Séries de Fourier.

Thomas DELZANT

Université de Strasbourg,
UFR de mathématique et informatique.

Résumé

Il s'agit d'un cours de L3 sur les séries de Fourier.

Les thèmes abordés sont :

Séries de Fourier, Numérique & implémentation (avec Octave)

Transformation de Fourier discrète, Transformation de Fourier rapide.

Applications élémentaires au traitement du signal.

Table des matières

1 Fonctions périodiques et polynômes trigonométriques.

1.1 Fonctions périodiques.

Définition 1.1. *Une fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *est dite périodique de période* a *si, pour tout* x, $f(x+a)=f(x)$.

Convention 1.2. Dans ce texte une fonction désignera une fonction à valeurs réelles ou complexes.

Exemple 1.3. Les fonctions constantes sont périodiques.

La fonction $x-\lfloor x\rfloor$ est périodique de période 1.

La fonction $f(t)=a\cos(\omega t+\varphi)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$

La fonction $f(x)=e^{ix}$ et périodique de période 2π

Proposition 1.4. *Si* f *est périodique de période* a, *et si* $k\in\mathbb{Z}$, *elle est aussi périodique de période* $-a$ *et de période* $k.a$

Démonstration.

1. Tout d'abord $f(x-a)=f(x-a+a)=f(x)$ donc f est bien périodique de période $-a$

2. Par récurrence sur l'entier k, pour $k\geqslant 1$.

Initialisation. Pour $k=1$, c'est la définition.

Induction. $f((k+1)a+x)=f(ka+x+a)=f(x+ka)=f(x)$

Pour $k\leqslant 0$, cela résulte de 1 et 2. □

Proposition 1.5. *Si une fonction périodique continue en un point est non constante elle admet une plus petite période positive.*

Démonstration. [1.1]*

Ce fait repose sur deux observations.

1.1. Le * veut dire que cette démonstration est difficile.

1. L'ensemble des périodes d'une fonction est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. En effet si a, b sont deux périodes de f, $f(x+a-b)=f(x-b)=f(x)$ pour tout x et donc $a-b$ est une période de f.

2.Un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ non réduit à 0 qui n'est pas dense admet un plus petit élément positif a et est de la forme $a\mathbb{Z}$. En effet si ce n'était pas le cas, pour tout $\varepsilon>0$, on pourrait trouver un élément a dans notre groupe G et dans l'intervalle $]0,\varepsilon[$. Alors G contient $\mathbb{Z}a$ et si $x\in\mathbb{R}$ on remarque que $\lfloor\frac{x}{a}\rfloor a$ est un élément de $a\mathbb{Z}$ donc de notre groupe situé à une distance inférieure à ε de x.

$$x-\lfloor\tfrac{x}{a}\rfloor a=a\left(\tfrac{x}{a}-\lfloor\tfrac{x}{a}\rfloor\right)\in[0,a]\subset[0,\varepsilon]$$

Combinant 1 et 2, on voit que si la fonction f n'a pas une plus petite période positive, alors l'ensemble de ses périodes est dense. Soit x_0 un point ou f est continue, alors pour tout x il existe une suite $t_n\in G$ telle que t_n converge vers $x-x_0$, donc en passant à la limite $f(x)=f(x+t_n)=f(x_0)$.* □

Remarque 1.6. Si la variable x a une unité, la période est mesurée dans la même unité. Au départ une « période » (du grec $\pi\varepsilon\rho\iota o\delta o\sigma$) désigne un laps de temps. Si dans un problème la variable est une unité de temps, on la note t, et la période est notée T. Si la variable x est une variable d'espace mesurée en mètres, la période s'appelle la **longueur d'onde**. Exemple la fonction $\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}$ est périodique de « période » λ, mais si on la dessine, on voit une onde de longueur λ. Pour ne pas privilégier l'un ou l'autre nous la noterons a.

Cette remarque permet de mieux comprendre la proposition

Proposition 1.7. *(Changement d'échelle). Si la fonction f est périodique de période a et si la fonction g est définie par $g(y)=f(uy+v)$, alors g est périodique de période $\frac{a}{u}$.*

En particulier, si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $a-$périodique, alors $f\left(a.\frac{x}{T}+\varphi\right)$ est périodique de période T.

Démonstration. $g\left(y+\frac{a}{u}\right)=f(uy+v+a)=f(uy+v)=g(y)$. Pour la deuxième faire $u=\frac{a}{T}$ □

Définition 1.8. *On suppose que la fonction f est une fonction du temps t et qu'elle est $T-$périodique. La fréquence de f est $\omega=\frac{1}{T}$. Si t est mesuré en seconde la fréquence est mesurée en Hertz (Hz) : $1\,\mathrm{Hz}=1s^{-1}$.*

Exemple 1.9. Soit f une fonction périodique du temps t de période T supposée continue. Supposons qu'elle atteint une valeur donnée -par exemple sa valeur maximale- une fois dans l'intervalle $[a,a+T]$. Dans l'intervalle $[a,a+nT]$ de longueur nT elle atteindra cette valeur n fois, donc en un temps t elle atteindra cette valeur $t/T=\omega t$ fois. Ainsi, la *fréquence* est le nombre de fois ou la fonction prend cette valeur dans l'unité de temps.

Par exemple, en une minute le pendule de longueur 1 m passe 60 fois par son point minimum chaque minute ; on dit qu'il bat à la fréquence 1Hz. Le coeur bat à la fréquence entre 60 et 80/ minutes= soit entre 1 et 1,33 Hz. Le « la » du diapason bat à 440Hz.

Pour mesurer la période des battements du coeur, on compte le nombre de battements N pendant une minute (c'est le nombre de battements par minutes). Alors la période est donc $60/N$ mesurée en seconde. C'est une idée utile, car même si on n'a pas de chronomètre ultra-précis, on peut déterminer la période avec une grande précision : en comptant le nombre de battements pendant 2 minutes (120 secondes), on a une précision de l'ordre de $1/100$ s sur la durée du battement.

Exemple 1.10. La fonction $A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)=A\cos(2\pi\omega t+\varphi)$ est périodique de période T et de fréquence $\frac{1}{T}=\omega$. Cette fonction est une « onde sinusoïdale ». Le nombre φ s'appelle la phase, A l'amplitude et $\omega=\frac{1}{T}$ la fréquence. Les radios « analogiques » fonctionnent en envoyant un signal a peu près constant (l'onde porteuse) et en faisant varier soit l'amplitude (Longues ondes, ou modulation d'amplitude), soit la phase (Ondes « courtes »), ou alors la fréquence (Modulation de Fréquence) (voir l'exercice 1 du chapitre 4).

Remarque 1.11. Si la fonction est une fonction périodique d'une variable d'espace mesurée en mètres et de longueur d'onde λ, le nombre d'onde est $N=\frac{1}{\lambda}$.

Proposition 1.12. *Si le réel a est fixé, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et a-périodiques est un espace vectoriel.*$\square$

L'idée principale de la théorie des séries des Fourier est que les fonctions $\sin 2\pi n\,\frac{t}{a}$, $\cos 2\pi n\,\frac{t}{a}$ forment une « base » de cet espace, et que cette « base » est adaptée à étudier la dérivation, ou la translation dans le temps.

Notation 1.13. *L'ensemble $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ (vu dans le cours de théorie des groupes) est l'ensemble quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $x\sim y$ si $x-y\in a\mathbb{Z}$.*

Si f est une fonction périodique de période a, et si $x\sim_a y$, alors $f(x)=f(y)$. Ainsi f défini une fonction toujours notée $f:\mathbb{R}/a\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$. Nous identifierons donc les fonctions périodiques de période a et les fonction définies sur $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$.

Notation 1.14. *Les ensembles $C^0(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$, $C^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$, $C^k(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$, $C^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ désigne les ensembles de fonctions continues, de classe C^1, C^k ou C^∞ périodiques de période a.*

Une fonction périodique est bien définie par sa restriction à un intervalle de longueur égale à la période. Ainsi, on peut identifier $C^0(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ avec $C([0,a])$ ou bien $C([-a/2,a/2])$. Pour les calculs, des fois c'est plus commode de prendre le premier des fois le second.

1.2 Primitives et dérivées.

Proposition 1.15. *Si une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est aussi périodique de même période.*

Démonstration. On dérive l'identité $f(x+a)=f(x)$. On obtient $f'(x+a)=f'(x)$. $\square$

Corollaire 1.16. *Ainsi, la dérivation défini une application linéaire $D: C^k(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})\to C^{k-1}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.*

Pour l'intégration, c'est plus compliqué.

Proposition 1.17. *Si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période a, alors l'intégrale $\int_x^{a+x} f(t)\,dt$ ne dépend pas de x. On appelle valeur moyenne de f, et on note $<f>$ la quantité $<f> = \frac{1}{a}\int_x^{a+x} f(t)\,dt$. Cette valeur moyenne est mesurée dans la même unité que f.*

Remarque 1.18. Si f est périodique de période a, elle est aussi périodique de période $2a, 3a, \ldots k.a$. Sa valeur moyenne est aussi $\frac{1}{2a}\int_x^{2a+x} f(t)\,dt = \frac{1}{k\,a}\int_x^{ka+x} f(t)\,dt$.

Démonstration.

Ce fait est tellement important qu'on donne 2 démonstrations.

1. On fait d'abord un changement de variable en posant $u = t - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a$. Comme $f(t) = f(u)$, $\frac{1}{a}\int_x^{a+x} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_y^{a+y} f(t)\,dt$, avec $y \in [0, a]$. On coupe alors en deux :

$\int_y^{a+y} f(t)\,dt = \int_y^a f(t)\,dt + \int_a^{a+y} f(t)\,dt$. En faisant le changement de variable $s = t - a$, la seconde intégrale vaut $\int_0^y f(s)\,ds$, et on obtient le résultat.

2. On suppose que f est continue et on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; alors F est dérivable et sa dérivée est f. On a Considère $G(x) = \int_x^{a+x} f(t)\,dt = F(x+a) - F(x)$. Alors G est dérivable et sa dérivée est $f(x+a) - f(x)$ est nulle : G est constante. □

Exemple 1.19. Si f est périodique, alors $f - <f>$ est périodique de moyenne nulle.

Proposition 1.20. *Une fonction périodique continue est la dérivée d'une autre fonction périodique si et seulement si sa moyenne est nulle.*

Démonstration. Si $f' = g$, avec g périodique de période a, alors $f(x+a) - f(x) = \int_x^{x+a} g(t)\,\mathrm{dt}$. Le membre de droite est nul si et seulement si le membre de gauche l'est. □

Exemple 1.21. Les fonctions $\cos(\omega t + \varphi)$, $\sin(\omega t + \varphi)$, $e^{i\omega t}$ sont de moyenne nulle sur l'intervalle de longueur $\frac{2\pi}{\omega}$. Par exemple, $e^{i\omega t}$ est la dérivée de $\frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}$

Un théorème très utile, et très important, est le théorème de Riemann Lebesgue

Théorème 1.22. *Soit f une fonction continue par morceaux, ou même simplement dans $L^1[u, v]$. Alors* $\lim_{\lambda\to\infty}\int_u^v f(t)\cos(\lambda\,t)\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_u^v f(t)\sin(\lambda\,t)\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_u^v f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = 0.$

$\lim_{n\to\infty}\int_u^{u+2\pi} f(t)\cos(2\pi n\,t)\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_u^{u+2\pi} f(t)\sin(2\pi n\,t)\,dt = 0$

Remarque 1.23. Si ce théorème, très facile s'appelle « Riemann-Lebesgue », c'est qu'il est très très important. Bien sûr, ce n'est ni Riemann, ni Lebesgue qui l'on compris en premier.

Notation 1.24. *Si une fonction f est bornée sur $[u, v]$ on note* $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}_{x\in[u,v]} |f(x)|$.

Démonstration. 1. Sous des hypothèses supplémentaires.

On va supposer que f est C^1

On a: $\int_u^v f(t)\cos(\lambda\, t)\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_u^{\mathrm{bv}} f(t)\ d\sin(\lambda t) = \frac{f(b)\sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda\, t)\, dt$

Donc $\left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda\, t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty(b-a))\|G\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ qui tend vers 0 quand $\lambda\to\infty$

On peut faire pareil avec les sinus ou les exponentielles. □

Démonstration. 2 Un peu plus général *.

On suppose d'abord que $f = 1_{[c,d]}$ est la fonction qui vaut 1 sur $[c,\, d]$ et 0 ailleurs (fonction indicatrice). Alors $\int_u^v e^{i\lambda t}\,\mathrm{dt} = \int_{\lambda c}^{\lambda d} e^{iu}\frac{\mathrm{du}}{\lambda} = \int_{\lambda c}^{\lambda d} e^{iut}\,\frac{du}{\lambda}$. Donc $|\int_u^v e^{i\lambda t}\,\mathrm{dt}| \leqslant \frac{2}{\lambda}$qui tend vers 0.

Si la fonction f est en escalier, c'est une combinaison linéaire finie de fonction indicatrice, et on a le résultat par linéarité.

Pour le cas général, on choisi une fonction φ en escalier telle que $\|f-\varphi\|_1 \leqslant \varepsilon/2\|F\|_\infty$, alors $\left|\int_a^b f(t)\, F(\lambda\, t)\, dt - \int_a^b \varphi(t)\, F(\lambda\, t)\, dt\right| \leqslant \|f-\varphi\|_1\|F\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$, d'où le résultat. □

On considère l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions périodiques de période a indéfiniment dérivables. Il est légitime de se demander quelles sont les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur de dérivation D défini par $D(f) = f'$.

Théorème 1.25. *Les valeurs propres de D sont les nombres imaginaires purs $n\frac{2\pi}{a}i$, $n\in\mathbb{Z}$, les espaces propres sont les droites vectorielles $\mathbb{C}e_n$ ou $e_n(x) = \exp 2\pi i n\,\frac{x}{a}$.*

Démonstration. si $f'(x) = \lambda f(x)$, alors $f(x) = f(0)\exp\lambda x$. Pour que f soit périodique de période a, il faut et il suffit $f(a) = f(0)$ c'est à dire que $\exp\lambda a = 1$, c'est-à-dire que $\lambda a \in i.2\pi\mathbb{Z}$ □

Ainsi, on a « diagonalisé » l'opérateur de dérivation sur l'espace des fonctions C^∞ périodiques de période a.

1.3 Polynômes trigonométriques réels et complexes.

Le paragraphe précédent incite à regarder les sous-espaces vectoriels de $C^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ de dimension finie stables par la dérivation.

D'après le théorème 14, ces espaces sont engendrés par les fonctions e_n pour $n\in\mathbb{Z}$, avec $e_n(x) = e_n(x) = e^{i2\pi n\frac{x}{a}}$. ou $e^{2i\pi\omega n x}$ périodique de fréquence $n\omega$, par exemple le LA440 correspond à l'onde e_{440}.

Remarque 1.26. La fonction $e_n(x) = e_1(nx) = e_1^n(x)$ s'appelle le $n-$ième harmonique de e_1.

Définition 1.27. *Un polynôme trigonométrique complexe de degré n et de période a est une fonction de la forme $f = \Sigma_{-n}^{n} c_n e_n$, ou $f(x) = \Sigma_{-n}^{n} c_k e^{i2\pi k\frac{x}{a}}$, avec $c_k \in \mathbb{C}$*

Un polynôme trigonométrique réel de degré n est une fonction de la forme

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi k\frac{x}{a} + b_k \sin 2\pi k\frac{x}{a}$, avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.28. On remarque que $e_k = e_1^k$. Donc si P est le polynôme de Laurent $P(z) = \Sigma_{-n}^{n} c_k z^k$, alors $f(x) = P\left(e^{i2\pi\frac{x}{a}}\right)$.

Proposition 1.29. *L'espace vectoriel $\mathbb{E}_n^a(\mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques complexes (réels) de degré n et de période a est un espace vectoriel complexe (réel) de dimension $2n+1$.*

*L'opérateur de dérivation $D: \mathbb{E}_n^a(\mathbb{C}) \to \mathbb{E}_n^a(\mathbb{C})$ est **diagonalisable** et les $(e_k)_{—\leqslant k \leqslant n}$ sont une base de vecteurs propres.*

Le carré de l'opérateur de dérivation $D^2: \mathbb{E}_n^a(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}_n^a(\mathbb{R})$ est diagonalisable, les fonctions $\cos 2\pi k\frac{x}{a}$, $\sin 2\pi k\frac{x}{a}$ forment une base de vecteurs propres.

Démonstration. On a $D(e_n) = \frac{2i\pi}{a} n e_n$. Donc les vecteurs e_n sont des vecteurs propres de D de valeurs propres $\frac{2i\pi}{a} n$. Comme celle-ci sont distinctes, ces vecteurs sont indépendants. Comme ils engendrent $\mathbb{E}_n$ ils en forment une base.

La deuxième assertion se démontre de la même façon. □

Dans la suite on suppose la période a fixée, et pour ne pas trop alourdir les notations, on note $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_n^a(\mathbb{C})$.

Définition 1.30. *Un polynôme trigonométrique de degré n est un élément de $\mathbb{E}_n$.L'espace vectoriel $\mathbb{E} = \cup_n \mathbb{E}_n$ est l'espace vectoriel de tous les polynômes trigonométriques.*

En utilisant la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, on a une autre base importante:

$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ et $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$

$\cos(nx) = \frac{e^{\mathrm{in}x} + e^{-\mathrm{inx}}}{2}$ et $\sin(nx) = \frac{e^{\mathrm{in}x} - e^{-\mathrm{inx}}}{2i}$

Proposition 1.31. *(à faire en exercices) Les fonctions $1, \cos 2\pi k\frac{x}{a}, \sin 2\pi k\frac{x}{a}$ forment une base de $\mathbb{E}_n$. Si $f \in \mathbb{E}_n$ on peut calculer les coordonnées de f dans cette base par les formules*

$f = \Sigma_{-n}^{n} c_k e_k$ alors $f = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n} a_k \cos 2\pi k\frac{x}{a} + b_k \sin 2\pi k\frac{x}{a}$

Avec $a_k = c_k + c_{-k}, b_k = \frac{1}{i}(c_k - c_{-k})$

Réciproquement si $f=\frac{a_0}{2}+\Sigma_{k=1}^{n}a_k\cos 2\pi k\frac{x}{a}+b_k\sin 2\pi k\frac{x}{a}$, *alors* $f=\Sigma_{-n}^{n}c_k e_k$, *ou* $c_k=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$ *et* $c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$□

Définition 1.32. *Soit* $f\in\mathbb{E}_n$ *un polynôme trigonométrique de degré* n. *Les coordonnées* $(c_k(f))_{-n\leqslant k\leqslant n}$ *de* f *dans la base* e_n *s'appellent les coefficients de Fourier complexes de* f. *Les coordonnées* $a_n(f)$, $b_n(f)$ *de* f *dans la base* 1, $\cos\, 2\pi k\frac{x}{a}$, $\sin\, 2\pi k\frac{x}{a}$ *sont les coefficients de Fourier réels de* f.

Remarque 1.33. A priori, on peut très bien calculer les coefficients de Fourier réels d'une fonction complexes. Dans la pratique, on ne le fait pas.

Proposition 1.34. *Soit* $f\in\mathbb{E}_n$ *un polynôme trigonométrique. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i. *f est à valeurs réelles.*

ii. *Pour tout entier* k, *on a* $c_k(f)=\bar{c}_{-k}(f)$

iii. *Pour tout entier* k, *les nombres* a_k, b_k *sont réels*

Démonstration. On démontre $i\Rightarrow ii$. Si f est réelle, $\bar{f}=f$. Donc $\overline{(\Sigma_{-n}^{n}c_k e_k)}=\Sigma_{-n}^{n}c_k e_k$. Comme $\bar{e}_k=e_{-k}$, et comme la famille des e_k est libre, on en déduit $c_{-k}=\bar{c_k}$ car $\Sigma_{-n}^{n}\overline{c_k}\,e_{-k}=\Sigma_{-n}^{n}c_k\,e_k$. La réciproque résulte du même calcul. Pour $ii\Rightarrow iii$, on applique la formule de 1,24 $a_k=c_k+c_{-k}$, $b_k=\frac{1}{i}(c_k-c_{-k})$. Si $c_{-k}=\bar{c}_k$, $a_k=\mathrm{Re}(c_k)$, $b_k=\mathrm{Im}(c_k)$. □

Nous allons voir au paragraphe suivant comment calculer les coefficients de Fourier d'une fonction. L'idée principale est que non seulement les e_n forment une base, mais qu'en plus celle-ci est *orthonormée* (pour un produit scalaire bien choisi).

1.4 Exercices.

Exercice 1.1. Formules de de Moivre.

1. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$
2. Linéariser $\sin^3(x)$ et $\cos^3(x)$

Exercice 1.2.

1. Calculer : $\Sigma_{k=n}^{m}e^{ikx}$.
2. Calculer les sommes $C(x)=1+a\cos(x)+a^2\cos(2x)+\cdots+a^n\cos(nx)$ et $S(x)=a\sin(x)+a^2\sin(2x)+\cdots+a^n\sin(nx)$

Exercice 1.3. Soient f_1 et f_2 deux nombres.

1. Linéariser $F(t) = 2\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$. Calculer sa période et sa fréquence

2. On suppose que $f_1 = \frac{1}{8}$, $f_2 = \frac{9}{8}$. Rédiger un script permettant d'afficher le graphe de F sur $[-2, 8]$

3. Rédiger un script permettant d'afficher simultanément les graphes de F et de $\cos\left(\frac{2\pi t}{8}\right)$ sur $[-2, 8]$

Exercice 1.4. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et de fréquence $\nu = \frac{1}{T}$

1. Démontrer que f est aussi périodique de période $2T, 3T, ..., nT$.

2. Quelle est la période et la fréquence de f_n définie par $f_n(x) = f(nx)$

3. Exprimer la fréquence de f en fonction de la période λ de $F(x) = f\left(\frac{x}{c}\right)$.

Exercice 1.5.

1. Rédiger un script permettant d'afficher le graphe de la fonction $\Delta(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $[-2, 4]$

2. Soit $f: [0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer l'unique fonction $\tilde{f}$ périodique de période 1 dont la restriction à $[0, 1[$ est f grâce à f et Δ. Soit $f(x) = 2.|x - 1/2|$. Rédiger un script permettant d'afficher le graphe de $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a, a+1[\to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer l'unique fonction $\tilde{f}$ périodique de période 1 dont la restriction à $[a, a+1[$ est f grâce à f et $\lfloor\rfloor$. Soit $a = -1/2$, $f(x) = 1 - 4x^2$. Rédiger un script permettant d'afficher le graphe de $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a, a+T[\to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer l'unique fonction $\tilde{f}$ périodique de période T dont la restriction à $[a, a+T[$ est f grâce à f et $\lfloor\rfloor$. Soit $T = 3$, et f la fonction qui vaut $x(x-1)(x-3)$ entre 0 et 3. Rédiger un script permettant d'afficher le graphe de $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[-3, 6]$.

2 Théorie L^2 et applications.

2.1 Rappels sur les espaces vectoriels euclidiens et hermitiens, bases orthonormées et projections orthogonales.

Le but de ça paragraphe est de faire un très rapide rappel des notions de base de géométrie euclidienne.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.1. *Un produit scalaire euclidien (hermitien) sur E est une application*

$<.,.>: E \times E \to \mathbb{R}\,(\text{ou dans } \mathbb{C})$

$u, v \rightarrow <u, v>$ *qui satisfait 3 axiomes*

1. *Si v est fixé, l'application $E \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie* par $u \rightarrow <u, v>$ *est linéaire.*
2. *Pour tout couple de vecteurs, u, v, $<v, u> = \overline{<u, v>}$*
3. *Pour tout vecteur u, $<u, u>$ est positif ou nul, et nul si et seulement si $u = 0$*

Un espace vectoriel réel (resp. complexe) muni d'un produit scalaire euclidien est un espace euclidien (hermitien).

Exemple 2.2. L'espace euclidien (hermitien) « standard » de dimension n, noté $\mathbb{H}_n$ est l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<(x_1, ..., x_n).\,(y_1, ...y_n)> = \Sigma_{i=1}^n x_i\, y_i$, ou bien $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $<(z_1, ..., z_n).\,(w_1, ...w_n)> = \Sigma_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$.

Matriciellement $<x, y> = x\, y^t$ si x et y sont des vecteurs *lignes* dans le cas réel, $z.w^*$ dans le cas complexe. Si Z est une matrice à coefficients complexes, la notation Z^* désigne la matrice transposée de la conjuguée de Z, autrement dit $Z^* = \bar{Z}^t$.

Dans la suite on fixe un espace hermitien ou euclidien E.

Définition 2.3. *Deux vecteurs sont dit orthogonaux ou perpendiculaire si $<u, v> = 0$. L'orthogonal d'un ensemble $A \subset E$ noté $A^{\perp}$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A.*

Soient u, v deux vecteurs, et supposons que $u \neq 0$.

Proposition 2.4. *Soit $w = \frac{<v, u>}{<u, u>}\, u$, alors w w est le seul vecteur de la droite engendrée par u tel que $w - v$ est perpendiculaire à u. On l'appelle la projection orthogonale de v sur la droite engendrée par u.*

Démonstration. Si $\lambda u - v$ est perpendiculaire à u, alors $\lambda < u, u > = <v, u>$. □

Définition 2.5. *La quantité $\sqrt{<x, x>}$ s'appelle norme de x et est notée $\|x\|$.*

Théorème 2.6. *de Pythagore. Si u et v sont orthogonaux, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Démonstration. $<u + v, u + v> = <u, u> + <v, v> + 2\,\mathrm{re} < u, v>$ □

On peut facilement généraliser ce résultat.

Proposition 2.7. *Si $u_1, ...u_n$ sont des vecteurs orthogonaux, $\|\Sigma_{i=1}^n u_i\|^2 = \Sigma_{i=1}^n \|u_i\|^2$.* □

Théorème 2.8. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)* $|<v,\, u>| \leqslant \|u\|\|v\|$*, et il y a égalité si et seulement si les vecteurs sont proportionnels.*

Démonstration. Compte tenu de l'importance de ce résultat, on en donne deux.

1. Soit $w = \frac{<v,\, u>}{<u,\, u>}\, u$, la projection orthogonale de v sur la droite engendrée par u. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|v\|^2 = \left\| \frac{\frac{<v,\, u>}{<u,\, u>} u}{<u,\, u>} u \right\|^2 + \|v - w\|^2 = \left\| \frac{<v,\, u>}{<u,\, u>} u \right\|^2 + \|v - w\|^2$

Il en résulte que : $|<v, u>|^2 \leqslant \|v\|^2 \|u\|^2$ avec égalité si et seulement si $u = w$, c'est à dire que u et v sont proportionnels.

2. On suppose $v \neq 0$. On écrit $\|u + t v\|^2 = \|u\|^2 + 2t\, \mathrm{Re} < u, v > + t^2 \|v\|^2$.

Comme ce polynôme est toujours positif (ou nul), $|\mathrm{Re} < u, v >|^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2$. Pour qu'il s'annule il faut et il suffit qu'il existe t tel que $u + t v = 0$. $\square$

Remarque 2.9. Nous verrons un peu plus tard que le plan engendré par les deux vecteurs u, v est isométrique au plan Euclidien. Dans celui ci le rapport $\frac{<u,\, v>}{\|u\|\, \|v\|}$ est le cosinus de l'ange de ces deux vecteurs. Donc l'inégalité de Cauchy Schwartz est une façon compliquée de dire que le cosinus d'un angle est compris entre -1 et1.

Cette inégalité a de nombreuses applications, dont la première est l'inégalité triangulaire.

Théorème 2.10. *L'application* $x \rightarrow \|x\| = \sqrt{<x, x>}$ *est une norme.*

Démonstration. Les axiomes de positivité et de séparation sont des conséquences immédiates des axiomes du produit scalaire. Reste à vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\|u + v\|^2 = <u + v, u + v> = <u, u> + <v, v> + 2\mathrm{Re} < u, v> \leqslant <u, u> + <v, v> + 2|<u, v>|$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a donc $\|u + v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$, et l'inégalité triangulaire est établie. $\square$

Etudions un peu plus la relation d'orthogonalité. Si A est une partie de E, on rappelle que $A^\perp$ est son orthogonal. En bref :

$$A^\perp = \{x \in E / \forall a \in A, <x, a> = 0\} = \cap_a a^\perp.$$

L'orthogonal, d'un vecteur a c'set l ensemble des vecteur x tels que e$<x, a> = 0$ c'est le noyau d'un e f orme linéaire donc cv'est un hyperplan.

Le lemme suivant résulte de la définition.

Lemme 2.11. *Si* $A \subset E, A^\perp$ *est un espace vectoriel. Si* $A \subset B$*, alors* $B^\perp \subset A^\perp$.$\square$

Il y a de nombreux théorèmes importants sur les espaces euclidiens et hermitiens, mais ce n'est pas l'objet de ce cours.

Définition 2.12. *Une famille* $(e_i)_{i\in I}$ *de vecteurs est dite orthogonale (resp. orthonormale) si pour tout couple* i, j *le vecteur* e_i *est orthogonal à* e_j *(resp. si de plus les vecteur* e_i *sont tous de norme égale à 1.*

Théorème 2.13. *Soit* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de vecteurs orthonormée, et* $\mathbb{H}_n$ *l'espace vectoriel engendré*

1. *La famille des vecteurs* e_i *est libre, donc c'est une base de cet espace* $\mathbb{H}_n$.
2. *Si* x *est dans E,* $x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$ *est perpendiculaire à* $\mathbb{H}_n$.
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |<x, e_i>^2| + \|x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i\|^2$
4. *De plus si* x *est dans* E_n*, on a :* $x = \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$*, c'est à dire que les coordonnées de* x *dans cette base sont les* $<x, e_i>$

$\sum_{i=1}^{n} |<x, e_i>^2|$ est le carré de la longueur du vecteur $\Sigma <x, e_i> e_i \in \mathbb{H}_N$ qui est perpendiculaire à $x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$, en particulier $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |<x, e_i>^2|$ si et seulement si $x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{H}_n$

Démonstration.

1. si $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, en faisant le produit scalaire avec e_j, on trouve que $\lambda_j = 0$

2. A cause de la linéarité du produit scalaire, il suffit de vérifier que

$<x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i, e_j> = <x, e_j> - <x, e_j> = 0$.

3. On pose $u_i = <x, e_i> e_i$ et $v = x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i$. le s vecteurs $u_1, ..., u_n, v$ sont orthogonaux et on peut appliquer le théorème de Pythagore.

4 Si $x \in E_n$, alors $x - \sum_{i=1}^{n} <x, e_i> e_i \in E_n$, il est donc perpendiculaire à lui même : c'est le vecteur nul.

□

On va utiliser ça plus tard dans le contexte suivant E est l'espace de toutes les fonctions a périodiques, $\mathbb{H}_n$ les sous espace des polynomes trigonométriques de degrén.

De 3 et 4, il résulte :

Théorème 2.14. *Inégalité de Bessel. Soit* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de vecteurs orthonormée, et* E_n *l'espace vectoriel engendré. On a toujours* $\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} |<x, e_i>^2|$ *; il y a égalité si et seulement si* x *est dans l'espace vectoriel* E_n *engendré par les* e_i. □

Exemple 2.15.

Il est facile d'en déduire que :

Théorème 2.16. *Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille orthonormée, et E_n l'espace vectoriel engendré.*

1. L'application p: $E\to E$ définie par $p(x)=\sum_{i=1}^n <x, e_i> e_i$ un projecteur sur l'espace vectoriel engendré par les e_i et son noyau est l'orthogonal $E_n^\perp$ de E_n défini par $E_n^\perp=\{y\,/\,\forall x\in E_n, <y, x>=0\}$. On l'appelle projection orthogonale sur l'espace vectoriel E_n.

2. La projection orthogonale sur l'espace E_n est caractérisée par : pour tout x, $p(x)$ est l'unique point de E_n qui minimise la distance à x. En particulier elle ne dépend pas de la base choisie. On a de plus $E=E_n\oplus E_n^\perp$

Démonstration. 1.Comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormée, $<e_i, e_j>=\delta_{ij}$ et $p(e_i)=e_i$. Donc l'image de p est E_n restriction de p à cet espace est l'identité : c'est un projecteur dont le noyau est l'ensemble des vecteurs perpendiculaires à $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc à E_n.

2. On sait que $x-p(x)$ est perpendiculaire à tous les vecteurs de E_n. Par le théorème de Pythagore $\|x-y\|^2=\|x-p(x)\|^2+\|y-p(x)\|^2$, ce qui démontre que $\|x-y\|\geqslant\|x-p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $\|y-p(x)\|^2=0$, c'est à dire $y=p(x)$. □

Proposition 2.17. *Si E_n est un sous-espace de dimension finie et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée, alors l'application de E_n dans $\mathbb{H}_n(\mathbb{R}_n$ ou $\mathbb{C}_n)$ défini par $F(x)=(<x, e_i>)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un isomorphisme : elle est linéaire bijective et conserve le produit scalaire.*

Démonstration. La bijectivité est immédiate car cette application transforme la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E_n dans la base canonique de $\mathbb{H}_n=\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{K}^n$. Pour démontre qu'elle conserve le produit scalaire on calcule : $<x, y>=<x, \Sigma_{i=1}^n y_i e_i>=\Sigma_{i=1}^n \bar{y}_i<x, e_i>=\Sigma_{i=1}^n \bar{y}_i x_i$.

□

Il est donc très important de démontrer qu'il existe des bases orthonormées.

Théorème 2.18. *Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pour toute suite finie ou infinie (f_n) de vecteurs linéairement indépendants, il existe une (unique) famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que pour tout entier n l'espace vectoriel engendré par $(f_1, \ldots, f_n)$ soit le même que l'espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$, et tel que $<e_i, f_i>\in\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. Par souci de clarté, on oublie **volontairement** de démontrer l'unicité (laissée au lecteur). La démonstration de ce théorème est constructive et se fait *par récurrence* sur l'entier n.

Initialisation. On pose $e_1=\frac{f_1}{\|f_1\|}$, et on note que e_1 est un vecteur de norme 1 qui engendre le même espace que f_1.

Induction. On suppose donc connue une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ et qui satisfait l'hypothèse de récurrence. Le vecteur $g_n=f_n-\Sigma_{i=1}^{n-1}<f_n, e_i>e_i$ est perpendiculaire à l'espace vectoriel engendré par $(f_1, \ldots, f_{n-1})$, et $(e_1, \ldots, e_{n-1}, g_n)$ engendrent le même espace que $(f_1, \ldots, f_n)$. Posons $e_n=\frac{g_n}{\|g_n\|}$. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, et $<f_n, e_n>=\|g_n\|$ est un réel positif.

□

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou non, muni d'un produit scalaire hermitien ou euclidien.

Définition 2.19. *Une base hilbertienne de E est une suite orthonormée de vecteurs* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *telle que l'espace vectoriel engendré soit dense dans E pour la norme hilbertienne.*

Théorème 2.20. *Parseval. Conservation de l'énergie. Si* e_n *est une base hilbertienne, pour tout* x, *on a* $\|x\| = (\sum_n |<x.e_n>|^2)^{1/2}$

Avertissement 2.21. La somme n'est pas finie, il s'agit d'une série convergente.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$, donné. Comme la famille des vecteurs e_n engendre une partie dense, si x est donné, il existe un entier n et une combinaison linéaire y des $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$. Or la projection orthogonale de x sur l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est précisément $\sum_{i=1}^n <x,e_i>e_i$. Donc $\|x-\sum_{i=1}^n <x,e_i>e_i\|^2\leqslant\varepsilon^2$ et $\|x\|\leqslant\varepsilon+(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|<x.e_n>|^2)^{1/2}\leqslant\varepsilon+(\sum_i|<x.e_n>|^2)^{1/2}$. Or l'inégalité de Bessel dit que $(\sum_i|<x.e_n>|^2)^{1/2}\leqslant\|x\|$, d'où le résultat. □

Il est donc important de savoir construire des bases hilbertiennes. Le résultat suivant n'est pas très constructif, on le cite rapidement avec une idée de démonstration.

Théorème 2.22. **Si E admet une partie dénombrable dense, alors il admet une base Hilbertienne.*

Démonstration. On applique la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une sous famille libre maximale de notre partie dénombrable dense.* □

2.2 L'espace $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.

Ce paragraphe commence par un théorème très important et très facile. On rappelle qu'une fonction réglée est la limite uniforme d'une fonction en escalier continue à gauche. Une telle fonction est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point.

Théorème 2.23. *L'espace vectoriel* $E(\mathbb{R}\,/\,a\mathbb{Z})$ *des fonctions réglées périodiques de période a et à valeur complexes (réelles) est naturellement muni d'un produit scalaire défini par* $<f,g> = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\,\bar{g}(t)\,\frac{dt}{a}$. *On note* $\|f\|_2 = = \left(\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}}|f(t)|^2\frac{dt}{a}\right)^{1/2}$ *la norme associée.*

Démonstration. Si une fonction réglée positive est d'intégrale nulle, alors elle est nulle. En appliquant ce résultat à $|f(t)|^2$, on voit que la norme satisfait l'axiome de séparation. Les autres axiomes du produit scalaire hermitiens sont faciles à vérifier. □

Exemple la fonction constante 1 notée $\mathbb{I}$ est de norme $\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} 1\,\frac{dt}{a} = \int_0^a \frac{\mathrm{dt}}{a} = 1$

Remarque 2.24. Ici, on peut remplacer $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ par n'importe quel intervalle de longueur a, très souvent on prend $[0,a]$ ou alors $[-a/2,a/2]$. On obtient le même espace.

Pour la définition suivante il faut savoir ce qu'est le complété d'un espace hermitien. C'est simplement un espace de Hilbert (complet) qui le contient comme partie dense.

Définition 2.25. ** L'espace $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ est le complété de $E(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ pour cette norme.**

Nous ne rentrons pas dans les détails ici, mais nous montrerons des exemples d'éléments de L^2 qui ne sont pas exactement des fonctions plus tard ; par exemple.

Exemple 2.26. La fonction x^α: $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dès que $2\alpha > -1$, mais ce n'est pas une fonction continue par morceaux.

Définition 2.27. *L'intégrale $E(f) = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\ \bar{f}(t)\ dt$ s'appelle l'énergie de f, alors que la puissance de f est $\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\ \bar{f}(t)\, dt = \frac{1}{a}E(f)$.*

Remarque 2.28. Si l'unité de mesure de t est un temps, la période T est mesurée en seconde et $P = \frac{E}{T}$ la puissance est mesurée en Watt, alors que l'énergie l'est en Joule. Un Watt est un Joule par seconde. On utilise aussi le kWh = 3,6 millions de Joule, 3,6 Méga Joules).

Nous admettrons, pour l'instant.

Théorème 2.29. *La famille des fonctions $e_n(t) = e^{i2\pi n\frac{t}{a}}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.*

La famille des fonctions $1, \sqrt{2}\cos 2\pi n\frac{t}{a}, \sqrt{2}\sin 2\pi n\frac{t}{a}$, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.

Démonstration. On, va vérifier que c'est orthonormée.

$< e_n, e_m > = \int_0^a e_n(t)\overline{e_m}(t)\frac{dt}{a} = \int_0^a e^{i2\pi n\frac{t}{a}} e^{-i2\pi m\frac{t}{a}}\frac{dt}{a} = \int_0^a e^{i2\pi(n-m)\frac{t}{a}}\frac{dt}{a} = 0 \text{ si } n \neq m$ 1 sinon. □

Pour cos et sin utiliser $\cos a\ \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$ et utiliser le résultat précédent.

A faire chez soi !

Définition 2.30. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ ses coefficients de Fourier sont définis par.*

$c_n(f) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\, e^{-i2\pi n\frac{t}{a}}\, dt = < f, e_n >$

$a_n(f) = \frac{2}{a}\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\cos 2\pi n\frac{t}{a}\, dt,\ b_n(f) = \frac{2}{a}\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\sin 2\pi n\frac{t}{a}\, dt$

Théorème 2.31. *Le polynôme trigonométrique $S_n(f)$ défini par* $S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\, e^{i2\pi k\frac{t}{a}} = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n}\, a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \sin 2\pi k\frac{t}{a}$ *est la projection orthogonale de f sur l'espace $\mathbb{E}_n$ des polynôme trigonométriques de degré n.*

Démonstration. En effet, e_n est orthonormée, donc la projection orthogonale sur l'espace engendré par $(e_k)_{-n\leqslant k\leqslant n}$ est $S_n(f) = \Sigma_{-n}^{n} c_k e_k$. Et $S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\, e^{i2\pi k\frac{t}{a}}$. On obtient $S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n}\, a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$ grâce aux formules sur les polynômes trigonométriques. □

Ainsi

Proposition 2.32. *La fonction $S_n(f)$ est le polynôme trigonométrique de degré n qui approche le mieux la fonction f au sens de l'énergie.*

Un corollaire très important est la formule de Parseval. Comme la famille de e_n est une base hilbertienne, nous savons que :

Théorème 2.33. $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\, \bar{f}\,(t)\, \frac{\mathrm{dt}}{a} = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0^2|}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2$

Remarquons aussi que nous avons une **nouvelle démonstration** du théorème de Riemann Lebesgue, qui elle ne repose que sur l'inégalité de Bessel (théorème de Pythagore).

Théorème 2.34. *Les coefficients de Fourier d'une fonction L^2 tendent vers 0. Mieux la série de t.g.* $|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = |a_k|^2 + |b_k|^2$ *est convergente* □

Définition 2.35. *L'expression* $S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\; e^{i2\pi k\frac{t}{a}} = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n}\; a_k(f)\; \cos\; 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$ *s'appelle le développement en série de Fourier de f.*

Exemple 2.36. Si $f(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{d}\, a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$ est un polynôme trigonométrique de degré d, et si $n \geqslant d, S_n(f) = f$. Par contre si $n \leqslant d$, alors $S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{d}\, a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$ s'obtient juste en oubliant les termes de degré plus grand que n.

Théorème 2.37. *Si $f \in L^2$ alors* $\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$

En effet ce terme vaut $\Sigma_{|k|>n} |c_k|^2$, et le reste d'une série convergente est convergente.

Autrement dit, en remplaçant F par sa série de Fourier $S_n(f)$ on a un perte de puissance égale à $\sum_{k\geqslant n+} |a_k|^2 + |b_k|^2 = \Sigma_{|k|>n} |c_k|^2$ qui tend vers 0.

Exemple 2.38. Pour les sons, l'oreille filtre toutes les fréquences supérieure à 20 kHz, c'est à dire dont la longueur d'onde est inférieure à $\frac{300ms^{-1}}{20000s^{-1}}$ =1,5mm. Même si on tape comme un sourd sur la dernière note à droite dans un piano, on n'entend qu'un tout petit son (surtout à mon âge); ce n'est pas le piano qui marche mal, c'est notre oreille ! L'oreille supprime tous les termes de la série de Fourier avec $n > 20000$.

2.3 Exercices.

Exercice 2.1. On considère une fonction périodique de période T. On note a_n, b_n ses coefficients de Fourier réels, c_n les coefficients complexes.

1. Rappeler la définition de a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) et c_n ($n \in \mathbb{Z}$). Calculer les a_n et b_n en fonction de c_n, et réciproquement.

2. Démontrer que si f est réelle, les a_n et b_n sont réels et $c_{-n} = \bar{c}_n$

3. Démontrer que si f est paire (resp. impair) les b_n (resp. les a_n sont tous nuls).

4. On suppose que f est périodique de période $T/2$. Démontrer que si $k = 1$ ou même si k est impair $c_k = 0$. Que peut on en déduire sur les a_k, b_k ?

5. On suppose que f est périodique de période T/k, ou k est un entier. Montrer que tous les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont nuls sauf si $n = 0(k)$.

6. On étudiera la réciproque des questions 1-6 pour les polynômes trigonométriques.

Exercice 2.2. TP Octave Comment dessiner une fonction dont les coefficients de Fourier sont connus.(on apprendra plus tard la commande FFT).

1. Dessiner un signal 1 périodique dont les 4 premiers coefficients sont connus ; pour faire un exemple, on pose

   $a_1 = 1/2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1/3, a_4 = 0,\ b_1 = 1/2,\ b_2 = 1/3,\ b_4 = 1/100$

   -Définir l'intervalle de temps sur lequel on veut représenter la fonction par exemple $[0, 3]$ et l'échantillonnage par exemple $1/100$.

   -Définir la fonction signal S_n pour $n = 1, 2, 3, 4$ et décrire la relation de récurrence permettant de passer de S_n à S_{n+1}

   -Ecrire une boucle pour calculer S_4

   -Afficher le graphe de S_4

2. Même exercice sans faire de boucle.

   Préciser l'ordre n de la série de Fourier (ici $n = 4$)

   Définir le vecteur $p = (1, 2, 3, \dots.n)$

   -Définir l'intervalle de temps sur lequel on veut représenter la fonction par exemple $[0, 3]$ et l'échantillonnage par exemple $1/100$.

   -Ecrire une formule permettant d'obtenir $\Sigma_{i=1}^{n} a_k \cos(kt)$ e, fonction des matrices x, p et de la fonction cosinus.

-Afficher le graphe de S_4

Comparer les temps de calculs de 1 et 2.

3. Variante bruitée.

   La fonction rand$(4,1)$ permet de choisir « au hasard » un vecteur ligne constitué de 4 nombre pris au hasard entre 0 et 1. Ce que veut dire « au hasard » n'est pas à savoir.

   Utiliser la méthode de l'exercice 4 pour créer un bruit aléatoire périodique $q(t)$ sous forme d'une fonction $q(t) = \Sigma_{i=1}^{11} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ ou les a_i et les b_i sont pris au hasard.

   Dessiner le signal $f(t) = (1 + b(t)/100)s(t)$ obtenu en bruitant un signal $s(t)$, pour $s(t)$ un signal connu. Faire l'exemple de $s(t)$ la fonction créneau qui est la fonction 1 périodique qui vaut $s(t) = t$ si $t \in [0, 1/2]$ et $s(t) = 1 - t$ si $t \in [1/2, 1]$

Exercice 2.3. Développer en série de Fourier les fonctions 2π périodiques dont la restriction à$[-\pi, \pi]$ est :

1. $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x < 0 \\ 1 & \text{si}\, x \geqslant 0 \end{cases}$

2. $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, x < 0 \\ x & \text{si}\, x \geqslant 0 \end{cases}$

3. $f_3(x) = |x|$

   Pour les fonctions f_1 et f_3, on explicitera la loi de conservation d'énergie (théorème de Parseval).

Exercice 2.4. Reprendre la méthode de l'exercice 2, 2 pour dessiner sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, et sur un même graphique f, $S_5(f)$, $S_{21}(f)$ pour f la fonction 2π périodique dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est $f(x) = |x|$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 3. Afficher sur deux graphiques distincts $f, S_5(f), S_{21}(f)$ d'une part, et $f - S_5$ et $f - S_{21}$ de l'autre.

Que constate-t-on ?

Exercice 2.5.

1. Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est $f(x) = e^{\alpha x}$.

2. En déduire les valeurs de $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha \cos(nx)}{\alpha^2 + n^2}$ et $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{\alpha^2 + n^2}$

3 Convergence ponctuelle, Noyau de Dirichlet. Autres convergences.

L'expression $S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\, e^{i2\pi k\frac{t}{a}} = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n} a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$ s'appelle le développement en série de Fourier de f, supposée périodique.

Exemple 3.1. Si f est un polynôme trigonométrique de degré d $f(x) = \sum_{-d}^{d} c_k(f)\ e^{i2\pi k\frac{t}{a}} = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{d} a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$, alors sa série de Fourier est

1. Si $n \leqslant d$, $S_n(f)(t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\, e^{i2\pi k\frac{t}{a}} = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{n} a_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a} + b_k(f) \cos 2\pi k\frac{t}{a}$, obtenu en oubliant les termes d'order n+1,…d

2. Si $n \geqslant d$, alors $S_n(f) = f$

Le paragraphe précédent, ainsi que cet exemple, incite à se poser la question : dans quelle mesure la série de Fourier $S_n(f)$ de la fonction f converge-t-elle vers f. En tout point ? Uniformément ? La réponse n'est pas évidente du tout, et la question de savoir pour quel genre de fonction on a convergence en tout point de la série de Fourier vers la fonction n'est pas résolue à ce jour. Elle a donné lieu à d'innombrables travaux et découvertes de Fourier (1772-1837), Dirichlet (1805-1859) Riemann (1826-1866), Lebesgue (1875-1941), Denjoy (1884-1974) jusqu'à L. Carleson né en 1928 qui à démontré en 1968 la convergence presque partout de la série de Fourier d'une fonction de L^2 (résultat amélioré depuis dans diverses directions).

3.1 Normes et notions de convergence.

Les premières notions de convergence ponctuelle à notre disposition sont :

1. La convergence en un point de $\mathbb{R}$.
2. La convergence en tout point de $\mathbb{R}$
3. La convergence uniforme.

Nous avons vu au paragraphe précédent la convergence au sens de la norme L^2.

$\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$

Le théorème de Parseval dit justement que dans cet espace la série de Fourier $S_n(f)$ converge vers f. Pour essayer d'organiser tout cela, on a une notion très générale, celle de norme ou de semi-norme.

On dit que $S_n(f)$ converge vers f pour la norme N (éventuellement la semi-norme N) si la suite $N(f - S_n(f))$ tend vers 0.

La convergence ponctuelle en un point x_0 est pas définie par une norme mais simplement par une « semi-norme » $N_{x_0}(f) = |f(x_0)|$.

$N_{x_0}(f - S_n(f)) = |f(x_0) - S_n(f)(x_0)|$

Les premiers exemples de norme sur les fonctions $a-$périodiques sont :

$\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}_{\,t\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|$ appelée norme uniforme, elle est exactement la norme de la convergence uniforme.

$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)| \frac{dt}{a}$ appelée norme L^1.

$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2 \frac{dt}{a}\right)^{1/2}$ que nous avons déjà vue.

Ces normes sont liées par la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Pour tout fonction mesurable* $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.

Remarque 3.3. Il se peut que l'une ou plusieurs de ces valeurs soit $+\infty$.

Démonstration. La première inégalité vient de l'inégalité de Cauchy Schwartz.

$\|f\|_1 = <|f|, 1>_{L^2} \leqslant \|f\|_2 \|1\| = \|f\|_2$

Pour la seconde, on écrit :

$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2 \frac{dt}{a}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} \|f\|_\infty^2 \frac{dt}{a}\right)^2 = \|f\|_\infty$ □

$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.

Corollaire 3.4. *La convergence uniforme entraine la convergence dans L^2 qui à son tour entraine la convergence dans L^1.*

Démonstration. $\|S_n(f) - f\|_1 \leqslant \|S_n(f) - f\|_2 \leqslant \|S_n(f) - f\|_\infty$

Si jamais $\|S_n(f) - f\|_\infty \to 0$ alors $\|S_n(f) - f\|_2$ aussi □

3.2 Noyau de Dirichlet et convergence simple.

Avant de commencer ce paragraphe, on rappelle quelques mots sur le produit de convolution que nous utiliserons à nouveau dans les chapitres suivant.

3.2.1 Produit de convolution.

Si f, g sont deux fonctions périodiques de période a, intégrables, le produit de convolution de f et g, noté $f * g$ est défini par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) g(x-t) \frac{dt}{a} = \int_0^a f(t) g(x-t) \frac{dt}{a} = \int_{-a/2}^{a/2} f(t) g(x-t) \frac{dt}{a}$$

Pour que cela ait un sens, il faut mettre quelques hypothèses. Si f et g sont continues c'est facile. Si elles sont dans L^2, on s'en sort grâce à l'inégalité de Cauchy Schwartz, si f et g sont dans L^1, grâce au théorème de Fubini, mais nous ne nous attarderons pas sur ces questions.

Avertissement 3.5. Nous admettrons que si f, g sont dans L^1 alors $f * g$ est définie presque partout et dans L^1. Cela résulte du théorème de Fubini.

Lemme 3.6. *Le produit de convolution est linéaire par rapport à chacune de ses composantes, et on a, pour tout triplet de fonctions f, g, h de L^1.*

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * e_n = c_n(f) e_n$
4. $c_n(f * g) = c_n(f) \times c_n(g)$

Ici $e_n(t) = e^{i2\pi n\frac{t}{a}}$ désigne la base hilbertienne habituelle de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$

Démonstration.

1 $f * g = \int_0^a f(t) g(x-t) \frac{dt}{a} =_{u=x-t} \int_x^{x-a} f(x-u) g(u) \frac{-du}{a} = \int_{x-a}^x f(x-u) g(u) \frac{du}{a} = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(x-u) g(u) \frac{du}{a} = g * f(x)$

2. $f * g = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) g(x-t) \frac{dt}{a}$, donc

$(f * g) * h(y) = \int_{x\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} \left(\int_{t\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) g(x-t) \frac{dt}{a} \right) h(y-x) \frac{dx}{a} \underset{\text{Fubini}}{=\!=} \int_{t\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) \int_{x\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} g(x-t) h(y-x)\, dx\, dt = \int_{t\in\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) (g * h)(y-t) dt = f * (g * h)(y)$

3. $f * e_n(x) = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) e^{i2\pi n\frac{x-t}{a}} \frac{dt}{a} = \left(\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t) e^{-i2\pi n\frac{t}{a}} \frac{dt}{a} \right) \times e^{2i\pi\frac{x}{a}} = c_n(f) e_n(x)$

4.

$c_n(f * g).e_n = (f * g) * e_n = f * (g * e_n) = f * c_n(g) e_n = c_n(g).(f * e_n) = c_n(f).c_n(g).e_n$

On applique 2 avec $h = e_n$. □

On peut reformuler le théorème à la mode des algébristes.

Proposition 3.7. *Le produit de convolution défini une structure d'algèbre commutative sur $L^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$. Les coefficients de Fourier sont des homomorphismes d'algèbres $c_n: (L^1, +, *) \to (\mathbb{C}, +, \times)$.*

Démonstration. En effet $f*g*e_n=f*c_n(g)e_n=c_n(f)c_n(g)\,e_n$. $\square$

Définition 3.8. *On note $\wedge$ l'application : $C(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})\rightarrow\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie par $\hat{f}(n)=c_n(f)$*

$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ c'est l'ensemble des suites a_n pourspacen $\in\mathbb{Z}$ $\quad(....c_{-2},c_{-1},c_0,c_1....c_k...)$

Proposition 3.9. $\widehat{f*g}=\hat{f}\,\hat{g}$.

Démonstration. C'est juste la reformulation de la proposition 3.5. $\square$

Théorème 3.10. *Si f est continue, $f*g$ aussi. Si f est de classe C^1, $f*g$ aussi et de plus $(f*g)'=f'*g$.*

Démonstration. Il s'agit du théorème de continuité et de dérivabilité des intégrales à paramètres.

On a $f*g(x)=\int_0^a g(t)f(x-t)\,\frac{dt}{a}$ cette intégrale à paramètre dépend continument t du paramètre

et en plus $f*g(x)'$ s'obtient teint en dérivant sous le signe somme par rapport au paramètre

$\left(\int_0^a g(t)f(x-t)\,\frac{dt}{a}\right)'=\int_0^a g(t)f'(x-t)\,\frac{dt}{a}=f'*g$

donc en particulier $f'*g=f*g'$ $\square$

Le théorème le plus important pour nous

Théorème 3.11. *Si f est C^1, $c_n(f')=in.\frac{2\pi}{a}\,c_n(f)$*

Démonstration. $c_n(f')\,e_n=f'*e_n=f*(e_n')$

alors comme $e^{i2\pi n\frac{t}{a}}=e_n$ on a $e_n'=in.\frac{2\pi}{a}\,e_n$

donc

$c_n(f')\,e_n=f'*e_n=f*(e_n')=in.\frac{2\pi}{a}\,(f*e_n)=in.\frac{2\pi}{a}\,c_n(f).e_n$ $\square$

Définition 3.12. *Noyau de Dirichlet. On appelle noyau de Dirichlet, et on note D_n, le polynôme trigonométrique $D_n=\sum_{-n}^n e_k$, $\quad D_n(t)=\Sigma_{k=-n}^n e^{k2i\pi\frac{t}{a}}=\Sigma_{k=-n}^n\left(e^{2i\pi\frac{t}{a}}\right)^k$*

Cette définition et la produit de convolution nous permettent de reformuler la série de Fourier.

Proposition 3.13. *Si* $f \in L^1$, $S_n(f) = f * D_n$.

Démonstration. $f * D_n = f * \sum_{-n}^{n} e_k = \sum_{-n}^{n} f * e_k = \sum_{-n}^{n} c_k(f) e_k$. □

Pour pouvoir aller plus loin on va faire quelques calculs.

Lemme 3.14.

1. $D_n(t) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\pi\frac{t}{a}\right)}{\sin\left(\pi\frac{t}{a}\right)}$, *si* $t \notin a\mathbb{Z}$

2. *La fonction* D_n *est paire*

3. $\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} D_n(t)\,\frac{dt}{a} = 1$

4. $\int_0^{a/2} D_n(t) \frac{dt}{a} = \frac{1}{2}$

Démonstration.

1. $\sum_{-n}^{n} e_k(t)$ est une série géométrique de raison $e^{2\pi i\frac{t}{a}} = \rho \neq 1$ et de premier terme $e^{-n2\pi i\frac{t}{a}}$. Il en résulte que $D_n(t) = e^{-n2\pi i\frac{t}{a}} \dfrac{1 - \left(e^{2\pi i\frac{t}{a}}\right)^{2n+2}}{1 - e^{2\pi i\frac{t}{a}}} = \dfrac{e^{-n2\pi i\frac{t}{a}} - \left(e^{2\pi i\frac{t}{a}}\right)^{n+2}}{1 - e^{2\pi i\frac{t}{a}}}$. On multiplie haut et bas par $e^{-\pi i\frac{t}{a}}$, et on obtient

en haut $e^{-(n+1)2\pi i\frac{t}{a}} - \left(e^{2\pi i\frac{t}{a}}\right)^{n+1} = -2i\sin\left((n+1)2\pi\frac{t}{a}\right)$

en bas $e^{-\pi i\frac{t}{a}} - e^{\pi i\frac{t}{a}} = -2i\sin\left(\pi\frac{t}{a}\right)$ $\qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\pi\frac{t}{a}\right)}{\sin\left(\pi\frac{t}{a}\right)}.$$

2. résulte de $e_k(-t) = e_{-k}(t)$

3. $\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} e_n(t)\,\frac{dt}{a} = 0$ sauf si $n = 0$ auquel cas cette intégrale vaut 1.

4. D_n est paire d'intégrale 1 sur $[-a/2, a/2]$ donc son intégrale sur $[0, a/2]$ vaut $1/2$. □

3.2.2 Le théorème de Dirichlet.

Si une fonction est continue par morceau, on note $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ ses limites à droite et à gauche en x_0.

La fonction signal $f_1(x)$ qui vaut 1 sur $[0,\pi]$ et 0 sur l'intervalle $[-\pi,0]$ est un exemple de fonction continue et même c^1 par morceaux

sa série de Fourier ressemble à $\Sigma_0^n \frac{\sin((2k+1))x}{2k+1} + \frac{1}{2}$ à vérifier

Théorème 3.15. *Soit f une fonction périodique C^1 par morceaux, et périodique de période a. Alors on a la convergence ponctuelle de la série de Fourier. Pour tout point x_0, la suite $S_n(f)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$.*

Pour simplifier le calcul, on suppose que $a = 2\pi$.

Démonstration. $S_n f(x_0) = f * D_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0-t))\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ dt

On coupe en deux morceaux entre 0 et π et entre $-\pi$ et 0, en tenant compte du fait que

$\int_0^{\pi} D_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}$, on a

$S_n f(x_0) - \left(\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0-t) - f(x_0^-))\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x_0-t) - f(x_0^+))\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}dt$

Pour démontrer que $\int_0^{\pi}\frac{(f(x_0-t) - f(x_0^-))}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left((2n+1)\pi\frac{t}{a}\right)$ dt tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on va appliquer le Lemme de Riemann Lebesgue à la fonction $g(t) = \frac{(f(x_0-t) - f(x_0))}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ceci est permis car puisque $f(x_0-t) - f(x_0^-) = -f_g'(x_0)t + o(t)$, comme $\sin(t/2) = t/2 + o(t)$donc au voisinage de 0, $g(t) = 2f_g'(x_0) + o(1)$, et la fonction g est continue par morceau sur $[0,\pi]$. □

$\int_0^{\pi}\frac{(f(x_0-t) - f(x_0^-))}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left((2n+1)\pi\frac{t}{a}\right)$ dt $= \int_0^{\pi} g(t)\sin\left((2n+1)\pi\frac{t}{a}\right)$ dt

3.2.3 Approximations.

D'après le théorème de Dirichlet, toute fonction de classe C^1 est une limite point par point de sa série de Fourier. En fait nous allons voir que la convergence de cette série est uniforme.

Théorème 3.16. *Soit f une fonction périodique de classe C^1 ; alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|$ est convergente ; il en résulte que f est la limite uniforme de sa série de Fourier.*

Démonstration. $\Sigma_{1\leqslant|k|\leqslant n}|c_k| = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{1}{k}.|kc_k| \leqslant_{\text{CS.}} \sqrt{\Sigma_{k=1}^n \frac{2}{k^2}}\;\|f'\|_2 \times \frac{a}{2\pi}$.

$c_k(f') = \frac{2i\pi}{a}kc_k(k)$, donc $|kc_k| = \frac{a}{2\pi}|c'(f)|$

$\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}|kc_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \|f'\|_2$ c'est l'inégalité de Bessel donc au total

$$\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{1}{k}.|kc_k|\leqslant\sqrt{\Sigma_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2}}\ \frac{a}{2\pi}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}|kc_k|^2)_2^{1/2}$$

La série de tg $|c_n|+|c_{-n}|$ est convergente donc la série trigonométrique de terme $c_n e^{2\pi i n\frac{t}{a}}+c_{-n}e^{-2\pi i n\frac{t}{a}}$ converge uniformément. Or d'après le théorème de Dirichlet, elle converge point à point vers f et donc elle converge uniformément vers f. $\square$

On en déduit le théorème de Weierstrass sur les polynômes trigonométriques.

Théorème 3.17. *Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

Démonstration. En effet toute fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ est limite uniforme de fonctions de classe C^1 . Quitte à grossir un peu $[\alpha,\beta]$ et à prolonger intelligemment la fonction, on peut dire que c'est la restriction d'une fonction C^1, périodique de période $\beta-\alpha+1$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. $\square$

Nous pouvons en déduire un théorème déjà mentionné (Parseval)

Corollaire 3.18. *La famille des e_n est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.*

Démonstration. En effet par définition une fonction de L^2 est limite dans cet espace d'une suite de fonctions continues. Or une fonction continue peut être approchée uniformément par un polynôme trigonométrique, et donc aussi pour la norme L^2. $\square$

On en déduit aussi le théorème de Weierstrass.

Théorème 3.19. *Toute fonction continue sur un intervalle est limite uniforme de polynômes.*

Démonstration. En effet, sur un intervalle bornée, $e^{in\frac{t}{a}}=\Sigma_0^{\infty}\frac{\left(\frac{int}{a}\right)^k}{k!}$ est limite uniforme des $P_l(t)=\Sigma_0^{l}\frac{\left(\frac{int}{a}\right)^k}{k!}$. Donc sur un intervalle compact donné, tout polynôme trigonométrique peut être approché uniformément par un polynôme. $\square$

Une application est aussi le théorème de l'injection de Lebesgue.

Théorème 3.20. *(Lebesgue) Si deux fonctions de L^1 ont même série de Fourier, elles sont égales.*

Démonstration. On le démontre d'abord ce résultat pour deux fonctions de classe C^1, ensuite pour deux fonction continues, ensuite on indique l'idée de démonstration pour deux fonctions L^1. Il suffit évidemment de vérifier que si tous les coefficients de Fourier d'une fonction sont nuls, cette fonction est nulle.

Si f est C^1, elle est limite uniforme de sa série de Fourier. Si tous les coefficients de Fourier sont nuls, elle est nulle. Donc si deux fonctions f, g ont même série de Fourier $f - g$ a tous ses coefficients de Fourier nuls donc elle est nulle.

Si f est seulement continue, on peut considérer $g = \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$. Comme la moyenne de f est nulle (c'est $c_0(f)$), la fonction g est est périodique et tous ses coefficients de Fourier sont nuls $\left(c_n(g) = \frac{c_n(f)}{in}\right)$. Donc g est nulle et f aussi.

** Si f est seulement L^1, $g = \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$ est continue. Si $c_0(f) = 0$, la fonction g est périodique, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls, donc g est nulle (presque partout) . Il en résulte que f aussi. C'est à ce point que Lebesgue intervient en inventant la de théorie de la mesure : noter que l'ensemble des boréliens tels que $\int f.1_A = 0$ est une σ algèbre qui contient les intervalles, et donc $\int f.1_A = 0$ pour tous les boréliens, ce qui permet de vérifier que $f = 0$ presque partout.** □

Théorème 3.21. *Si une fonction de L^1 a sa série de Fourier normalement convergente, c'est à dire si $\Sigma|a_n| + |b_n| < \infty$ ou si la série des $|c_n|$ est convergente, alors cette fonction est continue et est la limite uniforme de sa série de Fourier.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème précédent, vu qu'alors f et sa série de Fourier (qui est une fonction continue) ont les mêmes coefficients de Fourier. □

3.3 Dérivation et convergence.

3.3.1 Fonctions indéfiniment dérivables.

On reprend la formule fondamentale qui calcule les coefficients de Fourier de la dérivée d'une fonction 2π périodique. $c_n(f') = in c_n(f)$, ou si l'on préfère les coefficients de Fourier réels, a_n, b_n $a_n(f') = n b_n(f)$, $b_n(f') = -n a_n(f)$.

Autre démonstration

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\, f(t) e^{int}\Big|_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{dt} = \mathrm{in}\, c_n(f)$$

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\, f(t)\cos(nt)\big|_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{dt} = n b_n(f)$$

$$b_n(f') = -n a_n(f)$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\, f(t)\sin(nt)\big|_0^{2\pi} - \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{dt} = -n a_n(f)$$

Par récurrence , on en déduit :

Proposition 3.22. *Si f est de classe C^k, alors $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k} c_n(f^{[k]}) = \frac{1}{n^k}\, o(1)$.* □

si $c_n(f') = i n c_n(f)$ en recommençant k fois

$c_n(f^{[k]}) = (i n)^k c_n(f)$

Il en résulte que.

Théorème 3.23. *Une fonction f est de classe C^∞ si et seulement si pour tout k, ses coefficients de Fourier satisfont $c_n(f) = \frac{1}{n^k} o(1)$.*

Démonstration. En effet, l'injectivité de la transformée de Fourier montre que sous l'hypothèse mentionnée, on a convergence uniforme de la série de Fourier vers f. Et les théorèmes usuels de dérivation terme à terme d'une série de fonctions donnent alors le résultat. □

Pour une fonction périodique de période a

$$c_n(f') = \frac{1}{a}\int_0^a f'(t)\, e^{-\frac{2\pi}{a} i n t}\, \mathrm{dt} = \frac{1}{a}\, f(t) e^{-\frac{2\pi}{a} i n t}\Big|_0^a + \frac{i n}{a} \times 2\pi \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-2\pi/\mathrm{a} i n t}\, \frac{d \quad t}{a} = i\, \frac{2\pi}{a} n\, c_n(f)$$

au total $c_n(f') = i\, \frac{2\pi}{a} n\, c_n(f)$

3.3.2 * Espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$, dérivée au sens L^2 .*

Définition 3.24. *Soit f une fonction de mesurable sur $(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$. On dit que f admet une dérivée dans L^2 si il existe une fonction g dans $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ telle que $f(x) - \int_0^x g(t)\, dt$ soit constante. La fonction g est la dérivée de f au sens $L^{2.}$*

Définition 3.25. *L'espace $H^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ est l'espace vectoriel des fonction mesurables dur $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ qui admettent une dérivée dans $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.*

Pour avoir une fonction dérivable au sens L^2, mais pas dérivable il suffit d'intégrer une fonction L^2 qui est compliquée ; nous donnons deux exemples.

Exemple 3.26. Dans $([-1, 1])$ la fonction $|x|$ admet une dérivée au sens L^2. Sa dérivée est la fonction signe(x). Ainsi $|x|$ est une fonction de $H^1[-1, 1]$.

Exemple 3.27. Rappelons que la fonction x^α est dans L^2 si et seulement si $2\alpha > -1$. Ainsi, dans $L^2[0, 1]$ la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x t^{-1/4}\, \mathrm{dt} = \frac{4}{3} x^{3/4}$ est une fonction de $H^1([0, 1])$ mais n'est pas dérivable en 0.

Lemme 3.28. *Si $f \in H^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ et si f' désigne sa dérivée au sens L^2, alors f est continue et les coefficients de Fourier de f et ceux de f' sont liés par* $-\frac{2i\pi}{a} n c_n(f) = c_n(f')$.

on a $|f(x) - f(y)| = |<f', 1_{[x,y]}>| \leqslant \|f'\|_2 \sqrt{|x-y|}$, donc f est Holder 1/2

$c_n(f) = \int_0^a e^{-i2\pi n\frac{x}{a}} \int_0^x g(t)\, dt \frac{\mathrm{dx}}{a} \overline{\overline{\text{Fubini}}} \int_0^a g(t) \int_t^a e^{-i2\pi n\frac{x}{a}} \mathrm{dx} = \int_0^a g(t) a \frac{e^{-i2\pi n\frac{t}{a}}}{2\pi \mathrm{in}} \mathrm{dt} + \int_0^a g(t) \frac{a}{2\pi i n} \mathrm{dt}$

Comme $f(x) - \int_0^x g(t)\, dt$ est constante, et comme f est périodique, $f(a) = \int_0^a g(t)\, dt = f(0) = 0$, donc le second terme est nul.

Théorème 3.29. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

i. La fonction f admet une dérivée dans L^2

ii. La série $n\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (ou la série $n|c_n| + n|c_{-n}|$)est dans l^2

iii. la série $n^2(a_n^2 + b_n^2) = n^2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$est convergente.

Démonstration. Démontrons que $i \Rightarrow ii$. Si g est la dérivée de f, les coefficient de Fourier de f sont $c_n(f) = \frac{-a}{i2\pi n} c_n(g)$. Donc si g est dans L^n la série $(n c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$. Le fait que $ii \Rightarrow iii$ est la définition de l^2. Reste à démontrer iii.

Supposons que la série $n^2(a_n^2 + b_n^2) = n^2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$est convergente. On peut alors considérer la fonction g de L^2 dont les coefficients de Fourier sont $-\frac{2i\pi}{a} n c_n(f)$.

Fixons $x \in [0, a]$, on a :

$<g, 1_{[0,x]}> = <\Sigma - \frac{2i\pi}{a} n c_n e_n, 1_{[0,x]}>$

Par continuité du produit scalaire, il en résulte que la série de terme général $u_n(x) = <-\frac{2i\pi}{a} n c_n e_n, 1_{[0,x]}> = c_n\,(e_n(x) - 1)$ converge.

Mais comme la série de t.g $n c_n$ est dans l^2 et comme $c_n = \frac{1}{n}.n c_n$, l'inégalité de Cauchy Schwartz montre que la série de tg c_n converge absolument :

$\Sigma_{1\leqslant|k|\leqslant n} |c_k| \leqslant \sqrt{\Sigma_{1\leqslant|k|\leqslant n} \frac{1}{k^2}} \|(n c_n)\|_2$

Ainsi, il existe une constante C telle que $\Sigma_{1\leqslant|k|\leqslant n} |u_n(x)| \leqslant C \|(n c_n)\|_2$

Il en résulte que la série de tg $u_n(x)$converge normalement vers une fonction continue. Cet fonction est f par le théorème de l'injection de Lebesgue.

□

Remarquons que nous avons démontré au passage le :

Théorème 3.30. *Si f admet une dérivée dans L^2, alors f est continue et f est la limite uniforme de sa série de Fourier.* $\square$

3.4 L'équation de la chaleur, une première visite.

Nous savons que la famille des fonctions $\exp 2\pi i n \frac{x}{a}$ est une famille de vecteurs propres pour la dérivation dans l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.

$\frac{d}{dx} e_n = \frac{2i\pi n}{a} e_n$

Ceci est très utile pour résoudre les équations aux dérivées partielles comme l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$ sur un intervalle $[0,a]$.

Fourier nous dit : on considère cette équation comme équation différentielle linéaire dans l'espace vectoriel $E = C^\infty[0,a]$. Elle devient $\frac{dF}{dt} = \Delta F$, où Δ est l'opérateur linéaire $\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Comme on a une base de diagonalisation de Δ, on peut essayer de résoudre l'équation.

Plus précisément si $f(t,.)$ est une solution, et si les $c_n(t)$ sont les coordonnées du vecteur $f(t,.)$ dans cette base, alors $\frac{d}{dt} c_n(t) = -\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} c_n(t)$, donc $c_n(t) = c_n(0) e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t}$.

Si on ne tient pas compte des problèmes de convergence, on peut alors décrire une solution.

Si $f(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp 2\pi i n \frac{x}{a}$, alors $f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t} \exp 2\pi i n \frac{x}{a}$

Théorème 3.31. *Soit $f \in L^2[0,a]$ et $c_n(f) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}}\, \mathrm{dt}$.*

Alors la série de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ de termes général $c_n e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t} \exp 2\pi i n \frac{x}{a}$ converge vers une fonction $f(t,x)$ indéfiniment dérivable par rapport à t et x et qui satisfait l'équation de la chaleur.

Dans L^2, $\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_2 = 0$

Si de plus la série c_n est dans L^1, par exemple si $f \in H^1[0,a]$, alors $\lim_{t\to 0^+} \|f_t - f\|_\infty = 0$

Comme f est dans L^2 la suite des c_n tend vers 0 et est donc bornée.

Par ailleurs, on a $\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} c_n e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t} \exp 2\pi i n \frac{x}{a}\right| = \left(4\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\right)^k (2\pi n)^l e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t} \leqslant (Cn)^{2k+l} e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t}$

Ainsi sur tout intervalle $[t_0,\infty[$, on a une majoration

$\mathrm{Sup}_{t\geqslant t_0} \left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} c_n e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t} \exp 2\pi i n \frac{x}{a}\right| \leqslant r_n = (Cn)^{2k+l} e^{-4\frac{\pi^2 n^2}{a^2} t_0}$

qui est une série convergente. Les théorèmes usuels montrent que la série de fonction considérée est C^∞ sur $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}$ et qu'on peut la dériver terme à terme. Par construction on obtient une solution de l'équation de la chaleur.

3.5 Exercices.

Exercice 3.1. Rappeler le calcul du noyau de Dirichlet, $D_n(t) = \sum_{-n}^{n} e^{ikt}$, et le dessiner sur l'intervalle $]-\pi, 3\pi[$ pour $n=5$ ou 7, affichez simultanément D_5, D_7, D_9 sur cet intervalle.

Exercice 3.2. A Soit f une fonction continue, 2π -périodique nulle en 0. On suppose que f est dérivable à gauche et à droite en 0.

1. Démontrer que la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix}-1}$ est continue par morceaux. Démontrer que les coefficients de Fourier de f et ceux de g sont liés par la formule : $c_n(f) = c_{n-1}(g) - c_n(g)$

2. En déduire que $\Sigma_{k=-n}^{n} c_k(f) = c_{n-1}(g) - c_{-(n+1)}(g)$, et que $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = 0$

3. On suppose que f est dérivable en un point x_0. En considérant $f_0 = f(x - x_0)$, et en lui appliquant le résultat précédent, démontrer que $S_n(f)\,(x_0)$ converge vers $f(x_0)$.

4. Démontrer que, si f est C^1, alors la série de terme général $n(|c_n| + |c_{-n}|)$ est de carré intégrable. Démonter que $\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant C\left(\sum_n^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$, où $C = \|f'\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f')^2 \frac{\mathrm{dt}}{2\pi}\right)^{1/2}$

5. Démontrer que, si f est C^k, alors la série de terme général $n^k(|c_n| + |c_{-n}|)$ est de carré intégrable et que $\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant C_k\left(\sum_n^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right)^{1/2}$, où C_k est une constante qui ne dépend que de f.

Exercice 3.3. Phénomène de Gibbs.

Le théorème de Dirichlet prédit une convergence bizarre pour une fonction.

1 Approche théorique.

Démontrer que $\sin\left(\frac{x}{2}\right)(1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + +2\cos nx) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$

Démontrer que si $x \in]0, 2\pi[$, la suite des intégrales $I_n = \int_\pi^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$ tend vers 0.

En déduire que si $x \in]0, 2\pi[$, on a

$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots +$

Posant $s_n(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$, montrer que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt + \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\,dt$$

Démontrer que le premier terme est $o(1/n)$ en vérifiant que $\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

Soit $x_n = \pi/(n+1/2)$. Démontrer que $\int_0^{x_n} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

En utilisant que si $t \in [0,\,\pi]$, $\sin t \geqslant t - \frac{t^3}{3!}$ (pourquoi ?), démontrer que $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} \geqslant \pi(\pi^2/18 - 1/2) \geqslant 0,15$

En déduire que pour n suffisamment grand, la valeur absolue de la suite $s_n(x_n)$ dépasse de 5% la valeur absolue de la fonction

2 TP : Approche numérique.

Dessiner sur $[-4,10]$ la fonction f 2π périodique dont la restriction à $]0,2\pi[$ est $\frac{\pi - x}{2}$.

Dessiner sur le même schéma f et s_n pour $n=2$, puis 5, puis 20. Dessiner $f - s_n(f)$ pour $n=20$.

Estimer l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ en calculant la somme des trapèzes de la fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ divisée en 20 parties T_n puis par la méthode de Simpson $S_n = (2T_{2n} - T_n)$, pour $n=10$.

4 Signaux, filtres et convolution.

Un signal est simplement une fonction $f(t)$ du temps. Nous allons ici discuter de signaux périodiques de période a fixée. Ainsi un signal une fonction $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, ou même peut-être à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ (ce qui ne change pas grand chose à la théorie).

Avertissement 4.1. Ici, on se limite au cas des signaux périodique de période a fixée pour avoir une théorie simple. On peut se demander (c'est déjà ce qu'à fait Fourier) ce qui se passe pour des signaux non périodiques ou si $a \to \infty$. Comme avant d'apprendre à courir, on apprend à marcher, on reporte cela au cours de théorie du signal de M1.

4.1 Filtres.

On commence par une définition informelle.

Définition 4.2. *Un filtre est une boite noire qui prend un signal, le triture et en renvoi un autre. C'est donc une application : $A: X \to X$ ou X désigne l'espace vectoriel de toutes fonctions de $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

Par exemple l'oreille humaine est un filtre qui reçoit la musique et qui rend une impression (agréable ou pas). Mais ce genre de filtre est a peu près inconnu. Plus simple, un opérateur téléphonique (SFR, ou Orange) prend le son de la voix de l'émetteur, fait des tas de choses très très compliquées et la transforme en son émis par le récepteur. C'est un filtre.

Un poste de radio reçoit des ondes de plusieurs (centaines d'émetteurs) disons $X_{\text{FranceInter}} + X_{\text{Europe1}} + X_{\text{RFM}} \dots$ et il renvoie $Y_{\text{France} \quad \text{Musique}}$ si on l'a bien réglé, qui est le signal sonore de France Musique.

Un filtre photographique est un morceaux de verre coloré (en vert, rouge ou jaune). Il prend un signal lumineux, et ne laisse passer que certaines couleur de la lumière.

Comment ça marche ? La théorie de Fourier va nous donner la réponse.

Un filtre sympathique est **linéaire** : si il reçoit les signaux f et g, il rend le signal $Af + Ag$.

Remarque 4.3. Les vrais filtres de la vraie vie ne sont jamais linéaires mais souvent « presque » linéaire.

Rappelons donc la définition d'énergie et de puissance d'un signal.

Définition 4.4. *L'énergie d'un signal est* $E(f) = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2 \, dt$*, sa puissance est* $P(f) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2 \, dt$

Rappelons aussi que dans un espace vectoriel normé, une application linéaire $A: E \to E$ est continue si et seulement si il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$. On défini alors la norme d'opérateur de A par la formule : $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

On considère un filtre. Si le signal envoyé est d'énergie finie, le signal reçu aussi. On pense d'ailleurs que l'énergie du signal reçu n'est pas trop grande par rapport à celle du signal envoyé ; si on envoie un signal d'énergie 1 Watt, on ne s'attend pas à en recevoir un kW sauf a avoir mis un gros appareil entre les deux. Reformulé en terme de norme, nous supposerons donc que les filtres sont des applications linéaires continues.

Mais l'hypothèse la plus importante que nous allons faire est celle d'**invariance par rapport au temps**. Si je téléphone à ma femme pour lui dire « bonjour chérie, comment ça va », et que je recommence dans 10 minutes, je suppose et j'espère que le signal reçu dans 10 minutes serait le même que le premier.

Notation 4.5. *Si* $u \in \mathbb{R}$*, nous noterons* T_u *l'opérateur de translation par rapport au temps. Ainsi* $T_u(f)$ *est la fonction* $T_u(f)(t) = f(t+u)$.

La famille des opérateurs T_u est très utile.

Proposition 4.6. *L'opérateur* $T_u: L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ *est unitaire. De plus* $T_{u+v} = T_u \circ T_v$.

Nous arrivons donc à la définition mathématique des filtres.

Définition 4.7. *L'opérateur linéaire* $A: L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ *est un filtre si il est continu et si il commute à la translation au temps.*

Autrement dit si pour toute fonction f *et tout réel* u $(Af)(t+u) = AT_u(f)(t)$*, ou plus simplement* $f_u(t) = f(t+u)$*, ou si on veut* $T_u \circ A = A \circ T_u$

Dans la suite nous cherchons à étudier un filtre A, qui satisfait donc ces deux hypothèses : continuité et invariance. Parmi les fonctions périodiques, il y a les fonctions $e_n = \exp n\frac{2i\pi}{a}\, t$, où n est un entier, que nous connaissons bien puisque c'est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$.

Le lemme suivant va nous montrer que cette base est une base de vecteurs propres de A.

Lemme 4.8. *Pour tout temps* u *et tout entier* n*,* $T_u(e_n) = e^{n\frac{2i\pi}{a}u}\, e_n$*. Autrement dit* e_n *est un vecteur propre de tous les opérateurs de translation par rapport aux temps.*

Supposons que A soit un filtre. Son invariance par rapport au temps montre que pour tout nombre réel u, on a :

$$T_u(Ae_n) = AT_u(e_n) = e^{n\frac{2i\pi}{a}u}\, A(e_n)$$

En spécialisant cette identité à l'instant 0, il vient $(Ae_n)(u) = A(e_n)(0)\, e_n(u)$, ce qui veut dire que e_n est un vecteur propre de Aet en posant $H(n) = A(e_n)(0)$, on obtient :

Proposition 4.9. *Si* n *est un entier fixé, la fonction* $e_n = \exp n\frac{2i\pi}{a} t$ *est un vecteur propre de* A*, la valeur propre associée est* $H(n) = A(e_n)(0)$ $\square$

Il est donc important de se rappeler que les fonctions trigonométriques forment une base hilbertienne de l'espace des fonctions périodiques et d'énergie finie, car nous avons ainsi **diagonalisé l'opérateur** $\boldsymbol{A}$. Pour continuer notre étude, en utilisant la continuité des filtres, commençons par une définition.

Définition 4.10. *L'énergie d'un signal est* $E(f) = \int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2\, dt$*, sa puissance est* $P(f) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} |f(t)|^2\, dt$

Remarque 4.11. L'énergie est mesurée en Joule, ou en Kg.$m^2\, s^{-2}$, la puissance en Watt. Un W c'est un Joule par seconde. Un joule c'est le double de l'énergie d'un objet de masse 1k allant a 1 mètre par seconde 3, 6 km / heure.

Il ne faut pas confondre cette notion de puissance avec celle de puissance sonore mesurée en décibel. Pour mesurer la puissance sonore, il faut considérer le son comme une onde de pression.

On considère un filtre. Si le signal envoyé est d'énergie finie, le signal reçu aussi. On pense d'ailleurs que l'énergie du signal reçu n'est pas trop grande par rapport à celle du signal envoyé ; si on envoie un signal d'énergie 1 Watt, on ne s'attend pas à en recevoir un 1GW sauf a avoir mis un gros appareil entre les deux.

Rappel. Dans un espace vectoriel normé une application linéaire A: $E \to E$ est continue si et seulement si il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$. On défini alors la norme d'opérateur de A par la formule : $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Nous arrivons enfin à la définition d'un filtre mathématique.

Définition 4.12. *Un filtre est un application linéaire continue* A: $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ *qui commute à la translation par rapport au temps.*

D'après ce qui précède, un filtre A est « diagonalisable en base orthonormée », puisqu'on connait une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$ formée de vecteurs propres. De plus notre filtre A est une application linéaire continue donc si λ est une valeur propre de A, on a l'inégalité $|\lambda| \leqslant \|A\|$, et le spectre des valeurs propre de A est donc bornée.

Proposition 4.13. *Soit* A *un filtre, et* $(H(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *la suite des valeurs propres associées aux vecteurs propres* e_n*. La suite* $(H(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est bornée. Si* $f \in L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$*, on a* $A(f) = \Sigma_n c_n(f) H(n)\, e_n$*, la convergence ayant lieu dans* $L^2(\mathbb{R}/a\mathbb{Z})$*.*

Réciproquement, si $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une suite bornée de nombre complexe, la formule* $A(f) = \Sigma_n c_n(f) H(n)\, e_n$ *défini un filtre de norme* $\mathrm{Sup}_n |h_n|$

Démonstration. Le premier point résulte de la continuité de A et du fait que dans L^2, la fonction f est la limite de la série de Fourier $f = \Sigma c_n(f) e_n$.

Pour la réciproque, notons que si la fonction f est dans L^2, la série de terme général $c_n(f)\, e_n$ est de Cauchy dans L^2. Comme la suite h_n est bornée, il en est de même de la série de tg $h_n.c_n(f)\, e_n$. L'opérateur $A(f)$ est donc bien défini, et est clairement linéaire. □

Dans certains cas, on peut exprimer un filtre grâce à un produit de convolution.

Théorème 4.14. *On suppose que la suite* $(H(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est dans* $L^1(\mathbb{Z})$*. Soit* Φ *la fonction continue*

$\Phi(t) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\, H(a_n)e^{int/a}$. *Alors pour toute fonction f de L^2, $\Phi * f = A(f)$ défini un filtre. De plus $\|A\| = \mathrm{Sup}_n |H(n)|$.*

4.2 Filtres passe-bas.

Dans la pratique, notre oreille supprime tous les sons dont la fréquence est supérieure à 20kHz. Donc le filtre « oreille » est tel que $H(n) = 0$ si $|n| > 20\ 000$, et le filtre est donc défini par une somme finie de la forme $A(f) = \sum_{-N=-20000}^{N=20000} H(n)\, c_n(f)\, e^{i2\pi nt}$.

On dit qu'on a un filtre **passe-bas,** parce que l'oreille ne laisse passer que les basses fréquences.

L'exemple du paragraphe précédent montre que le noyau de Dirichlet est un filtre passe bas.

On conserve les notations précédentes.

Proposition 4.15. *Si A est un filtre passe bas, et si A supprime toutes les fréquences plus grande que N, alors il existe un polynôme trigonométrique Φ de degré N tel que $A(f) = f * \Phi$. Plus précisément, Φ est le polynôme trigonométrique $\Phi = \sum_{-N}^{N} H(n/a)\, e^{i2\pi \mathrm{nt}/a}$.*

Réciproquement si Φ est un polynôme trigonométrique de degré N, l'opérateur A défini par $A(f) = f * \Phi_N$ est un filtre passe-bas.

Démonstration. Cette formule résulte de $c_n(f)e_n = f * e_n$. □

Remarque 4.16. $\Phi(t) = \sum_{-N}^{N} H(n/a)\, e^{\mathrm{int}/a}$ le filtre associé fait deux choses :

- Il supprime les fréquences $>N$ ou $<N$ telles que $H(n/a) = 0$

- Il augmente ou diminue les amplitudes selon que $H(n/a) > 1$ ou <1

Remarque 4.17. Il est important de noter qu'un filtre ne change pas les **fréquences**, mais simplement leurs **amplitudes**. Noter que dans la musique, on sait depuis longtemps que l'information la plus importante est la fréquence (et la durée) de la note jouée, plus que l'énergie qu'on y met : les partitions musicales sont des fonctions du temps qui indiquent la note jouée (par exemple le sol 743 ou le la 880) avec une précision assez importante. L'amplitude du son est un choix laissé à l'interprète : la Reine de la Nuit va jusqu'au Fa5 = 1440, et pour y arriver elle hurle des fois un peu..

4.3 Exercices.

Exercice 4.1. Modulation d'amplitude.

La fréquence des stations à modulation d'amplitude est de l'ordre de 16.10^3 à 23.10^3 Hz :

France inter 162 kHz Europe 1 180 kHz BBC 198 RMC 216 et RTL 234. Noter que la différence entre deux stations est 18 kHz 18kHz, 18kHz, 18kHz, c'est le double de la fréquence audible, et cela n'est pas du du tout au hasard. Le but de cet exercice est d'expliquer pourquoi. Rappelons que les fréquences audibles (pas pour tous) sont entre 20Hz et 10kHz, mais les postes AM un peu démodés ne permettront que d'écouter des aigus jusque 5kHz (c'est moins joli que la FM).

On part du principe que la station émettrice envoie une onde « constante » $V_1 \cos 2\pi\omega_1 t$, ou justement ω_1 est caractéristique de la station. Cette onde s'appelle la porteuse. Par exemple France Inter a $\omega = 162\,\text{kHz}$. Pour envoyer un signal humain par exemple un La 880 Hz, elle va moduler son amplitude grâce à ce facteur et envoyer , en fait $(A + a \cos 2\pi\omega_0 t)\cos(2\pi\omega_1 t)$.

1. Qui sont ω_0, ω_1 dans cet exemple ?

2. Dessiner un exemple ou $\omega_1 = 10\,\text{Hz}$ et $\omega_0 = 1\text{Hz}$. sur une durée de 3 secondes, avec $A = 2, a = 1$. Puis $A = 1$ $a = 2$. En fait si $a > A$ il y a une zone ou l'onde est toute petite et cela pose des problèmes..

3. En s'aidant de la formule $2\cos a.\cos b = \cos(a + b) - \cos(a - b)$, décomposer l'onde transmise en série de Fourier (on suppose que les ω_i sont des entiers.

Dessiner le spectre des fréquences de l'onde reçu quand France inter envoie un la 440 .

4. On considère un signal composite $v(t)$, et on envoie $(V + v(t))\cos(2\pi\omega_1 t)$. Comment se décompose le signal reçu en série de Fourier. Expliquer alors le choix des fréquences des ondes porteuses de radio AM.

5. On rappelle que la puissance d'un signal est $\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} v^2(t)\,\mathrm{d}t$. L'efficacité du signal est le rapport entre puissance totale des bandes latérales et la puissance totale envoyée. Quelle est l'efficacité théorique de notre émetteur sous l'hypothèse que $a < 0,9 \times A$.

** 6. On fait aussi des postes à PM (modulation de phase, ou « ondes courtes »). Dans ce cas, on envoie un signal sous la forme $A \cos\left(2\pi\omega_0 t + \frac{a(t)}{a_0}\right)$, ou $a(t)$ est le signal périodique de fréquence $\omega_1 \ll \omega_0$ à envoyer. Expliquer pourquoi si $\frac{a(t)}{a_0}$ est assez petit (disons inférieure à 0, 1), et si on néglige les amplitude de l'ordre de $0{,}01 a_0$, tout se passe comme si on a simplement modulé l'amplitude (faire un développement limité). On pourra utiliser la formule $\cos(x + h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2}\cos x + \alpha$ avec $|\alpha| \leqslant \frac{|h|^3}{6}$ On suppose que $a(t) = a_1 \cos(2\pi\omega_1 t)$ avec $a_1 = 0, 1a_0$. Quelles sont les nouvelles fréquences introduites ?

Donner un exemple numérique avec un signal de 1 Hz envoyé pendant 5 seconde avec une porteuse 100Hz : la porteuse est $\cos(2\pi\omega_0 t)$, sous l'hypothèse que $a(t) = 0, 1\cos 2\pi t$.

Comparer le signal linéaire avec un terme, avec deux termes, et le vrai signal.

Exercice 4.2. Noyau de Féjer.

1. Si u_n est une suite numérique qui converge vers l, alors la suite $v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$ converge aussi vers l.

2. Soit $D_n = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Démontrer que $F_n(t) = \frac{D_0 + \ldots + D_{n-1}}{n}(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2$

3. Vérifier que F_n est une fonction positive telle que $\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} F_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1$

3. Soit f une fonction continue 2π périodique, et $f_n = F_n * f$ démontrer que f_n converge vers f uniformément. On pourra écrire $(f - f_n)(y) = \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} F_n(t)\ (f(y-t) - f(y)) \frac{dt}{2\pi}$, et découper l'intégrale en deux $|t| < \eta$ et $|t| > \eta$

Exercice 4.3. Equation des ondes et des cordes vibrantes.

On considère l'espace des fonctions de classe C^2 en deux variables x, t. Une corde vibrante est, pour nous une fonction

$F\colon [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où L désigne la longueur de la corde et $\mathbb{R}$ la coordonnée de temps. (en fait il serait plus raisonnable de prendre un intervalle de temps assez bref, de l'ordre de $1/10$ seconde. On démontre et nous admettrons que F satisfait l'edp $c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$, ou c est une constante physique, la célérité, mesurée en $m s^{-1}$ qui va être interprétée par la suite. Ainsi, $F(x_0, t)$ est censé mesurer l'ordonnée de la corde au ponts d'abscisse x et à l'instant t. Par ailleurs la corde est fixe aux deux bouts, ce qui s'écrit $F(0, t) = F(L, t) = 0$

1. En faisant le changement de variable $u = x + ct, v = x - ct$ et en posant $G(u, v) = F\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$ démontrer que

$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = 0$, et en déduire q'il existe deux fonctions $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $F(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct)$

2. En écrivant la condition au limite $F(0,\ t) = 0$ démontrer que $h(y) = -g(-y)$ et que $f(x,\ t) = g(x + ct) - g(-x + ct)$

3. En écrivant la condition aux limites $F(L, t) = 0$, démontrer que g est périodique de période $2L$, et que $F(x, t) = F(x + ct, 0) + F(x - ct, 0)$ est impaire pour tout t fixé.

4. Développer g en série en série de Fourier $g(x) = a_0/2 + \Sigma_1^\infty a_n \cos n\pi\frac{x}{L} + b_n \sin n\pi\frac{x}{L}$; et en déduire que

$F(x,\ t) = \sum_{n \geqslant 1} A_n(t) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ où $-A_n(t) = 2a_n \sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right) + 2b_n \cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)$, pour une certaine période T que l'on précisera.

5 La transformée de Fourier discrète.

5.1 Introduction : la transformée de Fourier approchée.

On veut mettre **en pratique** la transformée de Fourier. On a donc une fonction dont on veut calculer les coefficients de Fourier. Celle-ci peut être donnée par exemple par une formule horrible pour laquelle on a aucune chance de pouvoir calculer les coefficients de Fourier par exemple $f(t) = \cos\,(2\pi t + 1\,/\,10\,\sin^3(2\pi t))$, ou alors une fonction observée dont on connait les valeurs a certains instants $t_0, ...t_N$, par exemple, et les valeurs mesurées du débit sanguin dans une section transversale de l'artère carotide pendant un battement cardiaque (voir exercice .)

Après filtrage, on aura simplement besoin de calculer des coefficients de Fourier dans une certaine bande. Comment faire ?

En principe, il faudrait calculer des intégrales très compliquées comme $\int f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{a}} dt$. D'habitude pour calculer une telle intégrale, on divise l'intervalle $[0, a]$ en N parties égales et on fait la somme des trapèzes de Riemann.

5.1.1 Rappel sur la méthode des trapèzes, calcul de la moyenne.

Si f: $[0,\, a] \to \mathbb{C}$ est une fonction, pour évaluer son intégrale par la méthode des trapèzes, on commence par subdiviser $[0, a]$ en N parties égales $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{a}{n}$, ..., $a_k = k.\frac{a}{N}$, ..., $a_n = a$. Puis on considère la fonction φ dont la restriction à chacun de ces intervalles est affine, et telle que $\varphi(a_i) = f(a_i)$. L'intégrale $T_N(f) = \int_a^b \varphi_N(t) dt$ est une bonne estimation de celle de f qui est la somme des trapèzes.

Proposition 5.1. $T_N(f) = \frac{a}{N}\big(\frac{1}{2} f(a_0) + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1}) + \frac{1}{2} f(a_n)\big)$.

Démonstration. Comme la restriction de φ à l'intervalle $[a_i,\, a_{i+1}]$ est affine, son intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(t)$ dt est l'aire d'un trapèze., qui est le produit de sa base $(a_{i+1} - a_i)$ par sa hauteur $\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$. On ajoute alors tous les termes pour obtenir le résultat. □

Dans le cas où f est en plus périodique de période a, et si l'on cherche sa valeur moyenne $\int_{\mathbb{R}/a\mathbb{Z}} f(t)\, \frac{\mathrm{dt}}{a}$, la formule se simplifie et devient la moyenne bête $m_N(f) = \frac{1}{N} \Sigma_{k=0}^{N-1}\, f\big(k\frac{a}{N}\big)$. Par construction, la suite des moyennes $m_N(f)$ converge vers la valeur moyenne de f.

Remarque 5.2. Pour ceux qui la connaissent, la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin donne un développement asymptotique de la suite $(T_N(f)_{N\to\infty}$, et permet de démontrer que si f est C^∞ et périodique de période a, alors $T_N(f) = o\big(\frac{1}{N^k}\big)$ pour tout entier k. La convergence est donc très rapide dans le cas qui nous intéresse.

Afin de pouvoir facilement programmer cette moyenne, on peut ré-écrire $m_N(f)$ en terme du produit scalaire des vecteurs lignes $1_N = (1, ..., 1)$ et du vecteur $\left(f\left(k.\frac{a}{N}\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant N-1} = (f(a_k))_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, on a :

$m_N(f) = \frac{1}{N} < 1_N.(f(a_k)) >$

5.1.2 Définition de la TF approchée.

On fixe une fonction f périodique de période a. On suppose connue f aux N points $a_k = k\frac{a}{N}$, et on veut estimer les coefficients de Fourier de f.

On vient de démontre que le premier coefficient de Fourier de f peut être approché par la moyenne $m_N(f) = \frac{1}{N}\Sigma_{k=1}^{N} f(a_k) = \frac{1}{N} < 1_N.\,(f(a_k) >$.

De même, le $n$ième coefficient de Fourier est la moyenne de la fonction $f(t)e^{-2\pi int}$. Ce coefficient peut donc être approché par la moyenne $\frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1} f(a_k)\, e^{-2\pi ik\frac{n}{N}}$.

Pour simplifier les calculs, nous posons $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ qui est une racine primitive N ième de l'unité.

L'intégrale approchée par la méthode des trapèzes pour calculer le n ième coefficient de Fourier est donc $\frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1} f(a_k)\,\omega^{-kn}$, ce qui nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 5.3. *Le n-ième coefficient de Fourier approché de la fonction f est*

$$c'_n(f) = \frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1} f(a_k)\,\omega^{-kn}, \quad \textit{où } \omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

Pour simplifier cette expression, nous introduisons le vecteur ligne $\Omega = (1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{(N-1)})$, et en convenant que $\Omega^l = (1, \omega^{kl}, \omega^{2l}, ..., \omega^{l(N-1)})$, nous obtenons :

$c'_n(f) = \frac{1}{N} < \Omega^{-n}.(f(a_k)) >$

La transformée de Fourier approchée de la fonction f est alors simple à définir

Définition 5.4. *L'application $\mathcal{F}_N$: $C(\mathbb{R} / a\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^N$ définie par $\mathcal{F}_N(f) = (c'_k(f))_{k=0}^{N}$ est la transformée de Fourier approchée de la fonction f.*

Par construction $\mathcal{F}_N(f)$ ne dépend que des valeurs de la fonction f aux point $f(a_k) = f\left(k.\frac{a}{n}\right)$. En introduisant la matrice (N, N) de Vandermonde des complexes $(1, \omega^{-1}, ..., \omega^{-N+1})$, notée Φ_N et définie par :

$$\Phi_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-l} & \omega^{-(N-1)} \\ & & & \\ 1 & \omega^{-k} & \omega^{-kl} & \omega^{-k(N-1)} \\ & & & \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^0 \\ \Omega^{-1} \\ \\ \Omega^{-k} \\ \\ \Omega^{-(N-1)} \end{pmatrix}$$

On peut écrire la transformée de Fourier discrète sous forme matricielle.

Proposition 5.5. $\mathcal{F}_N(f) = \frac{1}{N}\Phi_N \begin{pmatrix} f(0) \\ \\ f(k.\frac{a}{N}) \\ \\ f((N-1)\frac{a}{N}) \end{pmatrix}$

Nous n'avons appliqué la formule calculant les coefficients de Fourier approchés $c'_n(f)$ que pour les entiers compris entre 0 et $N-1$, et pas les autres, mais rien ne nous aurait empêché de le faire. En utilisant le fait que ω est une racine $N-$ième de l'unité nous observons le lemme suivant.

Lemme 5.6. *Si n est un entier, $c'_{N+n}(f) = c'_n(f)$ et en particulier, $c'_{N-n}(f) = c'_{-n}(f)$.*

On peut reformuler ce lemme en introduisant l'espace vectoriel $C(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ des fonctions définies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 5.7. *La transformée de Fourier approchée est une application linéaire.*

$$\mathcal{F}_N\colon C(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

5.1.3 Interpolation de Lagrange.

Au lieu d'utiliser la méthode des trapèzes pour calculer les coefficients de Fourier approchés, on aurait pu faire complètement autrement et rechercher le polynôme trigonométrique P_N qui prend les même valeurs que f aux points $a_k = k.\frac{a}{N}$. Pour ce faire nous allons simplement appliquer la méthode d'interpolation de Lagrange.

On cherche donc un polynôme $P(z) = \Sigma_{n=0}^{N-1} c_n z^n$ tel que $P(e^{i2\pi k/N}) = f(a_k)$

En gardant les notations du paragraphe précédent, on doit résoudre le système de N équations à N inconnues :

$$\text{(L)}\ \ f(a_k) = \Sigma_{n=0}^{N-1} c_n\, \omega^{kn}$$

où les inconnues sont les c_n. Il s'agit donc essentiellement d'inverser la matrice de Vandermonde dont les lignes sont $\Omega^0, \Omega, \Omega^2, ...\Omega^{N-1}$.

. *Le système (L) admet une unique solution, et celle-ci est donnée par la transformée de Fourier discrète. Autrement dit :*

$f(a_k) = \Sigma_{n=0}^{N-1} c'_n\, \omega^{kn}$, *où* $c'_n(f) = \frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1}\, f(a_k)\, \omega_N^{-kn}$.

Démonstration. Essayons d'expliquer pourquoi. Tout d'abord on rappelle un lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 5.8. *Si P est un polynôme* $\Sigma_{n=0}^{N-1} c_n\, z^n$ *est nul en N points, il est identiquement nul.* □

Il en résulte que l'application linéaire qui a un polynôme trigonométrique $\Sigma_0^{N-1} c_n\ e^{2i\pi\frac{t}{a}}$ associe sa valeur aux points $\left(k.\frac{a}{N}\right)_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ est *injective*. Donc elle est *surjective*, pour des questions de dimension. Une fonction f étant donnée, on peut donc considérer l'unique polynôme trigonométrique $L_N(f)$ de la forme $\Sigma_0^{N-1} c_n\ e^{2i\pi\frac{t}{a}}$ qui prend les même valeurs que f aux points a_k. Alors $f - P$ s'annule en tous ces points donc $L_N(f) = L_N(P)$. Ainsi, pour vérifier notre théorème qui dit que la transformée de Fourier approchée $\mathcal{F}_N$ et le polynôme de Lagrange L_N sont identiques, il suffit de le vérifier pour les monômes $e^{i2\pi n_0 t/a}$ dont les coefficients de Fourier approchés sont très facile à calculer.

$c'_n(e^{i2\pi n_0 t/a}) = \frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1}\, \omega^{kn_0}\, \omega^{-kn} = \frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1}\, \omega^{k(n_0-n)} = 0$ si $\omega^{n_0-n} \neq 1$ et $=1$ sinon, car ω est une racine N-ième de l'unité. □

□

Pour aller plus loin, nous allons mettre tout ça en formules.

5.2 La transformée de Fourier discrète.

Ce qui est important dans cette histoire c'est qu'on a inventé une nouvelle transformation de Fourier dont le schéma est qu'on a des applications linéaires

$$\begin{array}{lcll}
\text{Valeurs de la fonction } f \text{ aux points } \left(k\,\frac{a}{N}\right)_{k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{U}_N] = \mathbb{C}^N & \\
 & & \mathcal{F}_N\downarrow \quad \uparrow \mathcal{IF}_N & \text{Fourier discret et inverse} \\
\text{Coefficients approchés } (c_k)_{k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}] = \mathbb{C}^N &
\end{array}$$

Définition 5.9. *La transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N$ est l'application linéaire qui à la suite $(x_0..., x_{N-1})$ de nombres complexes associe les coefficients de l'unique polynôme trigonométrique $\Sigma_{l=0}^{N-1} c_l e^{2i\pi l \frac{t}{a}}$ dont les valeurs aux points$\left(k\frac{a}{N}\right)$ sont les x_k. Son inverse $\mathcal{IF}_N$ est l'application linéaire qui aux nombre complexe $c_0, ..., c_{N-1}$ associe la suites des valeurs du polynômes $P(z) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l z^l$ aux points $z_k = e^{i2\pi k\frac{a}{N}}$.*

On peut traduire cela en formules.

La TFD est l'application linéaire :

$$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$$
$$(x_0, ..., x_{N-1}) \to (c_0, ., c_n, ...c_N)$$

définie par $$c_n = \frac{1}{N}\Sigma_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-kn}$$

Son inverse la TFI est donnée par

$$\mathcal{IF}_N \ \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$$
$$(c_0, ., c_k, ...x_{N-1}) \to (x_0, ..., x_k, ...x_{N-1})$$

donnée par $$x_n = \Sigma_{k=0}^{N-1} c_k \omega_N^{kn}$$

On considère la matrice de Vandermonde $\Phi_N = (\omega^{-kn})_{0 \leqslant k \leqslant N-1, 0 \leqslant n \leqslant N-1}$

Proposition 5.10. *La matrice de la transformée de Fourier discrète est $\mathcal{F}_N$: $\frac{1}{N}\Phi_n$, celle de son inverse est $\mathcal{IF}_N = \bar{\Phi}_N$.*

Parfois on considère la transformée de Fourier discrète et normalisée, celle -ci est définie par $\Psi_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_N$. On remarque que

Proposition 5.11. *La transformée discrète et normalisée $\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\bar{\Phi}$ est une transformation unitaire qui induit une isométrie de $\mathbb{C}[\mathbb{U}_N]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$.*

5.3 La transformée de Fourier rapide.

Le problème de la mise en oeuvre des formules de la TFD est qu'elles font intervenir une matrice ayant N^2 coefficients. Ainsi, le calcul de l'image d'un vecteur de dimension N la calcul nécessite n^2 multiplications et autant d'additions, soit $2N^2$ opérations élémentaires. On va expliquer un algorithme de calcul très célèbre la transformée de Fourier rapide (FFT) qui permet de réduire considérablement ce nombre, dans le cas ou $N = 2^k$ est une puissance de 2.

5.3.1 Le principe.

On suppose que l'entier N est pair et on note $N' = N/2$, et pour les calculs, si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, alors $\omega' = e^{\frac{2i\pi}{N'}} = \omega^2$.

Rappelons que $N\mathcal{F}_N(a_0, ..., a_{N-1})_j = \Sigma_{i=0}^{N-1} \omega^{-ij} a_i$

et donc aussi $N'\mathcal{F}_{N'}(c_0, ..., c_{N'-1})_j = \Sigma_{i=0}^{N'-1} \omega^{-'ij} c_i$

SI $a = (a_0, ...a_{N-1})$, on note P_a le polynôme $P_a(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{N-1} z^{N-1}$, dont on va séparer les parties paires et impaires. On pose $a_{\text{pair}} = (a_0, a_2, ...a_{N-2})$ et $a_{\text{impair}} = (a_1, a_3, ..., a_{N-1})$, on obtient :

$$P_a(z) = P_{a_{\text{pair}}}(z^2) + z P_{a_{\text{impair}}}(z^2)$$

Soit :

$$N\mathcal{F}_N(a_0, ..., a_{N-1})_j = N\Sigma_{i=0}^{N-1} \omega^{-ij} a_i = 2N'\Sigma_{i=0}^{N'-1} \omega^{-2ij} a_{2i} + 2N'\Sigma_{i=0}^{N'-1} \omega^{-(2i+1)j} a_{2i+1}$$

comme $\omega' = \omega^2$, on a alors :

$$\omega^{2ij} = \omega'^{ij} \; ; \; \omega^{2i(N'+j)} = \omega'^{ij}$$

et

$$\omega^{(2i+1)j} = \omega^j \omega'^{ij} \quad ; \quad \omega^{(2i+1)(N'+j)} = \omega'^{N'} \omega^j \omega'^{ij} = -\omega^j \omega'^{ij}.$$

En reportant, on a ;

Proposition 5.12. *Si* $j \in \{0, ..., N'-1\}$, *alors*

$\mathcal{F}_N(a_0, ..., a_{N-1})_j = \mathcal{F}_{N'}(a_0, a_2..., a_{N-2})_j + \omega^{-j} \mathcal{F}_{N'}(a_1, a_4..., a_{N-1})_j$

$\mathcal{F}_N(a_0, ..., a_{N-1})_{N'+j} = \mathcal{F}_{N'}(a_0, a_2..., a_{N-2})_j - \omega^{-j} \mathcal{F}_{N'}(a_1, a_4..., a_{N-1})_j$

5.3.2 L'algorithme.

Ainsi le calcul de la transformée de Fourier $\mathcal{F}_N$ discrète d'ordre N se ramène au calcul de deux transformées de Fourier discrètes d'ordre $N/2$, de N multiplications et autant d'addition.

Si $N=2^k$, on peut itérer cette transformation k fois, calculer de 2^{k-1} TFD d'ordre 2, et remonter toutes les opérations nécessaires à calculer $\mathcal{F}_N$. Nous allons évaluer le nombre total de multiplications par des racines de l'unité et d'additions nécessaires à calculer la transformée de Fourier par cette méthode.

Les formules de la proposition précédente montrent que pour calculer chaque coefficient de $\mathcal{F}_N(a_0,\ldots, a_{N-1})$, on doit multiplier l'un des 2^{k-1} coefficients de $\mathcal{F}_{N'}(a_1,\ a_4\ldots,\ a_{N-1})$ par une racine de l'unité et faire une addition.

Autrement dit le nombre total de multiplications $m(k)$ utilisées pour calculer $\mathcal{F}_N$, sera celui pour calculer $\mathcal{F}_{N'}(a_0, a_2\ldots, a_{N-2})$, $\mathcal{F}_{N'}(a_1, a_4\ldots, a_{N-1})$ augmenté de $N'=2^{k-1}$ multiplications par les racines de l'unités $(\omega^{-j})_{j\in\{0,\ldots\ldots,N'-1\}}$, ou même $2^{k-1}-1$ car le cas ou $j=0$ ne nécessite pas de multiplication.

De même le nombre total d'addition $a(k)$ nécessaires au calcul de $\mathcal{F}_N(a_0,\ \ldots,\ a_{N-1})$ est celui nécéssaire au calcul de $\mathcal{F}_{N'}(a_0,a_2\ldots,a_{N-2})_j$ et de $\mathcal{F}_{N'}(a_1,a_4\ldots,a_{N-1})_j$, auquel s'ajoute $2N'=N=2^k$ additions.

En bref, nous avons démontré le lemme.

Lemme 5.13. $m(k)=2m(k-1)+(2^{k-1}-1)$ *;* $a(k)=2a(k-1)+2^k$. $\square$

On en déduit par une récurrence simple, et en observant que $k=\log_2(N)$

Proposition 5.14. $m(k)=(k-2)2^{k-1}+1; a(k)=k.2^k$.

$m(k)+a(k)=(\log_2 N-2)\frac{N}{2}+\mathrm{N}\log_2 N\leqslant\frac{3}{2}\,\mathrm{N}\log_2(N)$

Remarque 5.15. Le gain obtenu par cette méthode $\frac{3}{2}\mathrm{N}\log_2(N)$ au lieu de $2N^2$ est très substantiel. Pour $N=2^{10}=1024$ le nombre d'opérations est de l'ordre de 15000, alors que le nombre d'opérations nécessaires à appliquer les formules bêtes est de l'ordre de 2 millions. Asymptotiquement le gain est $N/\log_2 N$. Si $N=2^{20}\simeq 10^6$, le nombre d'opérations est 30 millions, ce qui est possible. Le carré de N, de l'ordre de mille milliards n'est simplement plus réalisable.

5.4 Exercices.

Exercice 5.1. Soit x la fonction périodique de période 1 dont la restriction à [0, 1] est $x(t)=|x-1/2|$.

Quelle est la transformée de Fourier approchée de x obtenue en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en 16 intervalles, et dessiner sur un même graphique x et le polynôme trigonométrique ainsi obtenu.

Exercice 5.2.

Le but de cet exercice et de montrer comment utiliser la TFD pour calculer les amplitudes des 20 premières harmoniques d'un signal. Par exemple la fonction dent de scie $1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Ici elle est paire, donc les coefficients de Fourier qui nous intéressent sont les b_n

Choisir un entier N par exemple $N=7$ et partager l'intervalle de définition du temps $[0,1]$ de la fonction supposée 1 périodique en 2^N intervalles.

Définir la fonction signal.

Définir les fréquences qui nous intéresse par exemple $f=\{1,2,...,n\}$

Pour $k=1$ à n définir le coefficient de Fourier b_k

Afficher l'histogramme des amplitudes b_k aux fréquences $(1,...,20)$

Exercice 5.3. Le but de cet exercice est au contraire de montrer comment à partir de donnée numérique la TFI permet de reconstituer une fonction. Les valeurs suivantes

D en l/s	0	3	5	0,125	5	0	5	1	0,5	0,125	0
t (en 1/10 s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tableau 5.1.

Représentent les valeurs mesurées du débit sanguin dans une section transversale de l'artère carotide pendant un battement cardiaque. La fréquence d'acquisition des données est constante et est égale à 10/T, où T = 1 s est la période de battement.

Utiliser la TFD pour représenter ces données par une fonction continue de période égale à 1.

Exercice 5.4. : Pour N = 4, la TFD de la suite: a_0, a_1, a_2, a_3 s'écrit: x_0, x_1, x_2, x_3

avec $x_j=\Sigma_{n=0}^{3} a_n e^{-i2\pi\frac{nk}{4}}$

1) Ecrire la matrice de l'application linéaire $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (on posera $\omega=e^{-2i\frac{\pi}{4}}$)

2) Quel est le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour effectuer le calcul de la TFD sans algorithme particulier?

3) Chercher à décomposer le calcul en 2 étapes pour diminuer le nombre d'opérations globales. Par exemple, commencer par grouper les indices pairs et les indices impairs séparément.

6 Echantillonnage et théorème de Shannon

Il s'agit d'appliquer la théorie des séries de Fourier à l'étude de signaux particuliers appelés signaux à bande limitée. Il ne s'agit pas du tout de signaux périodiques mais de signaux reçus au cours du temps.

Définition 6.1. *Un signal à bande limitée est une fonction $f(t)$ de la forme $f(t) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp(2\pi i t\nu)F(\nu)d\nu$. La bande du signal est l'intervalle* $[0,\nu_0]$

Exemple 6.2. L'oreille humaine est capable d'écouter des signaux dans la bande [20 Hz, 20kHz]. Mathématiquement, on traduit cela en disant que le signal reçu (mesurée par la vibration du tympan, ou par celle de la membrane d'un micro) est de la forme $x(t)$ où $x(t) = \int_{20 \leqslant \nu \leqslant 20\quad 000} \exp(2\pi i t\nu)F(\nu)d\nu$.

Exemple 6.3. Si la bande du signal est un créneau $\frac{1}{2\nu_0}1_{|\nu| \leqslant \nu_0}$., autrement dit si on pose $F = \frac{1}{2\nu_0}1_{|\nu| \leqslant \nu_0}$. Alors $f = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp(2\pi i t\nu)\frac{d\nu}{2\nu_0} = \frac{1}{2\nu_0 2i\pi t}(\exp(2\pi i t\nu_0) - \exp(-2\pi i t\nu_0)) = \frac{\sin(2\pi t\nu_0)}{\nu_0\, 2\pi t} =$ $\mathrm{sinc}(2t\nu_0)$

Le problème d'échantillonnage est le suivant. Peut on reconstruire la fonction f grâce à la donnée de ses valeurs à des instants successifs $f(n\tau_0)$, ou τ_0 est une certaine durée (en temps), dont l'inverse est appelle la fréquence d'échantillonnage. On dit qu'on discrétise ou qu'on digitalise le signal.

Dans l'exemple 6.2, il s'agit de transformer la musique entendue (ou captée par un micro) en signal discret pour le transmettre (par exemple l'imprimer sur un CD). Nous allons voir pourquoi on choisi de l'échantillonner aux instant $t_n = t_0 + n \times (44\,\mathrm{kHZ})^{-1}$, avec une fréquence légèrement supérieure à 2×20kHz pour avoir de la musique de qualité. Pour le téléphone, on prend plutôt 10kHz.

Dans la suite nous supposerons que F est sympathique et en particulier que le signal est d'énergie finie, ce qui veut dire, ici que l'intégrale $\int_{-\nu_0}^{\nu_0} |F(\nu)|^2 d\nu$ converge, ou que F est dans $L^2[-\nu_0, \nu_0]$.

Dans notre problème, on suppose qu'on connait les valeurs du signal f aux instants $f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$. Le but est de voir que cela permet de reconstituer ce signal complètement.

La théorie des séries de Fourier nous dit que les fonctions $\frac{1}{\sqrt{2\nu_0}} \exp 2i\pi n\ \frac{\nu}{2\nu_0}$ forment une base hilbertienne de $L^2([-\nu_0, \nu_0])$. Ainsi, la fonction $g_t(\nu) = \exp(2i\pi\nu t)1_{\nu \in [-\nu_0, \nu_0]}$ étant dans cet espace, on a

$$g_t(\nu) = \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(t) \exp 2i\pi n \frac{\nu}{2\nu_0}$$

où le coefficient de Fourier $\alpha_n(t)$ est donné par

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{2\nu_0} \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp(2i\pi t\nu) \exp - 2i\pi n \frac{\nu}{2\nu_0} d\nu = \frac{\sin(\pi(2\nu_0 t - n))}{\pi(2\nu_0 t - n)}$$

Alors $f(t) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp(2\pi i t\nu) F(\nu) d\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n(t)}{\sqrt{2\nu_0}} \exp 2i\pi n \frac{\nu}{2\nu_0} F(\nu)\, d\nu$

si tout se passe bien par exemple si F est dans L^2 , on peut intervertir les deux sommes et on obtient

$$f(t) = \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(t) \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp 2i\pi n \frac{\nu}{2\nu_0} F(\nu) d\nu = \Sigma_n \alpha_n(t) f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$$

On démontre et nous admettrons que :

Théorème 6.4. *Dans l'espace des fonctions à bande limitées de la forme* $f(t) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \exp(2\pi i t\nu) F(\nu) d\nu$, *ou* F *est dans* L^2 *on a* $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi(2\nu_0 t - n))}{\pi(2\nu_0 t - n)} f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$. *Si de plus la série de terme général* $\left| f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \right|$ *est convergente, la convergence est uniforme.*

Remarque 6.5. Cette formule est tellement utilisée que les gens ont inventé la fonction 'sinc' sinus cardinal $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, pour écrire : $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2\nu_0 t - n) f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$.

Proposition 6.6. *La fonction sinc satisfait* $\mathrm{sinc}(0) = 1$, *si* $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ $\mathrm{sinc}(n) = 0$. *De plus* $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\, \mathrm{dt} = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t)\, \mathrm{sinc}(t-n) \mathrm{dt} = 0$

Posons $e_n(t) = \mathrm{sinc}(2\nu_o t - n)$ Ce théorème nous dit que la famille des fonction e_n est une base orthonormée des fonctions à bande limitées dans $[0, \nu_0]$. Si on cherche les coordonnées d'une fonction f dans cette base, on doit écrire

$f(t) = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} a_n\, e_n = \Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n\, \mathrm{sinc}(2\nu_o t - n)$. On a alors , pour $t = \frac{k}{2\nu_0}$, en notant que $e_n(t_k) = \delta_{n,k}$

$a_n = f\left(\frac{k}{2\nu_0}\right)$.

Si la fonction F est nulle en dehors de $[-\nu_0, \nu_0]$, elle est aussi nulle sur l'intervalle $[-\nu_1, \nu_1]$ dès que $\nu_1 > \nu_0$, et on pourrait écrire la même formule avec ν_1. Si ν_0 est le plus petit nombre pour lequel la formule est vraie, on peut déterminer f en connaissant ses valeurs aux instants $f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$, et $2\nu_0$ s'appelle la fréquence d'échantillonnage de f.

Théorème 6.7. *(Shannon) Soit f un signal à bande limité dont le spectre des fréquences et contenu dans* $[0, \nu_0]$*, alors on peut reconstituer f grâce à un échantillonnage au temps* $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \frac{n}{2\nu}$*, dès que* $\nu \geqslant \nu_0$*, grâce à la formule* $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2\nu t - n) f\left(\frac{n}{2\nu}\right)$

Remarque 6.8. La fréquence ν_0 s'appelle la fréquence de Nyqvist. Le théorème dit que pour déterminer un signal à bande limité il suffit d'échantillonner à une fréquence double de la fréquence de Nyqvist.

6.1 Exercices.

Exercice 6.1. Échantillonnage d'une fonction à bande limitée.

Soit f une fonction à bande limitée à l'intervalle $[0, \nu_0]$le théorème de Shannon dit que $f(t)$ est la limite quand n tend vers l'infini de $S_n(t) = \sum_{-n}^{n} \frac{\sin(\pi (2\nu_0 t - n))}{\pi (2\nu_0 t - n)} f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right)$

On considère la fonction $F(\nu) = 1 - |\nu|$ si $|x| \leqslant 1$, $F(\nu) = 0$ si $|\nu| > 1$. Calculer $f(t) = \int_{-\nu_1}^{\nu_1} \exp(2\pi i t \nu) F(\nu) d\nu$

On pose $\nu_0 = 1$. A quelle fréquence ν_1 faut il échantillonner f pour que la formule de Shannon $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi (\nu_1 t - n))}{\pi (\nu_1 t - n)} f\left(\frac{n}{\nu_1}\right)$ soit vérifiée.

Question 1. Ecrire un script en Octave pour tracer deux graphes l'un au dessus de l'autre (subplot(2,1,1), subplot(2,1,2)), dont le premier est la restriction de f) l'intervalle $[-5, 5]$, le second la fonction S_n pour $\nu = 1, 5$, et $n = 30$. Que constate-t on ?

Exercice 6.2. (Démonstration de la formule de Shannon) On a vu que l'ensemble des fonctions périodique de période $2\nu_0$ et de classe L^2 admet une base orthonormée qui est donnée par $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\nu_0}} e^{2i\pi n \frac{t}{2\nu_0}}$. On veut étudier la transformée de Fourier $\mathcal{F}$: $L^2[-\nu_0, \nu_0] \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\mathcal{F}(F)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t x} F(t)\, dt = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{-i2\pi t x} F(t)\, dt = <F, e^{i2\pi t x}>$

1. En utilisant l'inégalité $|e^{i2\pi t x} - e^{i2\pi t y}| \leqslant 2\pi |t| \times |x - y|$ démontrer que $\mathcal{F}(F)$ est continue et même lipshitzienne.

2. «En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, démontrer que l'application $\mathcal{F}: L^2[-\nu_0, \nu_0] \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

3. Quelle est l'image de la base trigonométrique $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\nu_0}} \exp 2i\pi n \frac{\nu}{2\nu_0}$ par $\mathcal{F}$.

4. Exprimer les coefficients de Fourier de F en fonction des valeurs de f.

3 Calculer $\mathcal{F}(e_n)(x)$, et déduire de 2 que si F est L^2, la convergence de la série $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(2\nu t - n) f\left(\frac{n}{2\nu}\right)$ est uniforme.