

Airbus Compressed Sensing

Clémentine Courtès, Geneviève Dusson, Roméo Hatchi, Roberto Molina,
Albert Thomas

January 16, 2015

Objectif : Reconstruire des données en un coût de calcul le plus faible possible, à partir de mesures

Problématique : Comment s'affranchir des contraintes "classiques" (nombre d'échantillons nécessaires, fréquence d'échantillonnage dépendant du signal étudié ...) tout en gardant la précision voulue ?

Moyen utilisé : Le compressed sensing permet de retrouver un signal *a priori* creux, avantages de cette méthode :

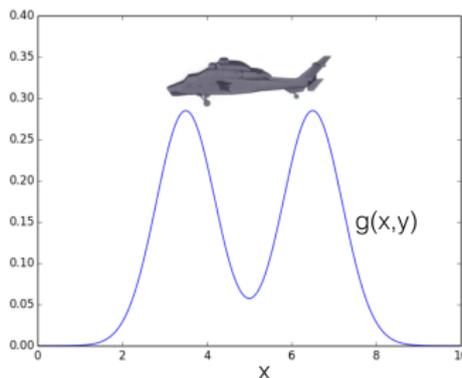
- Beaucoup moins d'échantillons nécessaires
- Méthode indépendante du signal à reconstruire

- 1 Présentation du problème
- 2 Reconstruction du signal en séries de Fourier
- 3 Compressed sensing
- 4 Conclusion et perspectives

Modèle des points brillants

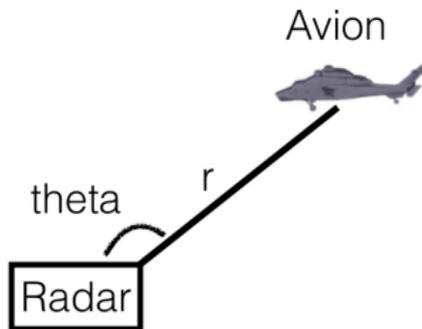
Ce qu'on cherche :

- Trouver les caractéristiques d'un avion survolant une zone donnée.
- Mathématiquement : Une fonction sparse ayant des pics aux positions stratégiques de l'avion, $g(x, y)$, x, y variables spatiales



Ce qu'on peut mesurer :

- Mesure du champ électromagnétique $\vec{E}(r) = \vec{E}(f, \theta)$.
- Calcul des coefficients de Fourier de g grâce à un code de calcul : $G(f, \theta)$, f fréquence du radar, θ angle d'incidence.



But : Retrouver les K points brillants (pics) de la fonction $g(x, y)$ à partir de $G(f, \theta)$.

Réécriture du problème

On cherche les K points non nuls de $g(x, y)$:

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G(f, \theta) e^{-2\pi i(xX+yY)} dXdY$$

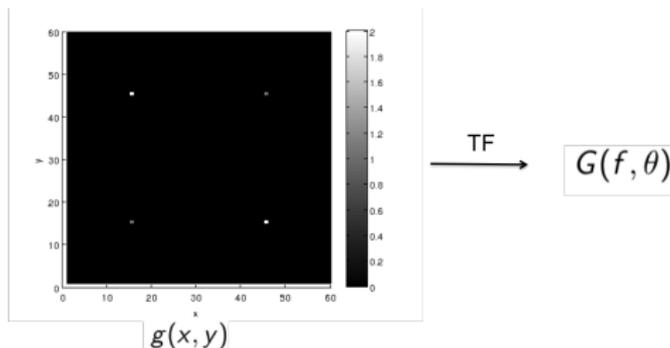
avec

$$X = \frac{2f \sin(\theta)}{c}, \quad Y = \frac{2f \cos(\theta)}{c}$$

Notations :

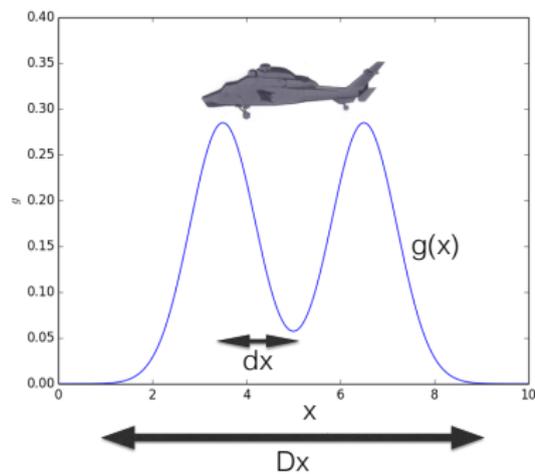
- f fréquence émise par le radar,
- c vitesse de la lumière,
- θ angle d'incidence,
- K nombre de points brillants.

Exemple choisi

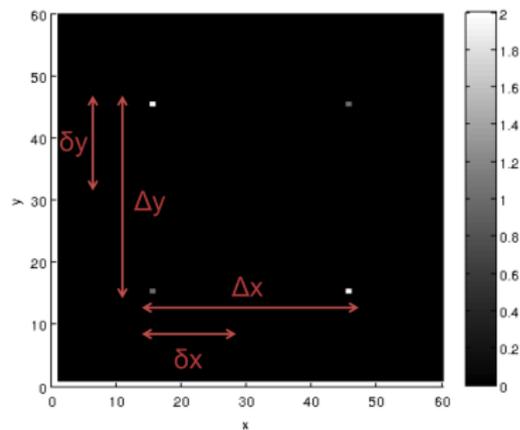


Précision souhaitée

- $\delta x, \delta y$ pas en espace,
- $\Delta x, \Delta y$, zone d'intérêt en espace.



Exemple choisi



- 1 Présentation du problème
- 2 Reconstruction du signal en séries de Fourier**
- 3 Compressed sensing
- 4 Conclusion et perspectives

Théorème de Shannon : Pour retrouver exactement le signal $g(x, y)$, on doit prendre assez de points d'échantillon plus précisément :

$$\Delta f = \frac{c}{2\delta x}, \quad \Delta\theta = \frac{c}{2f_0\delta y},$$

$$\delta f = \frac{c}{2\Delta x}, \quad \delta\theta = \frac{c}{2f_0\Delta y},$$

La fonction $g(x, y)$ est approchée par :

$$g(x, y) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} G(X_{n_1}, Y_{n_2}) e^{-2\pi i(xX_{n_1} + yY_{n_2})}$$

$$X = \frac{2f \sin(\theta)}{c}, \quad Y = \frac{2f \cos(\theta)}{c}$$

Sur notre exemple

Image d'origine

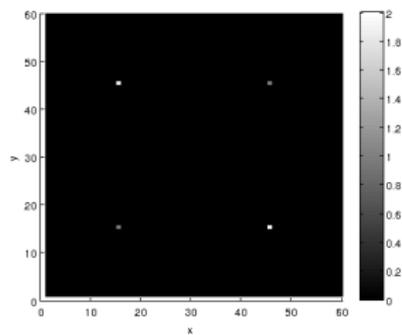
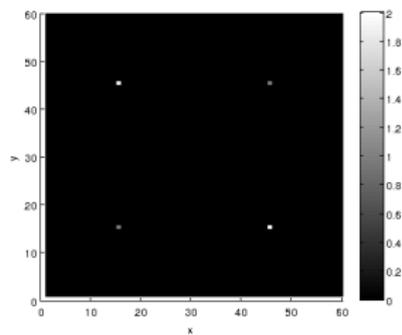


Image retrouvée par Fourier



Coût : Algorithme FFT en $O(N \log N)$ où N est la taille de l'image (au lieu de $O(N^2)$)

Problème

FFT pour $N_f N_\theta$ valeurs de $G(f, \theta)$ mais seulement $K \ll N$ valeurs intéressantes de $g(x, y)$.

- 1 Présentation du problème
- 2 Reconstruction du signal en séries de Fourier
- 3 Compressed sensing**
- 4 Conclusion et perspectives

Compressed sensing : Principe

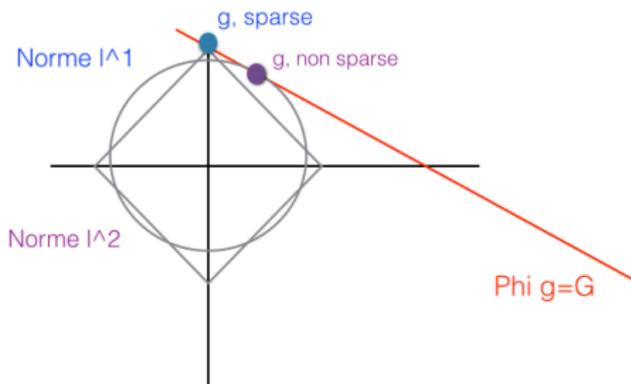
Connaissance à priori : Le signal est creux dans une certaine base.

Principe : Acquérir des données déjà compressées.

Méthodes

1. Sélectionner aléatoirement certains coefficients de G , en calculant en même temps la matrice d'échantillonnage Φ .
2. Minimiser la norme l^0 de g vérifiant $G = \Phi g$, où $|g|_0 = \text{Card}\{n, g_n \neq 0\}$.

Remarque L'étape de minimisation l^0 est remplacée par une minimisation l^1 .



Application à notre problème

Exemple

Dans le modèle des points brillants, nous savons *a priori* que le signal g est compressible dans la base de Fourier.

Nous sélectionnons M coefficients de G aléatoirement

$$\begin{pmatrix} G(X_1) \\ \vdots \\ G(X_M) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(e^{2i\pi x X} \right)}_{\substack{X=x_1, \dots, x_N \\ X=X_1, \dots, X_M}} \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

Question :

A quelle condition retrouve-t-on la fonction d'intérêt $g(x, y)$?

Propriété d'isométrie restreinte (RIP en anglais)

Récupération sans bruit

But : retrouver $g \in \mathbb{R}^N$ (presque) creux, qui vérifie $G = \Phi g$ avec $G \in \mathbb{R}^M$, $\Phi \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$ ($M < N$).

Cela revient à chercher l'élément minimisant le problème suivant

$$\min_{\bar{g} \in \mathbb{R}^N; G = \Phi \bar{g}} \|\bar{g}\|_1. \quad (1)$$

Définition

Soit $K \in \mathbb{N}^*$, notons δ_K le plus petit réel positif tel que

$$(1 - \delta_K)\|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_K)\|x\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, K - \text{creux.}$$

Théorème

Si $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ alors $g^* = \operatorname{argmin} (1)$ vérifie

$$\begin{cases} \|g^* - g\|_1 \leq C_0 \|g - g_K\|_1 \\ \|g^* - g\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}} \|g - g_K\|_1. \end{cases}$$

Propriété d'isométrie restreinte

Récupération sans bruit

En particulier, si g est K -creux, la récupération est exacte : $\bar{g} = g$. Dans le cas où g est creux, il est naturel de chercher la solution la plus creuse de $G = \Phi \bar{g}$ et de s'intéresser au problème suivant (plus coûteux)

$$\min_{\bar{g} \in \mathbb{R}^N; G = \Phi \bar{g}} \|\bar{g}\|_0.$$

Le théorème précédent nous dit que les deux problèmes sont formellement équivalents au sens que :

- si $\delta_{2K} < 1$ alors le problème l^0 a une unique solution K -creuse. En effet, on a $\Phi g_1 \neq \Phi g_2, \forall g_1 \neq g_2$ K -creux et les sous-matrices $M \times 2K$ de Φ sont de rang maximal et ressemblent à des isométries, avec des valeurs propres de $\Phi^t \Phi$ proches de ± 1 .
- si $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$, alors la solution du problème l^1 est celle du problème l^0 : la relaxation convexe est exacte.

Propriété d'isométrie restreinte

Récupération avec bruit

Problème (plus réaliste) : retrouver $g \in \mathbb{R}^N$ (presque) creux, qui vérifie $G = \Phi g + z$ avec $G \in \mathbb{R}^M$, $\Phi \in M_{M \times N}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}^M$ (inconnu).
Cela revient à chercher l'élément minimisant le problème suivant

$$\min_{\bar{g} \in \mathbb{R}^N; \|G - \Phi \bar{g}\|_2 \leq \varepsilon} \|\bar{g}\|_1 \quad (2)$$

avec $\varepsilon > 0$.

Théorème

Si $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ et $\|z\|_2 \leq \varepsilon$ alors $g^* = \operatorname{argmin} (2)$ vérifie

$$\|g^* - g\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}} \|g - g_K\|_1 + C_1 \varepsilon.$$

avec C_0, C_1 constantes.

En pratique, il est vérifié expérimentalement qu'on retrouve le signal quand :

- Les coefficients de Fourier sont choisis aléatoirement, i.e. la matrice Φ est aléatoire.
- Le nombre d'échantillons M est supérieur à $4K$, le nombre de coefficients non nuls de g .

Différentes stratégies d'échantillonnage

Échantillonnage naturel :

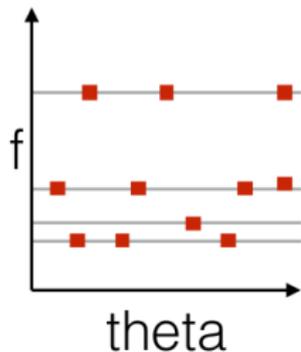
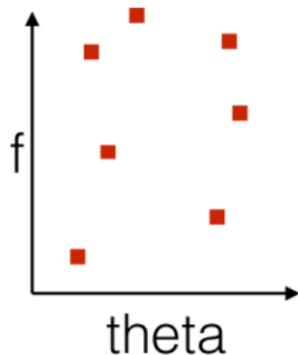
Échantillonnage uniforme en f et en θ .

Problème de coût :

- Les hautes fréquences coûtent plus cher que les basses fréquences.
- Une fois $G(f, \theta)$ calculé, il est peu coûteux de calculer $G(f, \theta')$.

Échantillonnages à tester :

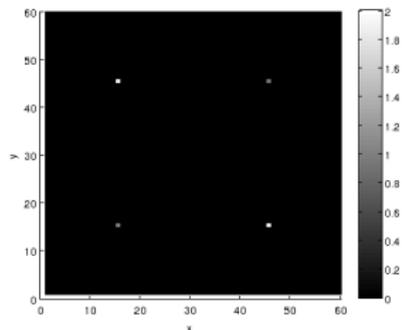
- Tester plus de fréquences basses que de fréquences élevées
- Tester différents angles pour une même fréquence



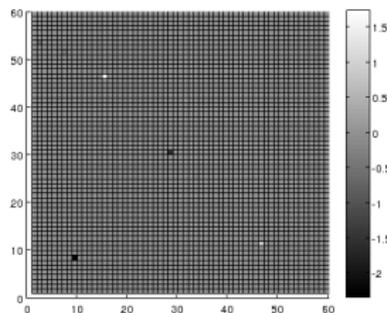
Illustrations numériques avec matrice Φ aléatoire

$$\Phi_{i,j} \sim B(p)$$

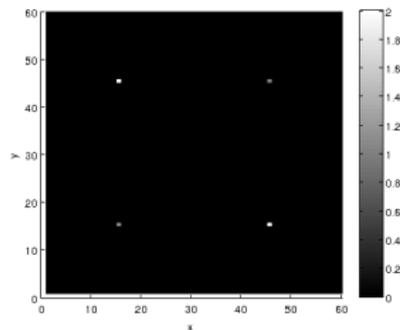
Image d'origine de taille $N = 3600$



$M = 30$

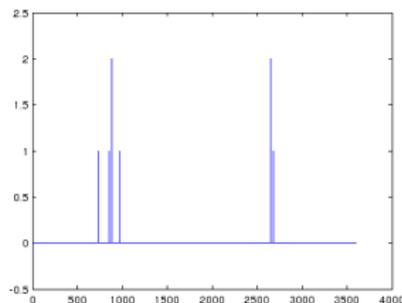


$M = 40$



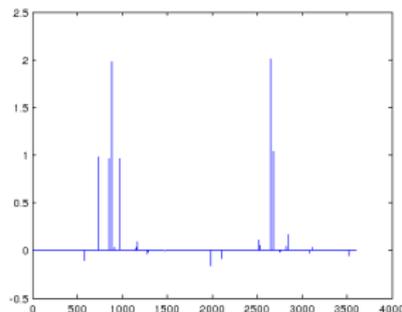
Illustrations numériques avec matrice Φ aléatoire

Image d'origine en 1D



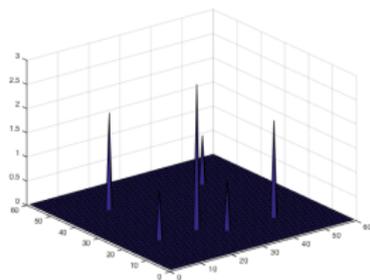
Ajout d'un bruit sur $G(f, \theta)$

$M = 60$

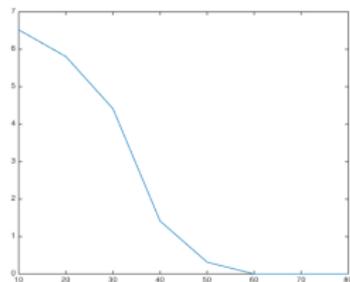


Illustrations numériques avec matrice Φ aléatoire

Image d'origine



Evolution de la qualité de l'image reconstruite $\|g - g_{\text{origine}}\|$ en fonction de la taille M de l'échantillon simulé



- 1 Présentation du problème
- 2 Reconstruction du signal en séries de Fourier
- 3 Compressed sensing
- 4 Conclusion et perspectives**

Conclusion :

- Le Compressed Sensing permet de s'affranchir de la condition de Shannon.
- Problème : Les coefficients de Fourier doivent être pris aléatoirement.
- Théoriquement : très difficile de prouver la condition RIP pour des matrices non-aléatoires

Prochaines étapes :

- Vérifier que la stratégie consistant à augmenter le nombre d'échantillons M est efficace.
- Implémenter la minimisation l^1 avec la matrice de Fourier et comparer avec les résultats obtenus

Perspectives :

- Choix de l'algorithme pour réaliser la minimisation l^1
- Choix de la matrice aléatoire Φ