \leq \Phi_{cp} = \min(1, m) \leq m$ soit $M \leq \Phi_{cp} \leq m$.

– Cas 3 si $w_c(\vec{x}_p) - w_c = 0$ alors

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c \leq 0 \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c,$$

qui est toujours vérifié car la maille c est incluse dans l'ensemble $c' \in \{c\}$. Nous n'en déduisons donc aucune condition sur Φ_{cp} .

Ainsi, on vérifie bien l'équation (C.4) pour tout nœud p d'une maille.

Etape 2 : Passage à Φ_c

Montrons l'équation

$$\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall p \text{ un sommet de la maille } \Omega_c.$$

On sait d'après l'étape 1 que $\forall p$ nœud de la maille Ω_c ,

$$\underbrace{\min \left(\frac{\min w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}, \frac{\max w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c} \right)}_{I_p} \leq \Phi_{cp} \leq \underbrace{\max \left(\frac{\max w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c}, \frac{\min w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c} \right)}_{S_p}.$$

Il nous faut démontrer que Φ_c vérifie lui aussi $I_p \leq \Phi_c \leq S_p$, $\forall p$ sommet de Ω_c , ce qui s'écrit encore $\max_p I_p \leq \Phi_c \leq \min_p S_p$.

Tout d'abord, on peut remarquer que les intervalles $[I_p, S_p]$ contiennent tous 0 car m et M ont des signes distincts dans les trois cas présentés précédemment, donc $\forall p, I_p \leq 0$ donc $\max_p I_p \leq 0$.

De plus, tous les Φ_{cp} sont positifs puisque

$$\begin{aligned} \Phi_{cp} &= 1 \text{ ou } M \text{ dans le cas 1 (et } M \text{ est positif),} \\ &= 1 \text{ ou } m \text{ dans le cas 2 (et } m \text{ est positif),} \\ &= 1 \quad \text{dans le cas 3.} \end{aligned} \tag{C.6}$$

D'où, en prenant $\Phi_c = \min_{p \in \{c\}} \Phi_{cp}$, le limiteur Φ_c est bien positif, donc $\Phi_c \geq \max_p I_p$.

Ensuite, on peut remarquer que pour les cas 1 et 2, $\Phi_{cp} \leq S_p$. D'où, $\min_{p \in \{c\}} \Phi_{cp} \leq \min_{p \in \{c\}} S_p$, donc en posant $\Phi_c = \min_{p \in \{c\}} \Phi_{cp}$, on a bien l'inégalité souhaitée : $\max_{p \in \{c\}} I_p \leq \Phi_c \leq \min_{p \in \{c\}} S_p$.

En conclusion, pour $\Phi_c = \min_{p \in \{c\}} \Phi_{cp}$, on a $\max_{p \in \{c\}} I_p \leq \Phi_c \leq \min_{p \in \{c\}} S_p$ soit $I_p \leq \Phi_c \leq S_p \quad \forall p \in \Omega_c$, ce

qui permet d'avoir $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_p - \vec{x}_c) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'} \quad \forall p \in \Omega_c$.

Il reste à montrer qu'il suffit de ne considérer que les quatre sommets de la maille et non n'importe quel point i du bord $\partial\Omega_c$.

Etape 3 : Seuls les sommets sont à prendre en compte (Raisonnement par l'absurde)

Supposons que le maximum au bord soit atteint à l'intérieur d'un segment en un point \vec{x}' (et non en un sommet \vec{x}_p). Alors \vec{x}' s'exprime comme combinaison linéaire des sommets du segment

$\vec{x}' = \alpha \vec{x}_{p1} + (1 - \alpha) \vec{x}_{p2}$, on pose $f(\vec{x}') = w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}' - \vec{x}_c)$, $f(\vec{x}_{p1}) = w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_{p1} - \vec{x}_c)$, et $f(\vec{x}_{p2}) = w_c + \Phi_c \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x}_{p2} - \vec{x}_c)$. Par hypothèse, $f(\vec{x}') > f(\vec{x}_{p1})$ et $f(\vec{x}') > f(\vec{x}_{p2})$, or, f étant linéaire, $f(\vec{x}') = \alpha f(\vec{x}_{p1}) + (1 - \alpha) f(\vec{x}_{p2})$, d'où $f(\vec{x}') < \alpha f(\vec{x}_{p1}) + (1 - \alpha) f(\vec{x}_{p2})$, soit $f(\vec{x}') < f(\vec{x}')$. Ce qui est absurde. Ainsi, le maximum est au moins atteint en un sommet du segment. En suivant la même démarche on peut montrer que le minimum est au moins atteint en un sommet.

Ainsi, d'après l'étape 1, on a $\forall \vec{x}_p$ avec p un sommet de la maille, $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} \leq w_c(\vec{x}_p) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'}$, de plus, par l'étape 3, $\exists p$ tel que $\forall i \in \partial \Omega_c$, on a $w_c(\vec{x}_i) \leq w_c(\vec{x}_p)$, donc $w_c(\vec{x}_i) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'}$ $\forall i \in \partial \Omega_c$. Par le principe du maximum, $\forall \vec{x}$, $w_c(\vec{x}) \leq \max_{c' \in \{c\}} w_{c'}$. Ceci démontre une partie de l'inégalité (C.2).

En appliquant le même raisonnement à $-w_c$, on a d'après l'étape 1, $\forall p$ sommet de Ω_c , $-w_c(\vec{x}_p) \leq -\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} = \max_{c' \in \{c\}} (-w_{c'})$. De plus, d'après l'étape 3, $\exists p$ sommet de la maille tel que $\forall i \in \partial \Omega_c$, on a $-w_c(\vec{x}_i) \leq -w_c(\vec{x}_p)$. Ainsi, $-w_c(\vec{x}) \leq \max_{c' \in \{c\}} (-w_{c'})$, et donc par le principe du maximum, $\forall \vec{x} \in \Omega_c$, $-w_c(\vec{x}) \leq \max_{c' \in \{c\}} (-w_{c'}) = -\min_{c' \in \{c\}} w_{c'}$. On a ainsi démontré l'inégalité (C.2).

Limiteur de Venkatakrishnan

Nous allons procéder de la même manière que précédemment pour montrer que ce limiteur permet bien d'avoir l'inégalité $\min_{c' \in \{c\}} u_{c'} \leq u_c(x) \leq \max_{c' \in \{c\}} u_{c'}$. Pour cela, en suivant la même démarche, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} m &\leq \Phi_{cp} \leq M, \text{ dans le cas 1} \\ M &\leq \Phi_{cp} \leq m, \text{ dans le cas 2} \end{aligned} \tag{C.7}$$

avec dans le limiteur de Venkatakrishnan,

$$\Phi_{cp} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\max_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c} \right) & \text{cas 1} \\ \mu \left(\frac{\min_{c' \in \{c\}} w_{c'} - w_c}{w_c(\vec{x}_p) - w_c} \right) & \text{cas 2} \\ 1 & \text{cas 3} \end{cases}$$

où $\mu(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2}$.

Comme $x^2 + x + 2$ est toujours positif, il suffit de vérifier $0 \leq \Phi_{cp} = \mu(M) \leq M$ dans le cas 1 et $0 \leq \Phi_{cp} = \mu(m) \leq m$ dans le cas 2, i.e $0 \leq \mu(x) \leq x$.

Or, si $0 \leq x$, on a la relation $x^2 + 2x \leq x^3 + x^2 + 2x$. Donc, puisque $0 \leq M$ et $0 \leq m$, on a bien $\mu(M) \leq M$ pour le cas 1 et $\mu(m) \leq m$ pour le cas 2.

De plus, on a bien $\mu(M) \geq 0$ et $\mu(m) \geq 0$, ce qui permet d'obtenir l'inégalité (C.7).

Les étapes 2 et 3 restent inchangées.

Le limiteur de Venkatakrishnan permet donc bien de limiter les valeurs w_c entre $\min_{c' \in \{c\}} w_{c'}$ et $\max_{c' \in \{c\}} w_{c'}$.

C.2 Limiteur temporel

Comme expliqué dans [7], la stabilité des schémas centrés d'ordre deux en espace n'est pas toujours garantie par l'ajout d'un limiteur comme ceux précédemment définis. Une limitation temporelle peut être nécessaire et ajoutée à la première limitation. Ce limiteur temporel est calculé au centre de chaque cellule et vaut

$$\phi_c^t = 1 - \frac{c_c \Delta t}{\Delta x},$$

et on obtient ainsi :

$$w_c(\vec{x}) = w_c(\vec{x}_c) + \Phi_c^w \Phi_c^t \vec{\nabla} w_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)$$

Les améliorations apportées par ce limiteur sont illustrées figure (C.2). Le cas test utilisé ici est le tube à choc de Sod cartésien, voir chapitre 6, sur un maillage 400×40 . (NB : les paramètres et la solution analytique de ce cas test sont détaillés dans le chapitre 6).



FIG. C.1 – Oscillations en maillage cartésien.

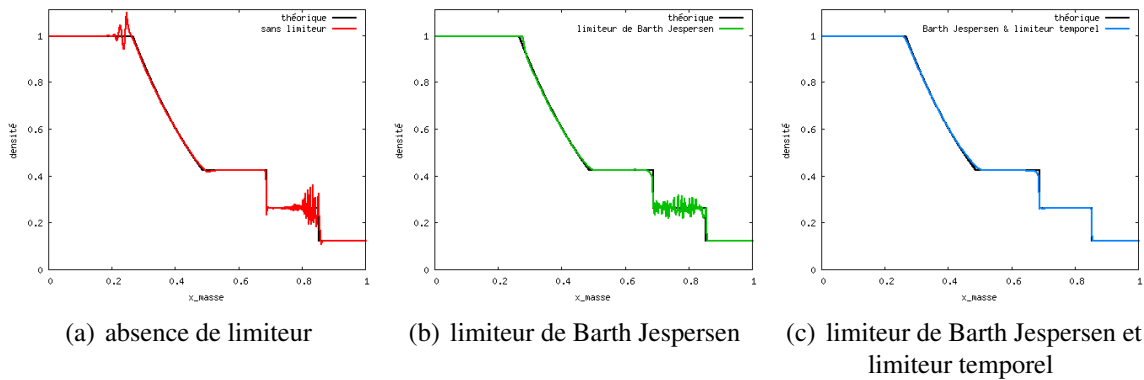


FIG. C.2 – Oscillations en maillage cartésien pour le schéma GLACE ordre 2 en espace et 1 en temps.

- Sans ce limiteur temporel, on observe des oscillations résiduelles malgré l'utilisation d'un limiteur de Barth Jespersen, de Venkatakrishnan ou de Dukowicz (voir figures C.1 et C.2).
- L'ajout du limiteur permet bien d'atténuer les oscillations au niveau du choc et du front de détente mais en crée de nouvelles, non désirées, au niveau du plateau post-choc ainsi qu'un décalage temporel au niveau de la détente. L'utilisation d'autres limiteurs (comme celui de Venkatakrishnan ou de Dukowicz) ou l'utilisation du schéma EUCCLHYD ordre en deux en espace (au lieu du schéma GLACE) aboutit au même résultat.
- L'introduction du limiteur temporel en plus des limiteurs spatiaux améliore nettement les résultats comme indiqué sur la figure C.2(c) : il n'y a plus d'oscillations et le décalage en détente a disparu.

Remarques :

- L'apparition d'oscillations peut en partie s'expliquer par le fait que l'on ne limite pas directement les valeurs de \vec{u}_p utilisées pour le déplacement du maillage, mais on limite les valeurs reconstruites au centre des mailles qui interviennent dans le calcul de A_p et \vec{b}_p . Néanmoins, ceci ne permet pas de garantir $\min_{c \in \{p\}}(u_c) \leq u_p \leq \max_{c \in \{p\}}(u_c)$. En effet, un stencil plus grand de cellules apparaît, correspondant à l'ensemble des cellules colorées sur le schéma.

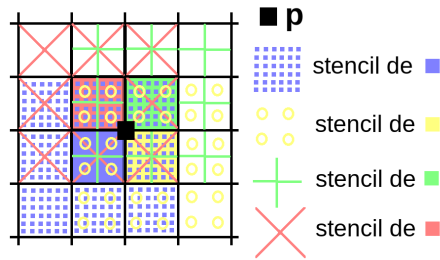


FIG. C.3 – Stencil associé à un point p .

- Pour les autres limiteurs spatiaux que nous avons implémentés (Venkatakrishnan et Dukowicz), les conclusions sont similaires : le limiteur temporel est chaque fois nécessaire.

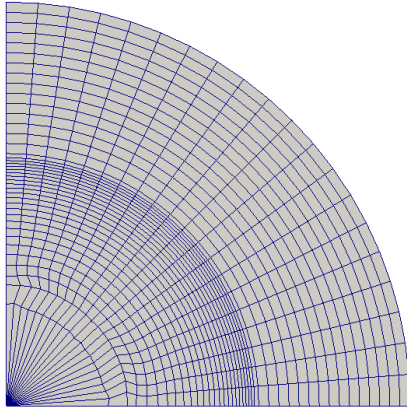
C.3 Limiteur directionnel pour les coordonnées de la vitesse

Sans limiteur, certains cas tests en maillages polaires, comme Sedov et Noh, ne tournent pas. L'ajout d'un limiteur spatial permet de remédier à ce problème mais introduit de fortes déformations de maillage et une perte de la symétrie 1D. En revanche, l'utilisation d'un limiteur dans les directions \vec{e}_r et \vec{e}_θ a permis une nette amélioration des résultats. La vitesse (initialement en coordonnées \vec{e}_x et \vec{e}_y) est alors projetée dans la base \vec{e}_r et \vec{e}_θ selon les formules (C.8), limitée dans ces directions puis ramenée dans la base cartésienne initiale (base utilisée dans

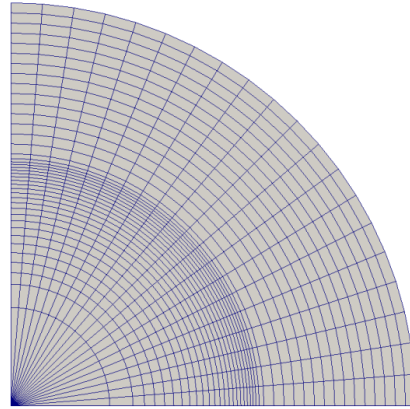
l'implémentation).

$$\begin{aligned} u_r(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}u(x,y) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}v(x,y), \\ u_\theta(x,y) &= \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}u(x,y) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}v(x,y), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

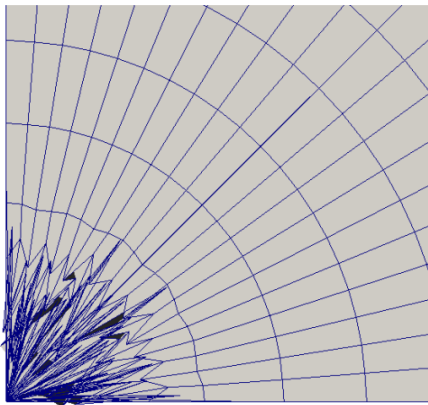
Les déformations dues à l'utilisation d'un limiteur en \vec{e}_x et \vec{e}_y sont ici exposées sur le problème de Sedov (image C.4(a), voir le chapitre 9 pour de plus amples renseignements sur les paramètres et le maillage utilisé) ainsi que sur le problème de Noh (l'image C.4(c) correspond à un zoom de ce cas test au niveau de l'origine, voir le chapitre 8 pour plus de détails sur ce cas test). Il est à noter que la figure C.4(c) ne correspond pas au temps final de ce cas test, la simulation s'arrêtant avant.



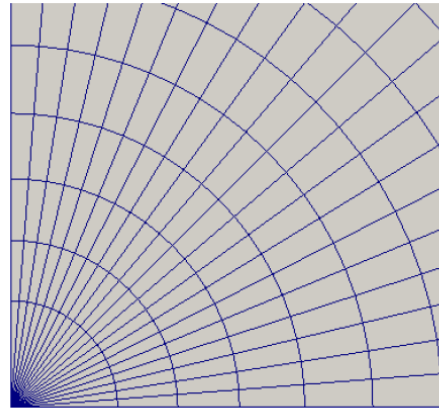
(a) Cas test de Sedov : limiteur selon \vec{e}_x et \vec{e}_y



(b) Cas test de Sedov : limiteur selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ



(c) Cas test de Noh (zoom au niveau de l'origine) : limiteur selon \vec{e}_x et \vec{e}_y



(d) Cas test de Noh (zoom au niveau de l'origine) : limiteur selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ

FIG. C.4 – Déformations de maillages.

Le limiteur directionnel selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ permet d'améliorer les résultats.

Remarque : L'ajout du limiteur temporel n'a aucun effet, ici.

La déformation de maillage avec un limiteur $\vec{\ell}_x$ et $\vec{\ell}_y$ n'apparaît pas sur un maillage cartésien auquel on ne fait subir qu'une simple rotation :

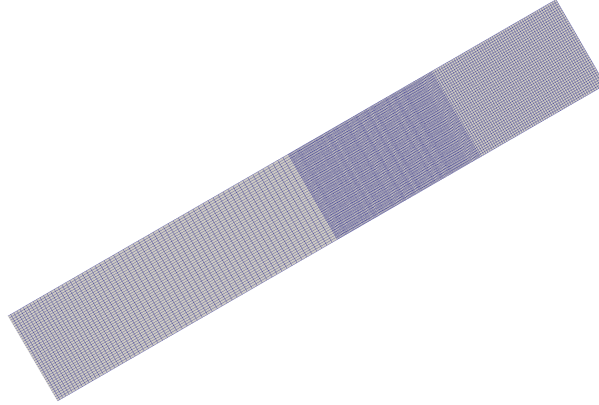


FIG. C.5 – Utilisation d'un limiteur en $\vec{\ell}_x$ et $\vec{\ell}_y$ sur un maillage pivoté.

Sur ce cas test de Sod cartésien pivoté, avec le limiteur de Barth Jespersen, on constate la préservation de la symétrie 1D. Il en est de même pour les autres limiteurs cartésiens présentés. Le développement d'un limiteur vectoriel est un sujet de recherche qui n'a pas de solution générale. Cette procédure de limitation directionnelle peut se généraliser de sorte que la limitation soit adaptée automatiquement à la géométrie de la maille [22].

Annexe D

Lois d'état

Plusieurs lois d'état ont été utilisées selon le cas test. La plus fréquente est la loi gaz parfait qui modélise un fluide non visqueux ; la loi de type Mie-Grüneisen modélise quant à elle un solide et est particulièrement bien adaptée pour les zones de compression.

D.1 Loi des Gaz parfaits

La pression est reliée à l'énergie interne par la formule suivante

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad (\text{D.1})$$

la vitesse du son étant égale à $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$, son expression vaut ici

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \quad (\text{D.2})$$

D.2 Loi d'état de type Mie-Grüneisen [27]

Pour cette loi d'état, on introduit la déformation volumique μ avec $\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1$ qui caractérise l'état de la phase :

- $\mu \geq 0$ zone de compression
- $\mu < 0$ zone de détente.

En phase de compression

La pression est calculée par la formule générale

$$P(\mu, e) = \frac{\rho^0 c_0^2 \mu (1 + (1 - \frac{\gamma}{2})\mu - \frac{a}{2}\mu^2)}{\left(1 - \mu(s_1 - 1) - s_2 \frac{\mu^2}{1+\mu} - s_3 \frac{\mu^3}{(1+\mu)^2}\right)^2} + \rho^0 (\gamma + a\mu)e, \quad (\text{D.3})$$

où c_0 représente la vitesse du son standart.

La vitesse du son est alors :

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_e + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_\rho, \quad (\text{D.4})$$

avec

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_e &= \left(\left(\frac{\rho^0 c_0}{\rho} \right)^2 \frac{1 + s_1 \epsilon + 3s_2 \epsilon^2 + 5s_3 \epsilon^3}{(1 - s_1 \epsilon - s_2 \epsilon^2 - s_3 \epsilon^3)^3} \right) \left(1 - \frac{\gamma + a\mu}{2(1 + \mu)} \mu \right) \\ &+ \left(\rho^0 c_0^2 \frac{\epsilon}{(1 - s_1 \epsilon - s_2 \epsilon^2 - s_3 \epsilon^3)^2} \right) \left(-\frac{\gamma + a\mu}{2\rho^0(1 + \mu)} \right) + \frac{\gamma + a\mu}{1 + \mu} e, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_\rho &= \frac{\gamma + a\mu}{1 + \mu} \rho \end{aligned}$$

et

$$\epsilon = \frac{\mu}{\mu + 1}.$$

Les coefficients a , s_1 , s_2 , s_3 , ρ^0 et γ sont propres au solide considéré. Ceux utilisés dans le cas test du choc oblique (cf chapitre 11) sont les suivants :

COEFFICIENTS	
a	0.042
s_1	1.2
s_2	0
s_3	0
ρ_0	16.654 g.cm ⁻²
γ	1.67
c_0	341400 cm.s ⁻¹

En phase de détente

Dans cette phase, $\mu < 0$, et la pression devient (en ne considérant que les premiers termes en μ)

$$P(\mu, e) = \rho^0 c_0^2 \mu + \rho^0 \gamma e, \quad (\text{D.5})$$

ce qui donne pour la vitesse du son

$$c = \sqrt{c_0^2 + \frac{P}{\rho^2} \rho^0 \gamma}. \quad (\text{D.6})$$

Annexe E

Newton-Raphson

La mise à jour de l'énergie interne et de la pression dans le schéma VNR s'effectue par résolution du système suivant

$$\begin{cases} e_c^{n+1} = e_c^n - \left(\frac{P_c^n + P_c^{n+1}}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right), \\ P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{cases}$$

Pour les deux lois d'état principalement utilisées (celle des gaz parfaits et celle de type Mie-Grüneisen, cf. annexe D), deux méthodes sont possibles : une méthode de résolution directe et une méthode itérative : celle de Newton-Raphson.

La méthode directe repose sur le système linéaire suivant à inverser :

$$\text{(Gaz parfait)} \begin{pmatrix} 1 & -(\gamma-1)\rho_c^{n+1} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_c^{n+1} \\ e_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_c^n - \left(\frac{P_c^n}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{(Mie-Grüneisen)} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_0(\gamma_0 + a\mu) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_c^{n+1} \\ e_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu(1 - \frac{\gamma_0}{2}) - \frac{a}{2} \mu^2)}{(1 - \mu(s_1 - 1) - s_2 \frac{\mu^2}{\mu+1} - s_3 \frac{\mu^3}{(1+\mu)^2})^2} \\ e_c^n - \left(\frac{P_c^n}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) \end{pmatrix}$$

La méthode de Newton-Raphson repose, quant à elle, sur des itérations successives. Cette méthode sert à approximer les zéros d'une fonction que nous noterons f par la suite. Les itérations s'expriment comme suit $x_{i+1} = x_i - df(x_i)^{-1} f(x_i)$. La fonction f dont nous cherchons à trouver

les zéros est ici $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \mathcal{P}(y) \\ y - e_c^n + \left(\frac{P_c^n + x}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) \end{pmatrix}$.

Ce qui devient pour chaque loi d'état considérée :

$$\text{(Gaz parfait)} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -(\gamma-1)\rho_c^{n+1} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i - (\gamma-1)\rho_c^{n+1} y_i \\ y_i - e_c^n + \left(\frac{P_c^n + x_i}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{(Mie-Grüneisen)} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\rho_0(\gamma_0 + a\mu) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i - \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + (1 - \frac{\gamma_0}{2})\mu - \frac{a}{2}\mu^2)}{\left((1 - \mu(s_1 - 1) - s_2 \frac{\mu^2}{1 + \mu} - s_3 \frac{\mu^3}{(1 + \mu)^2}) \right)^2} + \rho_0(\gamma_0 + a\mu)y_i, \\ y_i - e_c^n + \left(\frac{P_c^n + x_i}{2} + Q_c^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{\rho_c^{n+1}} - \frac{1}{\rho_c^n} \right) \end{pmatrix}$$

L'initialisation de cette méthode se fait en utilisant les valeurs au temps précédent ie $x_0 = P_c^n$ et $y_0 = e_c^n$; nous concluons ensuite en posant $x_{10} = P_c^{n+1}$ et $y_{10} = e_c^{n+1}$.

Annexe F

Calcul du centre de masse

Le code numérique utilise le calcul des coordonnées du centre de masse des cellules (notamment dans la mise à jour de la géométrie (rayon des cellules ...), dans le calcul des mailles fantômes etc). Bien que ce centre de masse soit défini par la relation

$$\vec{x}_c = \frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \vec{x} dV,$$

le calcul qui était effectué initialement dans le code était le suivant :

$$\vec{x}_c = \frac{1}{6A} \sum_{p \in \{c\}} [(\vec{x}_p + \vec{x}_{p^+})(\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p^+}) \cdot \vec{e}_z], \quad (\text{F.1})$$

où $A = \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{2} [(\vec{x}_p \wedge \vec{x}_{p^+}) \cdot \vec{e}_z]$.

Nous avons testé l'influence de ce paramètre \vec{x}_c en implémentant sa valeur théorique.

En cartésien

Nous nous plaçons sur un maillage cartésien à mailles rectangulaires dont les côtés sont dirigés selon les axes \vec{e}_x et \vec{e}_y . Nous appelons Δx et Δy les longueurs des côtés (*ie* $\Delta x = x_{\max} - x_{\min}$ et $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$).

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} x dV, \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x dx dy, \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \Delta y \frac{x_{\max}^2 - x_{\min}^2}{2}, \\ &= \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}. \end{aligned}$$

On a de même, $y_c = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}$.

En polaire

Nous supposons maintenant que nous nous plaçons sur un maillage polaire dont les grandeurs r_1 , r_2 , θ_1 et θ_2 sont rappelées sur la figure suivante.

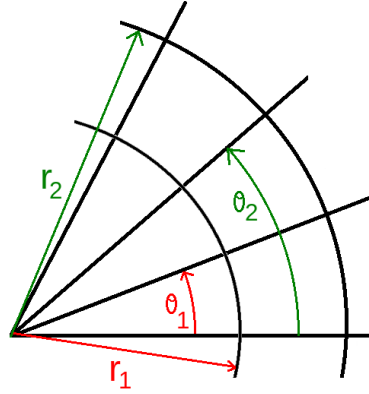


FIG. F.1 – Maillage polaire.

En utilisant les relations $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} x dV, \\ &= \frac{1}{V_c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cos\theta dr d\theta, \\ &= \frac{1}{V_c} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{3}, \end{aligned}$$

et de même $y_c = \frac{1}{V_c} \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{3} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$. Il nous reste alors à déterminer le volume V_c .

$$\begin{aligned} V_c &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\theta, \\ &= \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

Ainsi les expressions finales des coordonnées du centre de masse de la cellule c sont :

$$\begin{cases} x_c = \frac{2}{3} \frac{(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1}, \\ y_c = \frac{2}{3} \frac{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\theta_2 - \theta_1} \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{r_2 + r_1}. \end{cases}$$

Nous avons comparé les deux implémentations (équation (F.1) et calcul plus théorique) sans pounoir distinguer de nette différence entre les deux résultats. Nous avons par la suite fixé le caclul des coordonnées du centre de masse au calul (F.1), qui possède l'avantage d'être valable en cartésien comme en polaire.

Annexe G

Le schéma SGPC2

Ce schéma décalé est très proche du schéma SGPC. il utilise une discrétisation spatiale de type Wilkins (excepté pour la discrétisation de l'énergie), tout comme VNR et SGPC, et un prédicteur-correcteur assure l'ordre 2 en temps. Néanmoins, le prédicteur-correcteur ici utilisé est de type point milieu contrairement à celui de SGPC qui lui était de type trapèze.

G.1 Présentation théorique

G.1.1 Système continu d'équations

Le système continu n'est plus discrétisé sous la forme (3.6) comme sur VNR et SGPC mais sous la forme initiale (3.1).

G.1.2 Système semi-discret d'équations

Ainsi, le système semi-discret d'équations diffère de celui des schémas VNR et SGPC de par la discrétisation de l'énergie interne. On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} m'_c(t) = 0, \end{array} \right. \quad (G.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}_p(t), \end{array} \right. \quad (G.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c(t) = Vol(\vec{x}_p) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{x}_p, \end{array} \right. \quad (G.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = -V_p (\vec{\nabla}(P+Q))_c = \sum_{c \in \{p\}} (P_c + Q_c) \vec{C}_{cp}, \end{array} \right. \quad (G.1d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c \frac{de_c}{dt} = -(P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p \end{array} \right. \quad (G.1e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c = \mathcal{P}(\rho_c, e_c). \end{array} \right. \quad (G.1f)$$

La mise à jour de l'énergie interne n'est plus ici calculée avec $P\Delta V$ (comme dans VNR et SGPC), mais fait travailler la force qui intervient dans l'équation de quantité de mouvement. Cette modification permet de rendre le schéma conservatif en énergie totale de manière triviale.

G.1.3 Système discret d'équations

La viscosité est quant à elle calculée de la même manière que dans le schéma SGPC, *ie* au début de la phase de prédiction.

Phase de prédiction

Dans cette première étape, l'ensemble des flux est évalué au temps n et les valeurs prédites sont au temps $n + \frac{1}{2}$. En effet, on ne se déplace que de $\frac{\Delta t}{2}$ dans ce prédicteur contrairement au prédicteur utilisé dans SGPC où l'on se déplaçait d'un pas de temps entier en prédiction comme en correction.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c^{n+\frac{1}{2}} = m_c^n, \end{array} \right. \quad (G.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_p^{n+\frac{1}{2}} = \vec{x}_p^n + \frac{\Delta t^n}{2} \vec{u}_p^n, \end{array} \right. \quad (G.2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{x}_p^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (G.2c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_c^{n+\frac{1}{2}} = e_c^n - \frac{\Delta t^n}{2m_c} (P_c^n + Q_c^n) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n, \end{array} \right. \quad (G.2d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+\frac{1}{2}}, e_c^{n+\frac{1}{2}}). \end{array} \right. \quad (G.2e)$$

Phase de correction

Durant cette phase, les flux sont évalués au temps $n + \frac{1}{2}$ à l'aide des valeurs prédites.

Les équations discrétisées sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c^{n+1} = m_c^n, \\ \vec{x}_p^{n+1} = \vec{x}_p^n + \Delta t^n \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2}, \\ V_c^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+1} \cdot \vec{x}_p^{n+1}, \\ m_p \frac{\vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n}{\Delta t^n} = m_p \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{c \in \{p\}} (P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \\ e_c^{n+1} - e_c^n = -\frac{\Delta t^n}{m_c} \left(P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n \right) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2}, \\ P_c^{n+1} = \mathcal{P}(\rho_c^{n+1}, e_c^{n+1}). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(G.3a)} \\ \text{(G.3b)} \\ \text{(G.3c)} \\ \text{(G.3d)} \\ \text{(G.3e)} \\ \text{(G.3f)} \end{array}$$

Algorithme

Phase de prédiction

1. mise à jour du pas de temps $\Delta t^n = \min_c (CFL \frac{L_c^n}{c_c^n})$
2. calcul de la pseudo-viscosité Q_c^n avec la formule (4.2),
3. déplacement du maillage : calcul de $\vec{x}_p^{n+\frac{1}{2}}$ avec (G.2b) ,
4. calcul des vecteurs $\vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\vec{N}_{cp}^{n+\frac{1}{2}}$,
5. mise à jour du volume $V_c^{n+\frac{1}{2}}$ selon la formule (G.2c)
6. détermination de $\rho_c^{n+\frac{1}{2}} = \frac{m_c}{V_c^{n+\frac{1}{2}}}$, détermination de $e_c^{n+\frac{1}{2}}$ et $P_c^{n+\frac{1}{2}}$ avec les équations (G.2d) et (G.2e) puis calcul de la vitesse du son.

Phase de correction

pas de calcul du pas de temps Δt^n dans cette partie ni de Q_c^n

1. détermination de la vitesse nodale \vec{u}_p^{n+1} grâce à (G.3d),
2. déplacement du maillage : calcul de \vec{x}_p^{n+1} avec (G.3b),
3. calcul des vecteurs \vec{C}_{cp}^{n+1} et \vec{N}_{cp}^{n+1} ,
4. mise à jour du volume V_c^{n+1} selon la même formule qu'en prédiction à savoir (G.3c) ,
5. détermination de ρ_c^{n+1} , de e_c^{n+1} avec l'équation explicite (G.3e), de P_c^{n+1} ainsi que de la vitesse du son c_c^{n+1} .

G.2 Propriétés de conservation et d'entropie

G.2.1 Semi-discrétisation spatiale

La semi discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement étant identique à celle du schéma VNR, nous obtenons donc par la méthode décrite en sous section 3.2.1 les deux premières conservations (masse et quantité de mouvement).

Conservation de l'énergie totale

Nous allons dans ce paragraphe vérifier la conservation en énergie totale. On utilise toujours la définition :

$$m_c E_c = m_c e_c + \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p$$

En utilisant les équations (G.1e) et (G.1d), on a :

$$\begin{aligned} \sum_c \frac{d(m_c E_c)}{dt} &= - \sum_c (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} m_p \vec{u}_p \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt} \\ &= - \sum_c (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \sum_{c' \in \{p\}} (P_{c'} + Q_{c'}) \vec{u}_p \cdot \vec{C}_{c'p} \end{aligned}$$

D'où en utilisant l'équation (3.15) :

$$\sum_c \frac{d(m_c E_c)}{dt} = - \sum_c (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + \sum_p \sum_{c \in \{p\}} (P_c + Q_c) \vec{u}_p \cdot \vec{C}_{cp} = 0$$

On obtient ainsi la conservation de l'énergie totale.

Condition d'entropie

On part toujours de la même équation de départ dans laquelle on injecte l'équation (G.1e) :

$$\begin{aligned} m_c T_c \frac{dS_c}{dt} &= m_c \frac{de_c}{dt} + m_c P_c \frac{d(\frac{1}{\rho_c})}{dt} \\ &= - (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + m_c P_c \frac{d(\frac{1}{\rho_c})}{dt} \\ &= - (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + P_c \frac{dV_c}{dt} \end{aligned}$$

À l'aide de l'équation (1.2), on obtient :

$$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = - (P_c + Q_c) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p + P_c \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp} \cdot \vec{u}_p = - Q_c V_c \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c \geq 0$$

G.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle

Conservation de la masse

Etant en considération lagrangienne, la conservation de la masse est directe.

Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la masse d'une maille duale au cours du temps (section 3.2.2) est à nouveau utilisée et la méthode suivie ici est identique à celle de VNR.

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_p \Delta t^n m_p^n \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{G.4})$$

$$= \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \sum_p \Delta t^n \sum_{c \in \{p\}} (P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{G.5})$$

d'après l'équation (G.3d). En intervertissant les deux sommes, on obtient :

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n + \Delta t^n \sum_c (P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}}.$$

On utilise finalement la propriété (1.3b) des vecteurs \vec{C}_{cp} pour obtenir :

$$\sum_p m_p^{n+1} \vec{u}_p^{n+1} = \sum_p m_p^n \vec{u}_p^n.$$

Conservation de l'énergie totale

Nous allons dans ce paragraphe vérifier que le changement de prédicteur-correcteur, par rapport à celui de SGPC permet bien d'obtenir la conservation, en discret, de l'énergie totale. On utilise toujours la définition :

$$m_c E_c = m_c e_c + \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} \vec{u}_p \cdot \vec{u}_p$$

En utilisant les équations (G.3d) et (G.3e), on a :

$$\begin{aligned} & \sum_c m_c E_c^{n+1} - m_c E_c^n \\ &= \sum_c m_c (e_c^{n+1} - e_c^n) + \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \frac{m_p}{2} (\vec{u}_p^{n+1} \cdot \vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n \cdot \vec{u}_p^n) \\ &= - \sum_c \Delta t^n \left(P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n \right) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2} + \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} m_p (\vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n) \cdot \frac{(\vec{u}_p^{n+1} + \vec{u}_p^n)}{2} \\ &= - \sum_c \Delta t^n \left(P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n \right) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2} + \sum_c \sum_{p \in \{c\}} \frac{1}{Nb_p} \Delta t^n \sum_{c' \in \{p\}} (P_{c'}^{n+\frac{1}{2}} + Q_{c'}^n) \vec{C}_{c'p}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^{n+1} + \vec{u}_p^n)}{2} \\ &= - \sum_c \Delta t^n \left(P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n \right) \sum_{p \in \{c\}} \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2} + \Delta t^n \sum_p \sum_{c \in \{p\}} (P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n) \vec{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^{n+1} + \vec{u}_p^n)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Condition d'entropie

Tout comme pour les autres schémas, nous nous sommes intéressées au second principe de la thermodynamique qui s'écrit en discret :

$$T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) = e_c^{n+1} - e_c^n + \frac{P_c^{n+\frac{1}{2}}}{2}(V_c^{n+1} - V_c^n),$$

À l'aide de l'équation (G.3e), l'équation se simplifie en :

$$\begin{aligned} T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) &= -\frac{\Delta t^n}{m_c} \sum_{p \in \{c\}} \left(P_c^{n+\frac{1}{2}} + Q_c^n \right) \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1}}{2} + \frac{P_c^{n+\frac{1}{2}}}{2}(V_c^{n+1} - V_c^n) \\ &= -\underbrace{\frac{\Delta t^n}{m_c} Q_c^n V_c^n (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})_c^n}_{\geq 0} + (A) P_c^{n+1,1} + (B) Q_c^n. \end{aligned}$$

- Dans un premier temps, déterminons les termes d'erreur issus de (A)

$$(A) = \frac{-\Delta t^n}{m_c} \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1})}{2} + \frac{V_c^{n+1} - V_c^n}{m_c}$$

Nous noterons par la suite $\vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1}}{2}$ Or, d'après (1.15) et (1.17), on a :

$$\begin{cases} V_c^{n+1} - V_c^n = \frac{\Delta t^n}{2} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{x}_p^n + \frac{(\Delta t^n)^2}{4} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}}, \\ \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{x}_p^n \end{cases}$$

Par analogie, on a :

$$\sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{x}_p^{n+\frac{1}{2}},$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} (A) &= \frac{-\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{x}_p^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{2m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{x}_p^n \\ &\quad + \frac{(\Delta t^n)^2}{4m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-(\Delta t^n)^2}{4m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{u}_p^n + \frac{(\Delta t^n)^2}{4m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(\Delta t^n)^2}{8m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \left(\vec{u}_p^{n+1} - \vec{u}_p^n \right) \\ &= \frac{(\Delta t^n)^3}{8m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\vec{u}_{p^+}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}_{p^-}^{n+\frac{1}{2}}) * \vec{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- Déterminons désormais les termes d'erreur issus de (B)

$$(B) = \frac{-\Delta t^n}{m_c} \left[- \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_p^n + \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\bar{u}_p^{n+1} + \bar{u}_p^n}{2} \right]$$

En injectant $\bar{u}_p^{n+1} = \bar{u}_p^n + \Delta t^n \bar{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}$, dans l'expression de (B), on a :

$$(B) = \frac{-\Delta t^n}{m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{C}_{cp}^n) \cdot \bar{u}_p^n - \frac{(\Delta t^n)^2}{2m_c} \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}.$$

Or, on sait, d'après (1.14), que

$$\bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{C}_{cp}^n = \frac{\Delta t^n}{4} \left(\frac{-v_{p-}^n + v_{p+}^n}{u_{p-}^n - u_{p+}^n} \right);$$

ceci nous permet finalement de simplifier l'expression de (B) en :

$$(B) = \frac{-(\Delta t^n)^2}{4m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\bar{u}_{p+}^n - \bar{u}_{p-}^n) * \bar{u}_p^n - \frac{(\Delta t^n)^2}{2m_c} \sum_{p \in \{c\}} \bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, le schéma SGPC n'est pas entropique :

$$\begin{aligned} T_c(S_c^{n+1} - S_c^n) &= \underbrace{\frac{\Delta t^n}{m_c} V_c^n Q_c^n \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)_c^n}_{\geq 0} - (\Delta t^n)^2 \frac{Q_c^n}{4m_c} \left[\sum_{p \in \{c\}} \left((\bar{u}_{p+}^n - \bar{u}_{p-}^n) * \bar{u}_p^n + 2\bar{C}_{cp}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + \\ &(\Delta t^n)^3 \frac{P_c^{n+\frac{1}{2}}}{8m_c} \sum_{p \in \{c\}} (\bar{u}_{p+}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{p-}^{n+\frac{1}{2}}) * \bar{\gamma}_p^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusion

- Le schéma SGPC n'est pas entropique
- L'erreur sur la conservation en entropie est en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^3 \Delta x)$. Or,

$$\begin{aligned} A \Delta t \Delta x^3 + B \Delta t^2 \Delta x^2 + C \Delta t^3 \Delta x &\leq \max(A, B, C) (\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^3 \Delta x) \\ &\leq \max(A, B, C) \Delta t \Delta x (\Delta x^2 + \Delta t \Delta x + \Delta t^2) \leq \max(A, B, C) \Delta t \Delta x (\Delta x^2 + 2\Delta t \Delta x + \Delta t^2) \\ &= \max(A, B, C) \Delta t \Delta x (\Delta x + \Delta t)^2 \leq 2\max(A, B, C) \Delta t \Delta x (\Delta x^2 + \Delta t^2) \\ &= \max(A, B, C) (\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^3 \Delta x). \end{aligned}$$

Ainsi, l'erreur faite sur la conservation en entropie lors d'écoulements isentropiques est en $O(\Delta t \Delta x^3 + \Delta t^3 \Delta x)$.

G.3 Résultats

Quel que soit le cas test, nous n'avons pas observé de différences significatives entre les schémas SGPC et SGPC2, les profils de densité, pression, vitesse et énergie

Bibliographie

- [1] T. Barth and D. C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured grids. *AIAA paper 89-0366*, (1989).
- [2] X. Blanc and B. Deprés. Numerical methods for inertial confinement fusion, 2010. Cours au CEMRACS 2010 Disponible à <http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs10/PROJ/Blanc-Despres-lectures.pdf>.
- [3] J. C. Campbell and M. J. Shashkov. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm. *J. Comp. Phys.*, 172, (2001), 739 - 765.
- [4] A. J. Caramana, D. E. Burton, M. J. Shashkov, and P. P. Whalen. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy. *J. Comp. Phys.*, 146, (1998), 227-262.
- [5] A. J. Caramana, M. J. Shashkov, and P. P. Whalen. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations. *J. Comp. Phys.*, 144, (1998), 70-97.
- [6] G. Carré. Mesure de l'ordre numérique sur le cas test de kidder, 2012. Communication personnelle.
- [7] G. Carré, S. Del Pino, B. Després, and E. Labourasse. A cell-centered lagrangian hydrodynamics scheme on general unstructured meshes in arbitrary dimension. *J. Comp. Phys.*, 228, (2009), 5160-5183.
- [8] G. Carré, S. Del Pino, K. Pichon Gostaf, E. Labourasse, and V. Shapeev. Polynomial least-squares reconstruction for semi-lagrangian cell-centered hydrodynamic schemes. *ESAIM, proceedings*, 28, (2009), 100-116.
- [9] A. Claisse, B. Després, E. Labourasse, and F. Ledoux. A new exceptional points method with application to cell-centered lagrangian schemes and curved meshes. *J. Comp. Phys.*, 231, (2011), 4324-4354.
- [10] B. Després and E. Labourasse. Stabilization of cell-centered compressible lagrangian methods using subzonal entropy. *J. Comp. Phys.*, (2012).
- [11] B. Després and C. Mazeran. Lagrangian gas dynamics in 2d and lagrangian systems. *Arch. Rat. Mech. anal.*, 178, (2005), 327-372.
- [12] B. Després and C. Mazeran. Symmetrization of lagrangian gas dynamics and lagrangian solvers. *Comptes Rendus Académie des Sciences (Paris)*, 331, (2011), 475-480.
- [13] J. K. Dukowicz and B. Meltz. Vorticity errors in multidimensional lagrangian codes. *J. Comp. Phys.*, 99, (1992), 115-134.
- [14] D. Herbez. Cas test choc oblique, 2012. Communication personnelle.

- [15] J. R. Kamm. Evaluation of the sedov-von neumann-taylor blast wave solution. *disponible à [http ://cococubed.asu.edu/papers/kamm_2000.pdf](http://cococubed.asu.edu/papers/kamm_2000.pdf)*, (2000).
- [16] J. R. Kamm and F. X. Timmes. On efficient generation of numerically robust sedov solutions. *Technical Report LA-UR-07-2849*, (2007).
- [17] R. E. Kidder. Laser-driven compression of hollow shells : power requirements and stability limitations. *Nuclear Fusion* 1, (1976), 3-14.
- [18] P. Le Tallec. Formulation hydrodynamique multimatériaux, mars 2012. Rapport.
- [19] F. Ledoux, J. C. Weill, and Y. Bertrand. Definition of a generic mesh data stucture in the high performance computing context. *Developments and application in engineering computational technology, Saxe-Coburg Publication*, 26, (2010), 49-80.
- [20] P. H. Maire. A high-order cell centered lagrangian scheme for two-dimensional compressible fluid flows on unstructured meshes. *J. Comp. Phys.*, 228, (2009), 2391-2425.
- [21] P. H. Maire. A unified sub-cell force-based discretization for cell-centered lagrangian hydrodynamics on polygonal grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011.
- [22] P. H. Maire. Contribution to the numerical modeling of inertial confinement fusion, habilitation à diriger des recherches. Bordeaux Univerity 2011, disponible à : [http ://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/58/97/58/PDF/hdr_main.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/58/97/58/PDF/hdr_main.pdf).
- [23] P. H. Maire. A high-order one-step sub-cell force-based discretization for cell-centered lagrangian hydrodynamics on polygonal grids. *Computers & Fluids*, 46, issue 1, July 2011, 341-347.
- [24] P. H. Maire, R. Abgrall, J. Breil, and J. Ovadia. A cell-centered lagrangian scheme for 2d compressible flow problems. *Siam J. Sci. Comp.* , 29, (2007).
- [25] P. H. Maire and B. Nkonga. Multi-scale godunov-type method for cell-centered discrete lagrangian hydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 228, (2009), 799-821.
- [26] W. F. Noh. Errors for calculations of strong shocks using artificial viscosity and an artificial heat flux. *J. Comp. Phys.*, 72,, (1987), 78-120.
- [27] P. Rouzier. équations d'état de type Mie-Grüneisen. Communication personnelle.
- [28] G. A. Sod. A survey of finite difference methods for systems of nonlinear conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 27, (1978), 1-31.
- [29] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer, 1999.
- [30] V. Venkatakrishnan. Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstrutured grids with limiters. *J. Comp. Phys.*, 118, (1995) 120-130.
- [31] J. Von Neumann and R. D. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. appl. Phys.*, 21, (1950), 232-237.
- [32] M. L. Wilkins. Calculations of elastic-plastic flow. *Methods Comput. Phys.* 3, 1, (1964).