

1 Équations étudiées et notations

1.1 Introduction

Équation Nous nous intéressons au problème de Cauchy formé d'une EDP linéaire avec des dérivées d'ordre un en temps et d'ordre impair arbitraire en espace munie de la donnée initiale u_0 .

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x^{2p+1} u(t, x) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Objectif Quantifier l'erreur de convergence des schémas numériques aux différences finies en fonction de la régularité de la donnée initiale.

Cas particuliers

- $-p = 0$ équation de transport $\partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0$,
- $-p = 1$ équation d'Airy $\partial_t u(t, x) + \partial_x^3 u(t, x) = 0$.

1.2 Schémas numériques utilisés

Le pas de temps et celui d'espace sont pris uniformes en $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Discretisation de la donnée initiale

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0(x) dx,$$

θ -schéma décentré à droite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j+1}^{n+1}}{\Delta x^{2p+1}} \right) + (1-\theta) \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j}^n}{\Delta x^{2p+1}} \right) = 0.$$

θ -schéma décentré à gauche

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j+1}^{n+1}}{\Delta x^{2p+1}} \right) + (1-\theta) \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j}^n}{\Delta x^{2p+1}} \right) = 0.$$

θ -schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\theta}{2} \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j+1}^{n+1}}{\Delta x^{2p+1}} + \frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j}^{n+1}}{\Delta x^{2p+1}} \right) + \frac{1-\theta}{2} \left(\frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j+1}^n}{\Delta x^{2p+1}} + \frac{\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k u_{p-k+j}^n}{\Delta x^{2p+1}} \right) = 0.$$

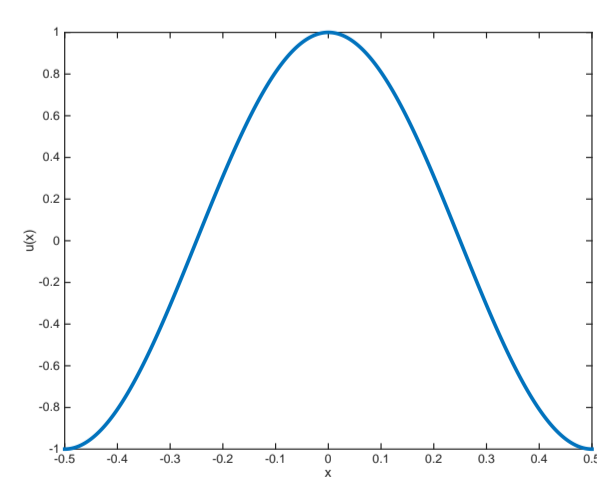
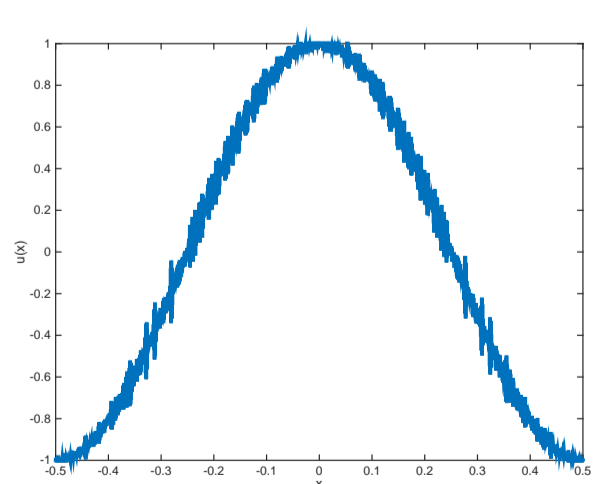
Erreur de convergence

$$e_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(t^n, y) dy - u_j^n.$$

2 Donnée initiale régulière

2.1 Stabilité

	p pair		p impair
	p = 0 (équation de transport)	p ≠ 0	
décentré à droite	stable $\theta \geq \frac{1}{2} + \frac{\Delta x}{2\Delta t}$	instable	stable $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^{2p+1}}{2\Delta t}$
décentré à gauche	stable $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}$	stable $\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^{2p+1}}{2\Delta t}$	instable
schéma centré	stable $\theta \geq \frac{1}{2}$	stable $\theta \geq \frac{1}{2}$	stable $\theta \geq \frac{1}{2}$



Sans CFL : $C_{nb} = \frac{2^{2p}\Delta t}{\Delta x^{2p+1}} = 1 + 10^{-8}$

Avec CFL : $C_{nb} = \frac{2^{2p}\Delta t}{\Delta x^{2p+1}} = 1$

Équation d'Airy, (p = 1), schéma décentré à droite.

2.2 Consistance : ϵ_j^n

θ -schéma décentré (à droite ou à gauche)

$$\|\epsilon^n\|_{l_j^2} \lesssim \Delta t \|\partial_x^{4p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \Delta x \|\partial_x^{2p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})},$$

θ -schéma centré

$$\|\epsilon^n\|_{l_j^2} \lesssim \Delta t \|\partial_x^{4p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \Delta x^2 \|\partial_x^{2p+3} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})}.$$

2.3 Convergence pour une donnée initiale suffisamment régulière

Théorème 1. Supposons que $u_0 \in H_x^{4p+2}(\mathbb{R})$ (ou $u_0 \in H_x^3(\mathbb{R})$ si $p = 0$), alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

θ -schéma décentré (à droite ou à gauche)

$$\|\|\epsilon^n\|_{l_j^2}\|_{l_n^\infty} \lesssim \Delta t \|\partial_x^{4p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \Delta x \|\partial_x^{2p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})}.$$

θ -schéma centré

$$\|\|\epsilon^n\|_{l_j^2}\|_{l_n^\infty} \lesssim \Delta t \|\partial_x^{4p+2} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \Delta x^2 \|\partial_x^{2p+3} u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})}.$$

3 Donnée initiale peu régulière

3.1 Approximation par noyau régularisant

Soient m la régularité de u_0 (i.e $u_0 \in H^m(\mathbb{R})$) et $(\varphi^\epsilon)_\epsilon$ une famille de noyaux de régularisation ayant leurs $2m - 1$ premiers moments nuls.

Lemme 1. Si $u_0 \in H^m(\mathbb{R})$ alors $u_0^\epsilon = u_0 \star \varphi^\epsilon$ approche u_0 dans $H^s(\mathbb{R})$ à l'ordre ϵ^{m-s} :

$$\|u_0 - u_0^\epsilon\|_{H^s(\mathbb{R})} \lesssim \epsilon^{m-s} \|u_0\|_{H^m(\mathbb{R})}.$$

Lemme 2. Soit $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geq m$ et $u_0 \in H_x^m(\mathbb{R})$, alors

$$\|\partial_x^k u_0^\epsilon\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \|\partial_x^m u_0\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \|\partial_x^{k-m} \varphi\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \frac{1}{\epsilon^{k-m}}.$$

3.2 Résultat principal

Théorème 2. Soit $u_0 \in H_x^m(\mathbb{R})$ avec $0 < m$, alors l'erreur de convergence est majorée par

	p pair		p impair
	p = 0 équation de transport	p ≠ 0	
décentré à droite	$\Delta t^{\frac{\min(m,2)}{2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$		$\Delta t^{\frac{\min(m,4p+2)}{4p+2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+2)}{2p+2}}$
décentré à gauche	$\Delta t^{\frac{\min(m,2)}{2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,4p+2)}{4p+2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+2)}{2p+2}}$	
schéma centré	$\Delta t^{\frac{\min(m,2)}{2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,3)}{3}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,4p+2)}{4p+2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+3)}{2p+3}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,4p+2)}{4p+2}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+3)}{2p+3}}$

3.3 Schéma de Crank-Nicholson, $\theta = \frac{1}{2}$

	p pair		p impair
	p = 0 équation de transport	p ≠ 0	
décentré à droite	$\Delta t^{\frac{\min(m,3)}{3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$		$\Delta t^{\frac{\min(m,6p+3)}{6p+3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+2,m)}{2p+2}}$
décentré à gauche	$\Delta t^{\frac{\min(m,3)}{3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,6p+3)}{6p+3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+2,m)}{2p+2}}$	
schéma centré	$\Delta t^{\frac{\min(m,3)}{3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,3,m)}{3}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,6p+3)}{6p+3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+3,m)}{2p+3}}$	$\Delta t^{\frac{\min(m,6p+3)}{6p+3}} + \Delta x^{\frac{\min(m,2p+3,m)}{2p+3}}$

3.4 En fonction de Δx seulement

Lorsque la CFL est vérifiée : $\Delta t = \frac{\Delta x^{2p+1}}{2^{2p}}$, les résultats précédents deviennent

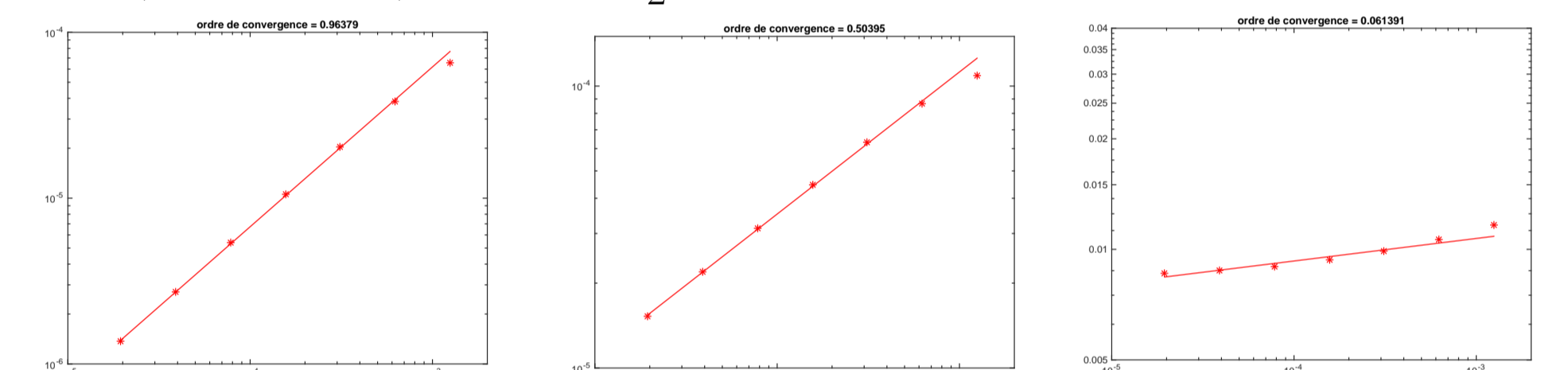
	p pair		p impair
	p = 0 équation de transport	p ≠ 0	
décentré à droite	$\Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$		$\Delta x^{\frac{\min(m,2p+2)}{2p+2}}$
décentré à gauche	$\Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$	$\Delta x^{\frac{\min(m,2p+2)}{2p+2}}$	
schéma centré	$\Delta x^{\frac{\min(m,2)}{2}}$ ($\Delta x^{\frac{\min(m,3)}{3}}$ si $\theta = \frac{1}{2}$)	$\Delta x^{\frac{\min(m,2p+3)}{2p+3}}$	$\Delta x^{\frac{\min(m,2p+3)}{2p+3}}$

4 Résultats numériques

4.1 Équation de transport

Schéma décentré à gauche, $\theta = \frac{1}{2}$ et $\Delta t = \Delta x$

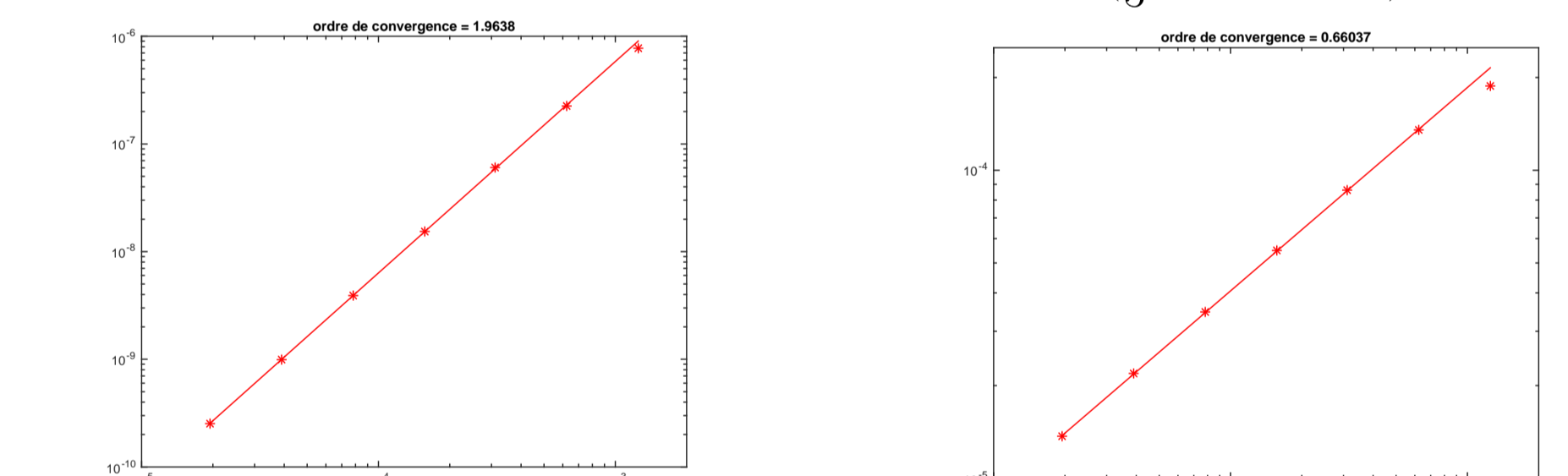
Ordre numérique : 0.964 (1 en théorie) Ordre numérique : 0.504 ($\frac{1}{2}$ en théorie) Ordre numérique : 0.061 (0 en théorie)



$u_0(x) = \cos(2\pi x)$ u_0 : fonction chapeau u_0 : fonction indicatrice

Schéma centré, $\theta = \frac{1}{2}$ et $\Delta t = \Delta x$

Ordre numérique : 1.964 (2 en théorie) Ordre numérique : 0.660 ($\frac{2}{3}$ en théorie)

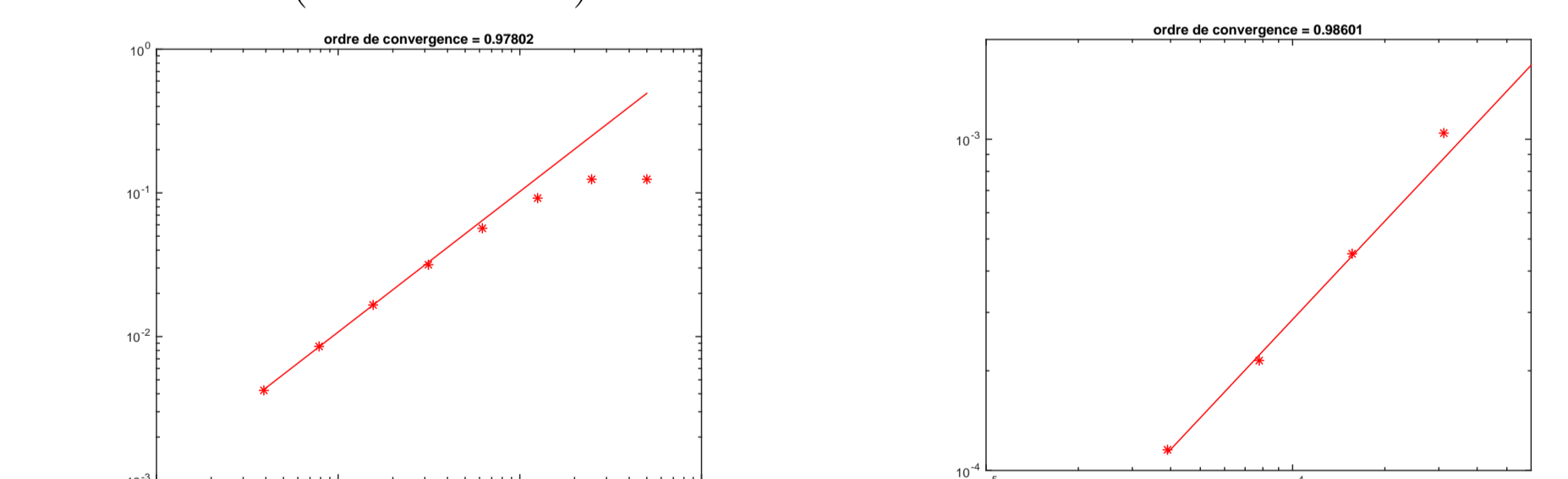


$u_0(x) = \cos(2\pi x)$ u_0 : fonction chapeau

4.2 Équation d'Airy

Schéma décentré à droite, $\Delta t = \Delta x$ et $u_0(x) = \cos(2\pi x)$

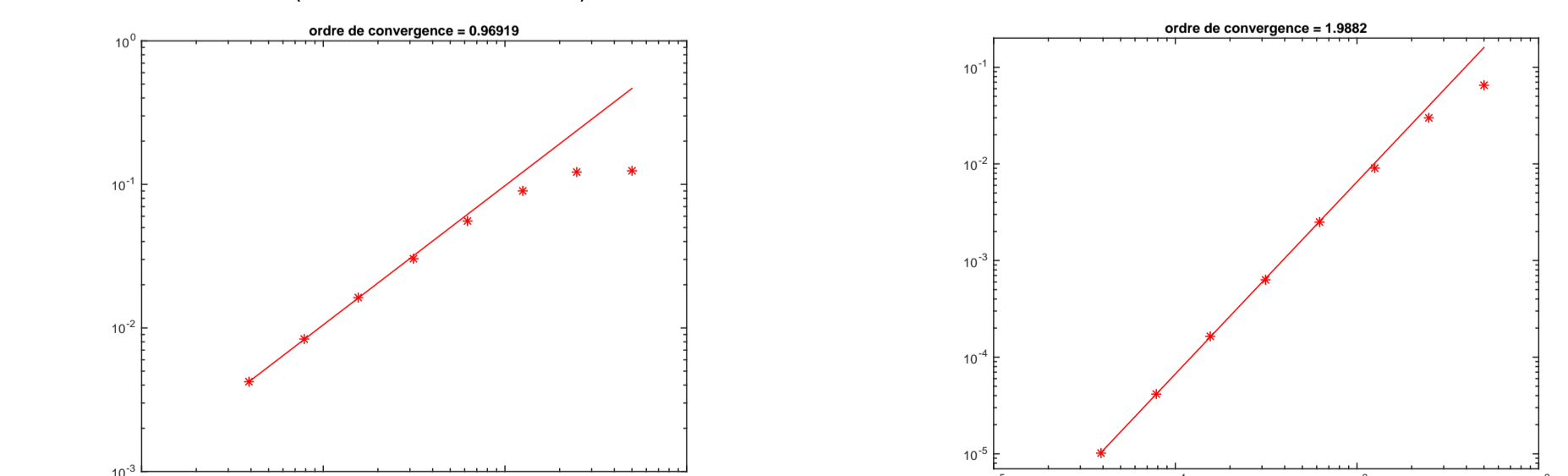
Ordre numérique : 0.978 (1 en théorie) Ordre numérique : 0.986 (1 en théorie)



$\theta = 1$ $\theta = \frac{1}{2}$

Schéma centré, $\Delta t = \Delta x$ et $u_0(x) = \cos(2\pi x)$

Ordre numérique : 0.969 (1 en théorie) Ordre numérique : 1.989 (2 en théorie)



$\theta = 1$ $\theta = \frac{1}{2}$