

Classification des actions hamiltoniennes complètement intégrables de rang deux

THOMAS DELZANT

On montre que grâce à un théorème de F. C. Kirwan, on connaît toutes les variétés symplectiques compactes munies d'une action hamiltonienne complètement intégrable (au sens de Mischenko et Fomenko) d'un groupe compact de rang deux.

I. Introduction

Soit M une variété symplectique compacte, G un groupe de Lie compact agissant dans M de façon hamiltonienne; notons J l'application moment définie de M à valeur dans le dual de l'algèbre de Lie de G . Un théorème fondamental de F. C. Kirwan [K] affirme que l'image de J rencontre une chambre de Weyl suivant un polyèdre convexe.

Dans un autre contexte, Mischenko et Fomenko [M-F] ont introduit la notion de complète intégrabilité généralisée: on dit que l'action du groupe G est complètement intégrable, si d'une part elle est localement libre en au moins un point, et d'autre part, la dimension de la variété est somme de la dimension de G et de son rang. Dans ce cas, on peut montrer que l'image réciproque par le moment d'une orbite de l'action coadjointe est une orbite de l'action de G dans M ; autrement dit, le polyèdre convexe exhibé dans le théorème de Kirwan s'identifie au quotient de la variété par l'action du groupe.

Le problème de la classification de toutes les variétés symplectiques compactes munies d'une action complètement intégrable d'un groupe compact donné semble donc accessible; d'ailleurs, il a été résolu par P. Iglesias [I] dans le cas où le groupe est de rang un, et le cas où G est un tore (complète intégrabilité au sens ordinaire) est expliqué dans [De]. Afin d'énoncer le résultat central de cet article, rappelons la notion de groupe d'isotropie principal: il existe un ouvert dense de la variété tel que le groupe d'isotropie de chacun de ses points soit conjugué à un même groupe; c'est lui qu'on appelle groupe d'isotropie principal. Nous pouvons maintenant énoncer:

Théorème. *Soit G un groupe de Lie compact et connexe de rang deux, M_1 et M_2 deux variétés munies d'une action complètement intégrable de G . Supposons que ces deux variétés aient la même image par l'application moment et que leurs groupes d'isotropie principaux soient identiques, alors il existe un isomorphisme symplectique G -équivariant de l'une sur l'autre.*

Remarques. Le polyèdre convexe du théorème de Kirwan détermine donc exactement la variété dont il est l'image par l'application moment dans l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée.

Comme il est très probable qu'un énoncé voisin du théorème précédent est valable sans faire d'hypothèse sur le rang du groupe, nous essayerons, dans la mesure du possible, de donner des démonstrations où celle-ci n'intervient pas; cependant une grande partie de la preuve consiste à faire le catalogue de tous les voisinages d'orbites isotropes de tous ces groupes (ce qui nécessite la discussion d'un grand nombre de cas) et c'est ce qui explique pourquoi notre résultat ne s'applique qu'au cas des groupes de rang deux.

Remerciements. Je remercie Michèle Audin pour avoir écouté une grande partie de la démonstration, et Athanase Papadopoulos pour m'avoir incité rédiger cet article.

II. Notations

Dans toute la suite on suppose donné un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie est notée $\mathfrak{g}$; on fixe un tore maximal T de ce groupe et on note $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie; on fixe aussi une chambre de Weyl (ouverte) notée C de $\mathfrak{t}$: c'est un cône convexe du dual $\mathfrak{t}^*$ de $\mathfrak{t}$. On identifie $\mathfrak{t}^*$ avec le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ des points fixés par la restriction à T de la représentation coadjointe de G ; l'adhérence de ce cône convexe rencontre alors chaque orbite de l'action coadjointe de G en un point et un seul. Lorsque cela sera nécessaire, nous supposons donné un produit scalaire G -invariant sur $\mathfrak{g}$ que nous identifierons à son dual.

On se donne aussi une variété symplectique M et une action de G dans M . Rappelons ce qu'est l'application moment au sens de J. M. Souriau [S]. C'est une application J , supposée G -équivariante, de M à valeurs dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ telle que, pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, le champ de vecteur X^* qu'il définit sur M (grâce à l'action de G) soit hamiltonien de hamiltonien $X \circ J$ (X est ici considéré comme fonction linéaire sur $\mathfrak{g}^*$): c'est le gradient symplectique de cette fonction.

L'une des propriétés essentielles de l'application moment c'est d'être un morphisme de variété de Poisson c'est-à-dire que J transforme de crochet de Lie (dans $\mathfrak{g}$) en crochet de Poisson (dans M), autrement dit: $[X, Y] \circ J = \{X \circ J, Y \circ J\}$ quels que soient X, Y éléments de $\mathfrak{g}$.

Nous aurons aussi besoin du *moment réduit* (voir [C-D-M]) défini de la façon suivante: comme chaque orbite coadjointe rencontre C en un point et un seul, on peut considérer l'application J' de M à valeurs dans C définie en regardant le point de C où passe l'orbite de l'image par J du point considéré.

L'énoncé du théorème dégage une notion d'isomorphisme: dans toute la suite un *isomorphisme* sera pour nous un difféomorphisme symplectique équivariant et qui conserve le moment.

III. Plan de la preuve

Avant de donner ce plan, expliquons un exemple où le théorème se ramène très facilement au résultat principal de [De], c'est-à-dire au cas abélien: supposons que $J'(M)$ soit inclus

dans l'intérieur C' de C ; comme C' est une sous-variété transverse à toutes les orbites coadjointes et comme J est équivariant, $J^{-1}(C')$ est une sous-variété M' de M ; de plus on montre aisément (lemme 1) que M' est symplectique, évidemment T -invariante et que la restriction de J à M' (qui est à valeurs dans t^*) est le moment de l'action de T dans M' ; ainsi M' est parfaitement déterminée par l'image du moment de M ; mais M n'est autre que le produit fibré $G \times M'/T$, ce qui montre que cette variété est bien déterminée (à isomorphisme près) par son image par l'application moment.

C'est cette idée de "slice" (déjà utilisée par Guillemin, Sternberg [G-S] et Kirwan [K]) que nous allons préciser pour obtenir le cas général.

Commençons par énoncer deux lemmes qui paraphrasent A. Weinstein [W], P. Molino [M], V. Guillemin et S. Sternberg [G-S].

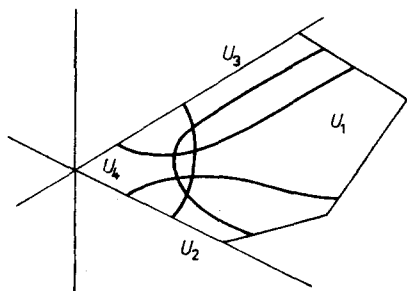
Lemme 1. *Soit M une variété symplectique, P une variété de Poisson et $J: M \rightarrow P$ un morphisme de Poisson. Si S est une sous-variété de P transverse à chacune de ses feuilles symplectiques et qui rencontre chacune de ces feuilles suivant une sous-variété symplectique (sous-variété de Poisson faible au sens de [W]) alors $J^{-1}(S)$ est une sous-variété symplectique de M et la restriction de J à cette sous-variété est un morphisme de Poisson vers S .*

Lemme 2. *Soit a un point de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}_a$ l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de a pour l'action coadjointe et $\mathfrak{m}_a$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{g}_a$ dans $\mathfrak{g}$; on identifie $\mathfrak{g}_a^*$ avec l'orthogonal de $\mathfrak{m}_a$.*

Si K désigne un compact de l'intérieur de la face d'une chambre de Weyl de $\mathfrak{g}$ contenant a alors K admet un voisinage S dans $\mathfrak{g}_a^$ qui vérifie l'hypothèse du lemme 1.*

De plus, si J désigne le moment d'une action de G dans M , sa restriction à $J^{-1}(S)$ est le moment de l'action du groupe d'isotropie G_a de a sous l'action de G . Enfin si l'action de G dans M est supposée complètement intégrable, il en est de même de celle de G_a dans S .

Pour prouver le théorème annoncé, on procède alors ainsi: on commence par découper le polygone $J_1^{-1}(M_1)$ en un certain nombre d'ouverts convexes (entre un et quatre) comme il est indiqué sur le dessin suivant:



L'ouvert U_1 est inclus à l'intérieur de la chambre de Weyl, U_2 et U_3 rencontrent chacun un mur de cette chambre mais pas les deux, et ne se rencontrent pas, U_4 est un voisinage de l'origine. L'argument qui précède montre qu'il existe un isomorphisme de $J_1^{-1}(U_1)$ sur $J_2^{-1}(U_1)$; le groupe d'isotropie sous l'action coadjointe des points situés

à l'intérieur des murs est isomorphe, à revêtement près, à $SU(2) \times S^1$. Ainsi, si l'on montre un analogue du théorème annoncé pour ce groupe, on aura montré, par la même occasion, qu'il existe un isomorphisme de $J_1^{-1}(U'_2)$ sur $J_2^{-1}(U'_2)$, où U'_2 désigne l'orbite de U_2 sous l'action du groupe d'isotropie d'un des points du mur de la chambre; par équivariance, on obtient un isomorphisme de $J_1^{-1}(U''_2)$ sur $J_2^{-1}(U''_2)$, où U''_2 désigne l'orbite de U_2 sous l'action du groupe tout entier; de même pour U_3 .

Il s'agit alors de savoir comment recoller ces isomorphismes. Nous verrons dans le paragraphe consacré à $SU(2) \times S^1$ le lemme suivant:

Lemme 3. *S'il existe un isomorphisme de $J_1^{-1}(U_1)$ sur $J_2^{-1}(U_1)$, il en existe aussi un de $J_1^{-1}(U_1 \cup U_2)$ sur $J_2^{-1}(U_1 \cup U_2)$.*

Enfin, pour conclure, il reste à démontrer une version locale du théorème, au voisinage de l'image réciproque de U_4 et un lemme de prolongement analogue au précédent; nous le vérifierons pour chacune des algèbres de Lie presque simples de rang deux $su(2) \times su(2)$, $su(3)$, $u(2, H)$, $g(2)$. La preuve de cette version locale du théorème n'est pas très élégante: elle consiste à faire le catalogue de toutes les orbites isotropes possibles de ces groupes (dans l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée), et de leur voisinage. Comme nous montrerons (proposition 4) que J' est un quotient de l'action du groupe, pour montrer cette version locale, il suffit de regarder ce catalogue et de constater que si les voisinages (non isomorphes) de deux orbites ont même image du moment, c'est que les groupes d'isotropie principaux correspondants sont distincts.

De plus, le catalogue ainsi établi permet de décider si un polyèdre est "réalisable" par une telle application: une fois le groupe d'isotropie principal F fixé (F est un sous-groupe fini de T), on découpe le polyèdre comme il est indiqué et on regarde séparément si chacun des ouverts U_i l'est; par exemple et compte tenu de [De], pour que U_1 soit réalisable il faut et il suffit que les arêtes issues des sommets portent une $\mathbf{Z}$ -base du réseau dual à $\exp^{-1}(F)$.

IV. Le voisinage d'une orbite

Pour commencer rappelons comment est fabriqué le voisinage d'une orbite de l'action hamiltonienne d'un groupe. Tout ceci est bien connu (voir [W], [Ma], [G-S], [Mo]) et est une version équivariante du théorème de Darboux amélioré par Weinstein [W].

IV.1. Tout d'abord le voisinage d'une orbite lagrangienne n'est autre que le voisinage de la section nulle du fibré cotangent d'un espace homogène T^*G/H ; l'espace cotangent à l'origine de G/H est l'orthogonal h° dans g^* de l'algèbre de Lie h de H . Ainsi, par équivariance, T^*G/H est égal au quotient $G \times h^\circ/H$ où H agit sur h° par la représentation coadjointe et sur G par translation à gauche; le moment de l'action de G sur cette variété s'écrit:

$$J\{g; a\} = \text{Ad}_g^* a$$

(où $\{g; a\}$ désigne la classe modulo H de $(g; a)$).

IV.2. Le voisinage d'une orbite isotrope est à peine plus difficile à décrire; on sait, d'après [W], que le fibré normal d'une sous-variété isotrope est la somme directe de son fibré cotangent et d'un fibré vectoriel symplectique. En tant que voisinage d'une orbite de l'action d'un groupe, ce second fibré est fabriqué de la façon suivante: on regarde la représentation linéaire d'isotropie π de H ; ici c'est une représentation symplectique (donc unitaire de H qui est compact) à valeur dans un espace vectoriel V (hermitien) quotient de l'espace tangent à la variété par l'espace tangent à l'orbite, et on fabrique le produit fibré $G \times V/\pi$. Le voisinage de l'orbite isotrope est donc décrit par la somme de ces deux fibrés et est égal à $G \times (h^\circ \oplus V)/H$; le moment est donné par

$$J\{g; a + v\} = \text{Ad}_g^*(a + {}^t\pi(vv^*)).$$

Pour expliquer ce qu'est ${}^t\pi(vv^*)$ rappelons que V est un espace hermitien; vv^* est donc une application linéaire de V dans V c'est-à-dire un élément de $gl(V)$ que l'on identifie à $gl(V^*)$; π est un homomorphisme d'algèbre de Lie $g \rightarrow gl(V)$ et son transposé est donc une application linéaire de $gl(V) = gl(V^*) = gl(V)^*$ vers g^* .

IV.3. Le cas d'une orbite générale se ramène facilement au cas précédent grâce à l'application moment: soit a l'image par J d'un point p de l'orbite que l'on choisit pour origine; on applique le lemme 2 à a . En conservant les notations de ce lemme, on voit que l'orbite de p sous l'action de G_a est une sous-variété isotrope de $J^{-1}(S)$; on sait donc en décrire un voisinage U d'après ce qui précède; de plus un voisinage de l'orbite est donné par un produit fibré $G \times U/G_a$ et le moment s'obtient encore par équivariance.

IV.4. On peut préciser ces remarques sous l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée que nous supposons désormais toujours vérifiée: une conséquence importante de cette hypothèse est la proposition suivante.

Proposition 4. *Sous l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée, J' est un quotient de l'action du groupe. Autrement dit, l'image réciproque par J de chaque orbite coadjointe est exactement une orbite.*

Preuve de la prop. 3. D'après [K] (et c'est le point fondamental de la démonstration du théorème de convexité), l'image réciproque par J d'une orbite est connexe, ainsi, il suffit de vérifier cette proposition au voisinage d'une orbite. Remarquons au passage que l'hypothèse de dimension la rend évidente au voisinage d'une orbite générique. Un coup d'œil au modèle de voisinage décrit précédemment (IV.4) montre qu'il suffit d'étudier le cas d'une orbite isotrope. On voit facilement (voir [M-F]) que l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée implique qu'une orbite générique est co-isotrope, et grâce à IV.3. on en déduit que la prop. 3 résulte du lemme suivant:

Lemme 5. *Soit G un groupe de Lie agissant linéairement dans un espace hermitien et soit J l'application moment; si G a une orbite co-isotrope, $J^{-1}(0)$ est réduit à 0.*

Preuve. Fixons un point x_0 dont l'orbite est co-isotrope et notons a son image par J . On sait (J. Dadok [Da]) que l'orthogonal (au sens riemannien) à l'espace tangent à l'orbite rencontre chaque orbite; d'autre part il est aisé de le décrire "symplectiquement":

comme l'orbite de x_0 est co-isotrope, l'orthogonal symplectique à son espace tangent n'est autre que l'espace tangent à son orbite sous l'action de G_a . D'une façon symbolique, en notant O cette orbite, on a

$$(T_{x_0}O)^\perp = \{i \cdot \pi(k) x_0, k \in g_a\}.$$

Le point 0 étant une orbite particulière, on en déduit qu'il existe un élément k_0 de g_a tel que

$$\pi(k_0) x_0 = i \cdot x_0.$$

Pour voir que $J^{-1}(0)$ est réduit à 0, il suffit de voir que son intersection avec $(T_{x_0}O)^\perp$ l'est. Considérons un vecteur $v = i \cdot \pi(u) x_0$, avec $u \in g_a$, on a

$$\begin{aligned} J(v) &= \pi'(i \cdot (i \cdot (\pi(u) x_0 x_0^* \pi(u)^* \cdot -i))) \\ &= \pi'(i \cdot \pi(u) x_0 x_0 \pi(u)^*). \end{aligned}$$

Ainsi, si k_0 désigne le vecteur précédemment construit,

$$\begin{aligned} \langle J(v), k_0 \rangle &= \text{tr}(-\pi(k_0 i) \cdot \pi(u) x_0 x_0^* \pi(u)^*) \\ &= -\text{tr}(i \cdot \pi([k_0, u]) x_0 x_0^* \pi(u)^*) + \text{tr}(i \cdot \pi(u) \pi(k_0) x_0 x_0^* \pi(u)^*). \end{aligned}$$

Considérons ceci comme une somme de deux termes, comme $\pi(k_0) x_0 = i \cdot x_0$, le second vaut

$$\text{tr}(\pi(u) x_0 x_0 \pi(u)^*) = \|v\|^2.$$

Montrons que le premier terme X est nul; notons $A = \pi([k_0, u])$, et $B = \pi(u)$; comme X est réel, on a

$$X = 1/2(X + X^*) = 1/2(-\text{tr}(i \cdot A \cdot x_0 x_0^* B^*) - \text{tr}(-i \cdot B x_0 x_0^* A^*)),$$

mais $A^* = -A$, $B^* = -B$, donc

$$X = 1/2(\text{tr}(i \cdot B A x_0 x_0^*) - \text{tr}(i \cdot A B x_0 x_0^*)) = \text{tr}(i \cdot [B, A] x_0 x_0^*).$$

L'équivariance du moment montre que

$$J((\exp t \cdot u) x_0) = J(x_0).$$

En dérivant par rapport à t pour $t = 0$, on obtient

$$\pi'(i \cdot \pi(u) x_0 x_0^*) + \pi'(i \cdot x_0 x_0^* \pi(u)^*) = 0.$$

De plus, pour tout v de g ,

$$\langle \pi'(x), v \rangle = \text{tr}(x \pi(v)^*).$$

Ainsi, pour tout couple u, v on a

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}(i \cdot u x_0 x_0^* v^*) + \text{tr}(i \cdot x_0 x_0^* u^* v^*) \\ &= \text{tr}(i (v^* u + u^* v^*) x_0 x_0^*). \end{aligned}$$

Mais $v^* = -v$ et $u^* = -u$, donc $0 = \text{tr}(i \cdot [u, v] x_0 x_0^*)$. En spécialisant $A = u$, $B = v$ on obtient le résultat souhaité. Ainsi, $\langle J(v), x_0 \rangle = \|v\|^2$, n'est nul que pour $v = 0$ ce qui achève de prouver la prop. 4.

IV.5. Espaces symétriques de rang maximum. Soit G un groupe compact dont l'algèbre de Lie est presque simple, on peut construire canoniquement (voir par exemple [Lo]) un espace symétrique compact dont le groupe des isométries est un quotient fini de G et qui a même rang que G ; il est fabriqué de la façon suivante: on choisit un tore maximal T de G , il existe alors un unique automorphisme μ de G qui induit $-Id$ sur T . Comme μ^2 est l'identité sur T c'est l'identité, et si K désigne l'ensemble des points fixes de μ , l'espace homogène G/K est donc un espace symétrique dont le rang est manifestement celui de T et est donc maximum; nous le noterons L .

Nous allons voir que, quand on munit T^*L de sa structure symplectique canonique, l'action naturelle de G sur cette variété est complètement intégrable. Tout d'abord on décompose de façon traditionnelle (voir [Lo]) l'algèbre de Lie de G : $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \sum \mathfrak{g}_\alpha$ où les $\mathfrak{g}_\alpha$ sont des sous-espaces de dimension 2 de $\mathfrak{g}$, et les α décrivent les racines positives de $\mathfrak{g}$; dans chaque $\mathfrak{g}_\alpha$, μ est une symétrie par rapport à une droite, ainsi la dimension de K est le nombre de racines positives, et L a la "bonne" dimension ($1/2(\dim G + \text{rang } G)$). L'orbite de l'origine de L sous l'action de T est un quotient fini de T que nous noterons T' . La métrique naturelle de L permet aussi d'identifier T^*T' à une sous-variété symplectique T -invariante de T^*L ; et l'on voit facilement, en utilisant IV.1, que l'image de T^*T' par le moment de l'action de G est le même que celui de son action par T , c'est-à-dire $t^*(J$ n'est autre que la projection sur le second facteur de $T^*T' = T' \times t^*)$.

Ainsi nous avons exhibé une sous-variété symplectique de T^*L , qui est T -invariante et dont l'image du moment est t^* .

Soit p un point de cette sous-variété dont l'image du moment est à l'intérieur de la chambre de Weyl. Le groupe d'isotopie de p sous l'action de G est nécessairement inclus dans T , donc est fini puisque T' est un quotient fini de T . Ainsi nous avons montré que l'action de G dans T^*L est complètement intégrable.

Pour préciser comment recoller ces exemples à d'autres variété (comme il est dit au § III), on remarque que la sous-variété t^* (espace cotangent à l'origine de T') rencontre chaque orbite en un nombre fini de points: une orbite de l'action du groupe de Weyl W . Notons B_{g^*} (resp. B_{t^*}) une boule (ouverte) de rayon fixé de g^* (resp. t^*).

Le lemme de prolongement s'énonce ainsi:

Lemme 6. *Tout isomorphisme du complémentaire dans T^*L de $J^{-1}(B_{g^*})$ se prolonge à T^*L .*

Preuve du lemme 6. Notons ϕ le difféomorphisme considéré; comme $J^{-1}(C) = T \times C$, et comme ϕ est supposé conserver le moment, il induit un difféomorphisme du complémentaire dans T^*T' de $J^{-1}(B_{t^*})$ symplectique, T -équivariant et W -équivariant qui conserve le moment. Comme il est T -invariant il est aussi T' -invariant (T' est aussi un tore).

On note (α^i, a_i) les coordonnées (action-angles) de $T^*T' = T' \times t^*$ qui est muni de la forme symplectique $da_i d\alpha^i$. Un tel difféomorphisme s'écrit

$$\phi(\alpha, a) = (\eta(\alpha, a), a)$$

avec

(*) $\eta^i(\alpha, a) = \eta^i(0, a) + \alpha^i$ (à cause de l'équivariance).

Comme ϕ conserve la forme symplectique, on a

(**) $\partial\eta^i/\partial a_j = \partial\eta^j/\partial a_i$.

En tant qu'application du complémentaire de la boule de t^* à valeurs dans T , l'application η se relève à travers l'exponentielle en une fonction f que l'on peut choisir W -invariante (cela est clair si le rang de G n'est pas 2, car le complémentaire de la boule est alors simplement connexe; si le rang de G est 2, il faut se servir de l'invariance sous l'action de W : le quotient du complémentaire de la boule par l'action de W est contractible). L'équation (**) signifie que la forme différentielle $f^i da_i$ est fermée (et évidemment W -invariante); on peut donc en choisir une primitive S (fonction génératrice) W -invariante (là encore, si le rang de G est 2, on se sert du fait que le quotient du complémentaire de la boule par l'action de W est contractible). Comme réciproquement une telle fonction génératrice définit, grâce à la formule (*), un difféomorphisme symplectique de T^*T' W -invariant T' -invariant et qui conserve le moment, pour prolonger ϕ à T^*T' , il suffit de prolonger S en une fonction invariante ce qui est évidemment possible.

Pour prolonger ϕ à tout T^*L de façon à ce que le lemme soit vérifié, on se sert du lemme suivant qui nous sera utile dans un grand nombre de cas.

Lemme 7. *Soit K un sous-groupe de G (pas nécessairement connexe); on identifie le dual k^* de l'algèbre de Lie de K à un sous-espace de $\mathfrak{g}^*$. Si V est une sous-variété symplectique K -invariante dont l'image du moment est incluse dans k^* , et qui rencontre chaque orbite de G suivant une orbite de K , alors tout K -isomorphisme de V se prolonge en un G -isomorphisme de la variété entière.*

Preuve. Il n'y a évidemment qu'une seule manière de prolonger un tel difféomorphisme en un difféomorphisme équivariant; par équivariance celui-ci conserve le moment; il s'agit alors d'observer que le résultat obtenu est symplectique ce qui est une simple vérification.

V. Cas de $SU(2) \times S^1$

V.1. Les parties précédentes nous ont permis de nous ramener à étudier ce qui se passe au bord de la chambre de Weyl de ce groupe; dans ce cas c'est simplement l'axe vertical $x = 0$ de $\mathbf{R}^2$. Comme d'après la prop. 3 J' est un quotient, il suffit d'étudier ce qui se passe au voisinage de l'image réciproque d'un point du mur de cette chambre; ici le tenseur de Poisson d'un point du mur est nul, son image réciproque par J (dont on sait que c'est une orbite) est isotrope. Il nous faut donc étudier le voisinage d'une orbite isotrope de ce groupe (sous l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée).

Afin de pouvoir se servir du lemme 6 nous mettrons en évidence le phénomène suivant:

Lemme 8. *On suppose que $J(M) \cap \partial C$ n'est pas réduit à un point. Si le groupe d'isotropie principal ne rencontre pas le centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de $SU(2)$, alors l'adhérence de l'image réciproque de l'intérieur de la chambre de Weyl est une sous-variété symplectique T -invariante qui*

vérifie les hypothèses du lemme 7 (pour $K = T$); sinon, l'adhérence de l'image réciproque de la réunion de la chambre de Weyl et de son image par la symétrie est une sous-variété symplectique $N(T)$ -invariant qui vérifie les hypothèses du lemme 7 (pour $K = N(T)$).

La dimension du groupe étudié est 4, donc la variété ambiante est de dimension 6, et une orbite isotrope est de dimension au plus 3. Fixons arbitrairement une origine x à cette orbite O , et regardons les divers cas possibles; pour simplifier, nous ferons toujours l'hypothèse suivante: *le groupe d'isotropie principal ne rencontre pas S^1* (composante neutre du centre de G). Sinon, on se ramènerait à ce cas en quotientant par son intersection avec S^1 .

Distinguons les divers cas possibles.

V.2. $\dim O = 0$. Dans ce cas, un voisinage de x est isomorphe à un voisinage de l'origine d'un espace vectoriel hermitien muni d'une action de $SU(2) \times S^1$, et on est ramené à étudier les représentations linéaires de ce groupe dans $\mathbf{C}^3$; il y en a de deux types:

I_n : En notant π_2 la représentation irréductible de dimension 2 de $SU(2)$, elle s'écrit

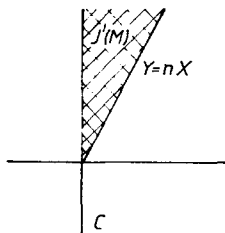
$$\pi(g, \theta)(z_1, z_2, z_3) = (\theta^n \cdot \pi_2(g)(z_1, z_2); \theta^m \cdot z_3).$$

Calculons en le moment

$$J(z_1, z_2, z_3) = ((|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1 \cdot z_2^*); n \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2) + m |z_3|^2).$$

On note S la sous-variété d'équation $z_2 = 0$; c'est une sous-variété symplectique T -invariante qui rencontre chaque G -orbite suivant une T -orbite; c'est d'ailleurs l'adhérence de l'image réciproque par J de la chambre de Weyl. Notons que dans ce cas, le groupe d'isotropie principal est le sous-groupe cyclique d'ordre m , $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ inclu dans la composante neutre S^1 du centre de G . Donc, en vertu de l'hypothèse sur le groupe d'isotropie, $m = 1$.

L'image du moment est dessinée ci-dessous:



Groupe d'isotropie principal trivial

II: En notant π_3 la représentation irréductible de dimension 3 de $SU(2)$, elle s'écrit

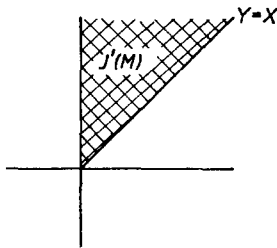
$$\pi(g, \theta)(z_1, z_2, z_3) = \theta^n \cdot \pi_3(g)(z_1, z_2, z_3).$$

Le moment est

$$J(z_1, z_2, z_3) = \text{Im}((z_1, z_2, z_3)^* \cdot (z_1, z_2, z_3); n \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)).$$

Remarquons que la sous-variété d'équation $z_3 = 0$ est une sous-variété symplectique $N(T)$ -invariant qui rencontre chaque G -orbite suivant une $N(T)$ -orbite; c'est d'ailleurs l'adhérence de l'image réciproque par J de la réunion de la chambre de Weyl (ouverte) et de son image par la symétrie qui est ici l'unique élément non nul de W . Ici le groupe d'isotopie principal est le produit du centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de $SU(2)$ et du sous-groupe cyclique d'ordre n de S^1 . Là encore, on a donc $n = 1$.

Le dessin de l'image du moment est le suivant:



Groupe d'isotopie principal $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
(centre de $SU(2)$)

V.3. $\dim O = 1$. Dans ce cas la composante neutre du groupe d'isotopie de x est de dimension 3 donc c'est $SU(2)$; par suite, ce groupe est $SU(2) \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. L'orbite est un cercle S^1 , son fibré normal est trivial un voisinage de celle-ci est de la forme $T^*S^1 \times \mathbf{C}^2$, $SU(2)$ agit sur le second facteur par π_2 , et en écrivant $T^*S^1 = S^1 \times \mathbf{R}$, l'action de S^1 s'écrit $\theta \cdot \{(\alpha; a); z\} = \{\theta^n \cdot \alpha; a; \theta^m z\}$ où m est soit nul, soit un diviseur de n .

Le moment est

$$J\{(\alpha; a); v\} = (|z_1|^2 - |z_2|^2, z_1 \cdot z_2^*, n \cdot a + m \cdot |z|^2).$$

On considère la sous-variété d'équation $z_2 = 0$; c'est une sous-variété symplectique T -invariante qui rencontre chaque G -orbite suivant une T -orbite; c'est d'ailleurs l'adhérence de l'image réciproque par J de la chambre de Weyl (ouverte).

Notons que dans ce cas, le groupe d'isotopie principal est $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ par l'application:

$$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \rightarrow S^1 \times S^1 \subset SU(2) \times S^1,$$

$$\theta \rightarrow (\theta^{n/m}, \theta).$$

L'hypothèse que celui-ci ne rencontre pas S^1 montre que $m = 1$.

V.4. $\dim O = 2$. Dans ce cas, le groupe d'isotopie de x est de dimension 2; or G n'a que deux sous-groupes de dimension 2 (à conjugaison près): ce sont T et son normalisateur $N(T) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rtimes S^1) \times S^1$. Distinguons ces deux cas:

1) $G_x = T$. Dans ce cas, l'orbite est une sphère S^2 ; la représentation linéaire d'isotropie est une représentation $\pi_{n,m}$ de T dans $U(1) = S^1$ qui est donnée par

$$\pi_{n,m}(\alpha, \theta) = \alpha^n \theta^m.$$

Dans cette notation, le fibré normal de l'orbite est somme de son fibré cotangent et du fibré en droites complexes hermitien de classe d'Euler n ; notons le $E(n)$: c'est $SU(2) \times \mathbb{C}/S^1$ où S^1 tore maximal de $SU(2)$ agit sur $\mathbb{C}$ par la représentation de poids n ; pour écrire l'application moment, il faut d'abord considérer la sphère comme étant plongée dans l'espace euclidien standard de dimension 3, qui, muni du produit vectoriel, est l'algèbre de Lie de $SU(2)$ que l'on identifie à son dual; avec ces identifications, T^*S^2 n'est autre que l'ensemble des couples (x, v) vérifiant $\|x\| = 1, x \cdot v = 0$ (ici il est entendu que v est dans $so(3)^*$)

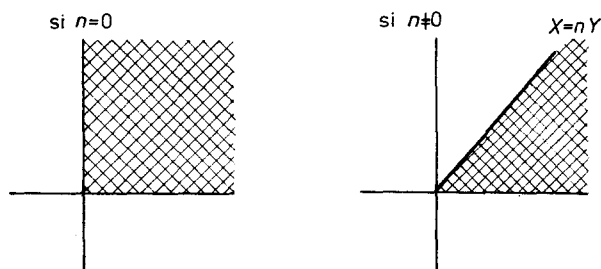
$$J: T^*S^2 + E(n) \rightarrow su(2) \times \mathbb{R},$$

$$J((x, v) + \{g, z\}) = (v + n|z|^2 \cdot x; m|z|^2)$$

(dans l'écriture ci-dessus, $\{g, z\}$ représente un élément de $SU(2) \times \mathbb{C}/S^1$ qui se projette sur x).

Le groupe d'isotropie principal est ici le sous-groupe de T formé des couples (a, b) vérifiant $a^2 = 1, b^m = a$; son intersection avec S^1 est cyclique d'ordre m , ainsi, $m = 1$; il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'image du moment est:



Groupe d'isotropie principal $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 $((a, a) \in SU(2) \times S^1, a^2 = 1)$

Remarquons que dans le cas où n est nul (le fibré normal symplectique de l'orbite est trivial), l'adhérence de l'image réciproque par J de la réunion de la chambre de Weyl (ouverte) et de son image par la symétrie est une sous-variété symplectique T -invariante: en effet c'est $T^*S^1 \times \mathbb{C}$ où T^*S^1 est la sous-variété de T^*S^2 des points de la forme (θ, te_3) où e_3 est le vecteur du pôle nord et θ décrit l'équateur.

Le cas où n n'est pas nul (l'image du moment rencontre le bord de la chambre de Weyl en un seul point) correspond à une situation entièrement différente et sera étudié à la fin du paragraphe consacré à $SU(2) \times S^1$.

2) $G_x = N(T)$. Dans ce cas l'orbite est un espace projectif réel P^2 de dimension 2; pour calculer la représentation linéaire d'isotropie, remarquons qu'il n'y a que deux représentations unitaires de dimension 1 de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rtimes S^1)$; ce sont la représentation triviale t et celle notée s qui se factorise à travers l'homomorphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rtimes S^1$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en la représentation non triviale unitaire de dimension 1 de ce groupe; il y a donc deux familles de représentations de dimension 1 de $N(T)$, étudions les séparément.

a) t_n : Elle est donnée par

$$t_n(\varepsilon; \alpha, \theta) = \theta^n.$$

Dans ce cas, le fibré normal symplectique de l'orbite est trivial; un voisinage de l'orbite est donné par la somme de son fibré cotangent et du fibré trivial. Le groupe d'isotropie principal est ici $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sous groupe du centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times S^1$ de G , de sorte qu'on a $n = 1$.

Ecrivons le moment (on identifie T^*P^2 à l'ensemble des couples (d, x) où d est une droite de $so(3) = \mathbf{R}^3$ et x un vecteur de $so(3)^*$ orthogonal à d)

$$J: T^*P^2 + \mathbf{C} \rightarrow SO(3)^* \times \mathbf{R},$$

$$J((d; x); z) = (x, |z|^2).$$

b) s_n : Ce cas est très semblable au précédent; la représentation est maintenant donnée par

$$t_n(\varepsilon; \alpha, \theta) = \varepsilon \theta^n.$$

Dans ce cas, le fibré normal symplectique de l'orbite est le fibré en droites complexes non trivial noté D sur P^2 ; un voisinage de l'orbite est donnée par la somme du fibré cotangent T^*P^2 de l'espace projectif et de D . Le groupe d'isotropie principal est ici $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, sous-groupe du centre de G , donc $n = 1$.

Ecrivons le moment (on identifie T^*P^2 à l'ensemble des couples (d, x) où d est une droite de $so(3) = \mathbf{R}^3$ et x un vecteur de $so(3)^*$ orthogonal à d)

$$J: T^*P^2 + D \rightarrow SO(3)^* \times \mathbf{R},$$

$$((d; x); z) \rightarrow (x, |z|^2).$$

Remarquons que dans les deux cas a) et b) l'adhérence de l'image réciproque par J de la réunion de la chambre de Weyl (ouverte) et de son image par la symétrie est encore une sous-variété symplectique $N(T)$ -invariante.

V.5. Dim $O = 3$. Dans ce cas l'orbite est lagrangienne; le groupe d'isotropie G_x est de dimension 1: sa composante neutre est donc un cercle. On peut le décrire comme étant l'image de S^1 par l'application

$$S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \subset SU(2) \times S^1,$$

$$\theta \rightarrow (\theta^n, \theta^m)$$

(où n et m sont supposés premiers entre eux) en au moins un point, n n'est pas nul. Il y a encore à discuter deux cas: soit m est nul (auquel cas $n = 1$) soit m est non nul.

a) m est non nul. Dans ce cas le normalisateur du groupe précédemment décrit est exactement le tore maximal T ; ainsi, il existe un groupe abélien fini F , et G_x est l'image de $S^1 \times F$ par l'homomorphisme injectif:

$$\begin{aligned} S^1 \times F &\rightarrow S^1 \times S^1 \subset SU(2) \times S^1, \\ (\theta, \xi) &\rightarrow (\phi(\xi) \theta^n, \varphi(\xi) \cdot \theta^m). \end{aligned}$$

Par hypothèse, celui-ci ne rencontre pas S^1 , de sorte que, comme il est injectif, on a $(\phi(\xi) \theta^n = 1 \Rightarrow \varphi(\xi) \cdot \theta^m = 1 \Rightarrow \xi = \theta = 1)$. Cela implique que $n = 1$ et F est réduit à l'élément neutre.

Ainsi le groupe d'isotropie est l'image de S^1 par l'application

$$\begin{aligned} S^1 &\rightarrow S^1 \times S^1 \subset SU(2) \times S^1, \\ \theta &\rightarrow (\theta, \theta^m). \end{aligned}$$

On voit alors que l'orbite n'est autre que l'espace lenticulaire L_m , que l'on identifie au quotient de $SU(2)$ par l'action (à droite) du sous-groupe cyclique d'ordre n de son tore maximal. Son fibré cotangent est trivial, grâce à l'action à gauche de $SU(2)$; l'action de $SU(2) \times S^1$ s'écrit

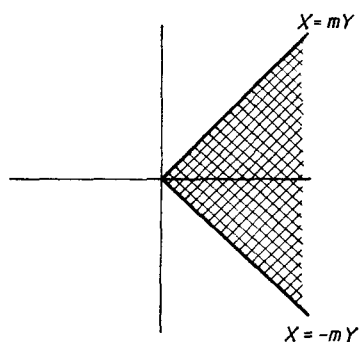
$$(g, \theta)(a; x) = (g \cdot a \cdot \theta^{1/m}, \text{Ad}_g^* x)$$

(a désigne la classe dans L_m d'un élément de $SU(2)$ et le symbole $\theta^{1/m}$, n'a de sens que parce que nous sommes dans l'espace lenticulaire).

Dans ces coordonnées, le moment est

$$J(a; x) = (x; 1/m \cdot (\text{Ad}_a^{-1} x)_3).$$

Le 3 en indice signifie que l'on prend la troisième coordonnée (par convention celle qui correspond à l'axe de rotation des θ dans la représentation coadjointe).



Groupe d'isotropie principal trivial ou $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
 $(\theta \mid \theta^2 = \theta^m = 1)$

Ici la situation est assez nouvelle: l'adhérence de l'image réciproque de la réunion des deux chambres de Weyl est une sous-variété V naturellement difféomorphe à $L_m \times \mathbf{R}$,

T-invariante, mais celle-ci n'est plus symplectique: elle admet $L_m \times 0$ comme sous-variété isotrope (c'est le lieu le long duquel la restriction de la forme symplectique est de rang 2); pour décrire V on explicite son plongement:

$$\begin{aligned} L_m \times \mathbf{R} &\rightarrow L_m \times su(2)^*, \\ (a; t) &\rightarrow (a, t \cdot e_3). \end{aligned}$$

Cette variété jouera dans la suite un rôle analogue à celui du slice symplectique mis en évidence dans les autres cas; elle peut d'ailleurs servir à montrer que dans ce cas précis il n'existe pas de sous-variété symplectique *T*-invariante qui rencontre chaque *G*-orbite suivant une *T*-orbite.

b) m est nul. Dans ce cas, la composante neutre du groupe G_x est le tore maximal S^1 de $SU(2)$; son normalisateur est $N(S^1) \times S^1$, et G_x est donc de la forme $S^1 \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ou $N(S^1) \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; dans le premier cas le groupe d'isotropie principal est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et dans le second $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, de sorte que l'on a $n = 1$ en vertu de l'hypothèse faite sur G_x . Dans le premier cas l'orbite est $S^1 \times S^2$ dans le second $S^1 \times P^2$; l'action de $SU(2) \times S^1$ se scinde en un produit de l'action de $SU(2)$ sur T^*S^2 (resp. T^*P^2) et de S^1 sur T^*S^1 ; écrivons les moments:

$$\begin{aligned} J: T^*S^2 \times T^*S^1 &\rightarrow su(2)^* \times \mathbf{R}, \\ ((x, v); (a, \alpha)) &\rightarrow (v, a) \end{aligned}$$

(où v est un vecteur orthogonal à x et x décrit la sphère unité de $su(2)$), (resp):

$$\begin{aligned} J: T^*P^2 \times T^*S^1 &\rightarrow su(2)^* \times \mathbf{R}, \\ ((d, v); (a, \alpha)) &\rightarrow (v, a) \end{aligned}$$

(où v est un vecteur orthogonal à x , et x décrit l'ensemble des droites de $su(2)$).

Dans les deux cas le moment a pour image la chambre de Weyl entière.

Remarquons que dans chacun de ces cas l'adhérence de l'image réciproque de la réunion des deux chambres de Weyl est une sous-variété V symplectique $N(T)$ -invariante.

V.6. Conclusion. Pour prouver le théorème annoncé dans le cas de $SU(2) \times S^1$, on procède ainsi, considérons deux variétés M_1 et M_2 munies d'une action de ce groupe, ayant même image par le moment et même groupe d'isotropie principal. Distinguons les trois cas suivants: $J(M_i)$ rencontre le bord de la chambre de Weyl suivant un segment d'intérieur non-vide, un point, ou ne le rencontre pas. Le dernier cas a déjà été traité dans la partie III, regardons successivement les deux autres.

a) $J(M)$ rencontre le bord de la chambre de Weyl suivant un segment d'intérieur non-vide: Il nous faut là encore distinguer deux cas: Le groupe d'isotropie principal ne contient pas le centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de $SU(2)$ (resp. il ne le contient pas).

Dans ce cas le lemme 8 montre que l'adhérence de l'image réciproque par J de l'intérieur de la chambre de Weyl (resp. et de son image par la symétrie) est une sous-variété symplectique *T*-invariante (resp. $N(T)$ invariante) S_μ , et dont l'image du moment par T est le polyèdre $J'(M)$ (resp. la réunion de $J'(M)$ et de son image par la symétrie). Ce

“slice” symplectique rencontre chaque G -orbite suivant une T -orbite (resp. une $N(T)$ -orbite). D’après [De], il existe donc un difféomorphisme symplectique T -équivariant de S_1 sur S_2 ; bien que cela ne soit pas explicite dans [De] il est facile de voir que dans le second cas on peut le choisir $N(T)$ -équivariant. Pour montrer que ce difféomorphisme se prolonge de façon G -équivariante à toute la variété, il suffit alors de constater que les groupes d’isotropie (sous l’action de G) des points correspondants sont égaux. Pour ce faire, il suffit de comparer tous les modèles locaux du moment et vérifier que deux modèles distincts ayant même image du moment correspondent à deux groupes d’isotropie principaux distincts, ce qui est une version locale du théorème annoncé. Il est facile de voir qu’un difféomorphisme g -équivariant dont la restriction à S_i est symplectique est en fait lui-même symplectique, ce qu’il fallait démontrer.

b) $J(M)$ rencontre le bord de la chambre de Weyl en un seul point: Soit B la trace dans la chambre de Weyl d’une boule de rayon arbitrairement petit; comme J' est un quotient $J'^{-1}(B)$ est un voisinage (équivariant) de l’orbite constitué par l’image réciproque de ce point (et cela dans les deux variétés considérées). Tout d’abord, il suffit de regarder les modèles locaux précédemment décrits pour constater que les deux variétés $J_i^{-1}(B)$ sont les mêmes: dans ces modèles, il n’y a que deux (familles de) cas où $J(M)$ rencontre le bord de la chambre de Weyl en un seul point, et à chaque fois le groupe d’isotropie principal est différent. Pour conclure, grâce au § III, il nous reste donc à regarder de plus près ces deux modèles locaux et à montrer dans chacun de ces cas un lemme analogue au lemme 6 du § IV.

Regardons tout d’abord le cas de l’orbite lagrangienne de dimension 3 qui est un espace lenticulaire L_m ; notons B une boule de rayon arbitraire, voisinage de l’origine ($J(L_m)$) de la chambre de Weyl, et B' son orbite sous l’action coadjointe; alors le lemme de prolongement s’énonce ainsi:

Lemme. *Tout difféomorphisme du complémentaire dans T^*L de $J^{-1}(B)$ symplectique, G -équivariant et qui conserve le moment se prolonge à T^*L en un difféomorphisme vérifiant la même propriété.*

Preuve du lemme. Nous avons mis en évidence une sous-variété $V = L_m \times \mathbf{R}$, qui rencontre chaque G -orbite suivant une $N(T)$ -orbite sauf $L_m \times 0$ qui est elle-même $J^{-1}(0)$; dans le cas particulier où $m = 1$, c’est-à-dire où l’espace lenticulaire est la sphère unité de $\mathbf{C}^3$, considérons l’application d’éclatement orienté:

$$\pi: S^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^2,$$

$$(x; t) \rightarrow t \cdot x.$$

L’application π est T -équivariante pour l’action de T dans $\mathbf{C}^2$ définie par

$$(\theta, \phi)(z, w) = (\theta \cdot \phi^{-1}z; \theta \cdot \phi \cdot w),$$

dont le moment est

$$K(z; w) = (|z|^2 + |w|^2; |z|^2 - |w|^2).$$

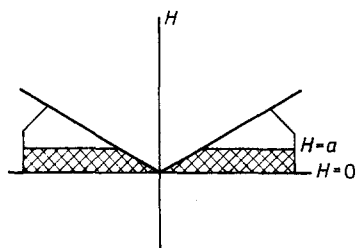
De plus on voit que $K \circ \pi$ n'est autre que J , et que π transforme la forme symplectique de $\mathbf{C}^2$ en la 2-forme (symplectique en dehors de la section nulle) de V .

Notre difféomorphisme symplectique, noté ψ , laisse la variété V invariante puisse qu'il conserve le moment; de plus il vérifie:

$$\psi(x, t) = \psi(-t; -x)$$

puisse qu'il est G -équivariant; ainsi il passe au quotient à travers l'éclatement π en un difféomorphisme ψ' symplectique T -équivariant et qui conserve le moment du complémentaire d'une boule ouverte de $\mathbf{C}^2$. Appliquant un résultat de [De], on en déduit que ψ' se prolonge en un difféomorphisme de la boule unité de $\mathbf{C}^2$ qui vérifie les mêmes propriétés; on peut même supposer, à la lecture de [De] que ψ' est égal à l'identité au voisinage de 0. Il suffit alors d'éclater ψ' pour obtenir un difféomorphisme de V vérifiant les propriétés souhaitées: il est $N(T)$ -équivariant conserve la forme "presque" symplectique et le moment; de plus sa restriction à la section nulle est l'identité; on voit alors que le difféomorphisme de tout T^*L obtenu à partir de celui-ci par G -équivariance vérifie les propriétés souhaitées; le cas de l'espace lenticulaire général peut s'en déduire par revêtement fini.

Il reste à regarder le cas (étudié en V.4) où l'orbite est une sphère S^2 à fibré normal symplectique non trivial. Dans ce cas, l'action de G n'admet pas de slice, ce qui va nous obliger à raisonner différemment. Notons H la "deuxième" composante du moment (celle qui correspond à l'action de S^1). Nous savons depuis Frankel [Fr] que cette fonction est une fonction non-dégénérée au sens de Bott; supposons pour fixer les idées que $m = 1$; on a alors le dessin suivant:



On peut supposer que le minimum de H est atteint pour $H = 0$; la variété symplectique $H = 0$ est d'ailleurs $S^2 \times S^2$ comme il résulte du modèle local exhibé en V.4 et de l'étude de P. Iglesias [I]. Son fibré normal symplectique est bien déterminé par les deux nombres entiers qui représentent les pentes du polyèdre au voisinages des extrémités de l'arête $H = 0$. Pour démontrer le théorème dans ce cas précis nous pouvons procéder de la façon suivante:

Soient M_1 et M_2 deux variétés symplectiques munies d'une action de $SU(2) \times S^1$ et dont l'image du moment est le polyèdre dessiné au dessus; on note H_1 et H_2 les deux hamiltoniens correspondants. Un raisonnement analogue à celui effectué au § III montre qu'il existe, pour a suffisamment petit, un isomorphisme de $H_1^{-1}(x \geq a)$ sur $H_2^{-1}(x \geq a)$;

ce qui précède montre qu'il en existe aussi un de $H_1^{-1}(x \leq a)$ sur $H_2^{-1}(x \leq a)$, et il s'agit de savoir comment les recoller. Pour cela on raisonne comme dans le premier paragraphe de [De]: la variété $H^{-1}(a)$ est le fibré en cercles de rayon a du fibré normal (en droites) de $H^{-1}(0)$ pour prolonger un difféomorphisme S^1 -équivariant de cette variété à tout le fibré en boules, il suffit de le faire par homogénéité. Pour avoir la conclusion "symplectique" il suffit de recopier [De].

Pour pouvoir exploiter cette étude dans le cadre plus général de l'action d'un groupe compact de rang 2, nous devons montrer, comme il est annoncé au § III, le lemme 3. Celui-ci résulte évidemment des lemmes 2, 7, et de l'étude précédente.

VI. Cas des groupes presque simples

VI.1. Comme il est expliqué au § III, nous étudions ici le voisinage de $J^{-1}(0)$ pour les groupes suivants: $SU(3)$; $SU(2) \times SU(2)$; $U(2, H)$; $G(2)$. On sait que $J^{-1}(0)$ est une orbite, manifestement isotrope. Dans chacun de ces cas nous montrons d'une part qu'un voisinage de celle-ci est bien déterminé par l'image du moment et la donnée du groupe d'isotropie principal, et d'autre part un analogue du lemme 5, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule façon de recoller ce voisinage au reste de la variété. Evidemment on peut se limiter aux cas des groupes connexes et simplement connexes. Nous noterons O une orbite isotrope, x un point arbitrairement choisi comme origine de O , G_x son groupe d'isotropie.

Nous nous servons à plusieurs reprises des dessins des systèmes de racines de dimension 2 et du critère suivant (voir [Di], chap. XXI, p. 76, par exemple):

Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de G , on note S le système de racines correspondant et on considère un système de racines S' qui est une partie de S . Pour qu'il existe un sous-groupe fermé de G contenant T et dont le système de racine soit S' , il faut et il suffit qu'il existe une base B' de S' telle que toute combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de B' qui est dans S soit aussi dans S' .

VI.2. *Cas de $SU(2) \times SU(2)$.* Ce groupe est de dimension 6, la variété ambiante est donc de dimension 8, et une orbite isotrope est de dimension au plus 4. Remarquons que cette orbite ne peut être de dimension 1, cela nécessiterait que G_x soit de dimension 5, et il n'y a pas de groupe compact de rang au plus 2 et de dimension 5. Distinguons les divers cas possibles.

VI.2.1. $\dim O = 4$. Dans ce cas la dimension du groupe d'isotropie est 2, donc la composante neutre de G_x est le tore maximal $T = S^1 \times S^1$ de $SU(2) \times SU(2)$. Ainsi, G_x est l'un des quatre groupes $S^1 \times S^1$; $N(S^1) \times S^1$; $S^1 \times N(S^1)$; $N(S^1) \times N(S^1)$, où $N(S^1)$ désigne le normalisateur de S^1 dans $SU(2)$. On voit que l'orbite est l'espace symétrique de rang maximum correspondant (grâce au troisième paragraphe) à $SU(2) \times SU(2)$, $SO(3) \times SU(2)$, $SU(2) \times SO(3)$, $SO(3) \times SO(3)$ respectivement. Les groupes d'isotropies principaux respectifs sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dans ces quatre cas l'image du moment remplit donc la chambre de Weyl.

VI.2.2. $\dim O = 3$. Dans ce cas, la composante neutre de G_x est isomorphe à $SU(2)$; comme $\dim O = 3$, le fibré normal symplectique de l'orbite est un fibré en droites complexes, la représentation linéaire d'isotropie est alors une représentation linéaire de dimension 1 de $SU(2)$ nécessairement triviale, ce qui contredit le fait que l'action de G doit être localement libre en au moins un point. Ce cas est donc à exclure.

VI.2.3. $\dim O = 2$. Dans ce cas, le groupe G_x est de dimension 4, sa composante neutre est donc isomorphe à $SU(2) \times S^1$; il y a deux (à conjugaison près) sous-groupes de G isomorphes à ce groupe: ils sont échangés par l'automorphisme (extérieur) de G qui consiste à échanger les deux facteurs, et on peut se contenter d'en regarder un; son normalisateur est $SU(2) \times N(S^1)$, donc G_x est soit $SU(2) \times S^1$ soit $SU(2) \times N(S^1)$. Distinguons ces deux cas.

a) $G_x = SU(2) \times S^1$. L'orbite est alors une sphère, le fibré normal symplectique de celle-ci est un fibré complexe de dimension 2 et la représentation linéaire d'isotropie est une représentation complexe de dimension 2 de G_x ; celle-ci est non triviale en restriction à $SU(2)$, et elle est donc de la forme π_n où l'on définit:

$$\pi_n(g, \theta) = \theta^n \pi_2(g).$$

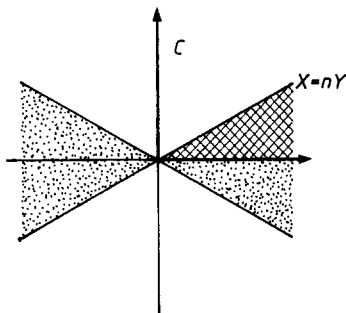
En tant que fibré vectoriel complexe, le fibré normal symplectique de l'orbite n'est autre que le produit tensoriel du fibré trivial (de rang 2) et du fibré en droites de classe d'Euler n . Notons-le $F(n)$; il est isomorphe à la copie de deux exemplaires du fibré en droites $E(n)$ de classe d'Euler n .

Avec ces notations, le moment s'écrit

$$J: T^*S^2 + E(n) + E(n) \rightarrow su(2)^* \times su(2)^*,$$

$$J((x, v), w_1, w_2) = (v + n(|w_1|^2 + |w_2|^2)x; (|w_1|^2 - |w_2|^2); w_1 \cdot w_2^*).$$

D'où l'image du moment:



Pour démontrer le lemme de prolongement, on remarque que la sous-variété $T^*S^2 + E(n)$ de $T^*S^2 + F(n)$ est une sous-variété symplectique $SU(2) \times S^1$ -invariante qui a même image du moment que la variété initiale par l'action de ce groupe. On peut donc s'en servir comme "slice", et le lemme de prolongement résulte alors du lemme 7.

b) $G_x = SU(2) \times N(S^1)$. L'orbite est alors un plan projectif réel, le fibré normal symplectique de celui-ci est un fibré complexe de dimension 2 et la représentation linéaire d'isotropie est une représentation complexe de dimension 2 de G_x ; celle-ci est non triviale en restriction à $SU(2)$, et elle est donc de l'une des deux formes suivantes:

$$a) \pi(g, \theta, \varepsilon) = \pi_2(g),$$

$$b) \pi(g, \theta, \varepsilon) = \varepsilon \pi_2(g).$$

Dans le premier cas, le fibré normal symplectique de l'orbite est trivial; on écrit donc facilement le moment

$$J: T^*P^2 \times \mathbf{C} \rightarrow su(2)^* \times su(2)^*,$$

$$((x, v), w) \rightarrow (v; F(w)),$$

où F est définie par

$$F(w) = w \cdot w^* - 1/2|w|^2 Id$$

(ceci est un élément de $su(2)$ que l'on identifie à son dual).

Le groupe d'isotropie principal est ici le sous-groupe cyclique d'ordre 4 du tore maximal du premier facteur. L'image du moment remplit toute la chambre de Weyl. Considérons T^*S^1 comme étant la sous-variété de T^*P^2 formée des couple (d, x) où d est une droite horizontale et x un vecteur vertical. On remarque que la sous-variété $T^*S^1 \times \mathbf{C}$ de $T^*P^2 \times \mathbf{C}$ est une sous-variété symplectique $N(S^1) \times S^1$ -invariante qui rencontre chaque G -orbite suivant une $N(S^1) \times S^1$ -orbite; grâce au lemme 7 on en déduit que tout isomorphisme du complémentaire de l'image réciproque d'un voisinage de l'origine, se prolonge naturellement en un isomorphisme de toute la variété.

Dans le cas b), le fibré normal symplectique est le complexifié du fibré tangent de P^2 ; bien que celui-ci ne soit pas trivial, l'application F définie comme précédemment conserve un sens dans ce fibré. Le moment a la même expression que précédemment; la seule différence qui existe entre ce cas et le précédent est le groupe d'isotropie principal: celui-ci est le groupe cyclique d'ordre 4 (inclu dans le produit du tore maximal du premier facteur et du centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ du second) défini par l'homomorphisme

$$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \rightarrow S^1 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},$$

$$\alpha \rightarrow (\alpha; \alpha^2).$$

C'est d'ailleurs ce qui permet de différencier ces deux cas.

VI.2.4. $\dim O = 0$. Dans ce cas le groupe G_x est confondu avec G . La représentation linéaire d'isotropie est donc une représentation unitaire de dimension 4 de ce groupe, et celle-ci est supposée localement libre en au moins un point. Il est aisé de voir qu'il n'y en a qu'une satisfaisant à ce critère, c'est celle qui correspond à l'inclusion naturelle de $SU(2) \times SU(2)$ dans $SU(4)$. Le voisinage de notre orbite (qui est réduite à un point) est donc isomorphe à un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ muni de l'action (produit) évidente des $SU(2) \times SU(2)$. Calculons son moment; il s'écrit

$$J(v; w) = (F(v), F(w)).$$

Ainsi l'image du moment réduit est toute la chambre de Weyl. D'autre part le groupe d'isotropie principal est trivial. Remarquons aussi que la sous-variété $(\mathbf{C} \times 0) \times (\mathbf{C} \times 0)$ de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ est une sous-variété symplectique T -invariante qui rencontre chaque G -orbite suivant une T -orbite; le lemme 7 montre alors que tout isomorphisme du complémentaire de l'image réciproque d'un voisinage de l'origine, se prolonge naturellement en un isomorphisme de toute la variété.

VI.2.5. Conclusion. Pour conclure, il suffit donc de comparer les modèles locaux précédemment décrit et de remarquer que si deux de ces modèles ont même image du moment, c'est qu'il correspondent à des groupes d'isotropie distincts ce qui est une simple constatation.

VI.3. Cas de $SU(3)$

VI.3.1. Comme ce groupe est de dimension 8 et de rang 2, la dimension de la variété ambiante est 10, une orbite isotrope est de dimension au plus 5, et le groupe d'isotropie G_x d'un point de cette orbite est de dimension au moins 3. Il n'y a pas de groupe compact de rang inférieur ou égal à 2 et de dimension 5 ou 7; la seule algèbre de Lie "compacte" de rang 2 et de dimension 6 est $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ qui n'est pas une sous-algèbre de $\mathfrak{su}(3)$, donc le groupe d'isotropie ne peut être de dimension 6. Ecartons aussi le cas où celui-ci serait de dimension 8: ce serait $SU(3)$ entier, mais $SU(3)$ n'admet pas de représentation unitaire dans $\mathbf{C}^5$ libre en au moins un point, ce qui contredit l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée. Il nous reste à examiner le cas où G_x est de dimension 3 ou 4.

VI.3.2. $\dim G_x = 3$. La composante neutre du groupe d'isotropie est donc un groupe compact de rang inférieur à 2 et de dimension 3: c'est donc soit $SU(2)$ soit $SO(3)$, et il nous faut encore distinguer ces deux cas.

a) $G_x^0 = SO(3)$. Il n'y a qu'une façon, à conjugaison près, de considérer $SO(3)$ comme sous-groupe de $SU(3)$: c'est de dire qu'une matrice orthogonale est aussi unitaire. On voit facilement que le normalisateur de $SO(3)$ dans $SU(3)$ est le produit de $SO(3)$ par le centre $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ de $SU(3)$; ainsi, dans ce cas, G_x est soit $SO(3)$ soit $SO(3) \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; dans le premier cas l'orbite, lagrangienne, est l'espace symétrique de rang maximum correspondant à $SU(3)$ c'est-à-dire $SU(3)/SO(3)$; dans le second c'est celui qui correspond à $PSU(3)$; l'image du moment a été calculée en IV.5; on vérifie que le groupe d'isotropie principal est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (correspondant à une réflexion de $SO(3)$) dans le premier cas, et que c'est $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ (qui est son extension par le centre de $SU(3)$) dans le second.

b) $G_x^0 = SU(2)$. De même, il n'y a qu'une façon, à conjugaison près, de considérer $SU(2)$ comme sous-groupe de $SU(3)$: c'est de le sous-groupe des matrices de la forme

$$(*) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

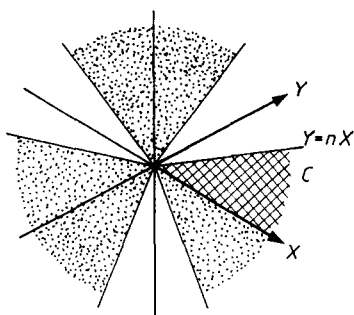
avec A décrivant $SU(2)$. Le normalisateur de ce groupe est le groupe $U(2)$ des matrices de la forme

$$(**) \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \det B^{-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que G_x est de la forme $SU(2) \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sous-groupe des matrices de la forme (**) avec $\det B$ appartenant au sous-groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ du cercle. L'orbite, lagrangienne, est l'espace lenticulaire $S^5/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$; le groupe d'isotropie principal est $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; calculons le moment. Pour ce faire, on peut soit effectuer un calcul direct soit mettre directement en évidence un slice symplectique, ce qui montrera en même temps le lemme de prolongement: considérons le sous-groupe $SU(3)$ de G constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \det B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

C'est aussi le groupe d'isotropie, sous l'action coadjointe, d'un point d'un mur de la chambre de Weyl; notons que l'espace lenticulaire (de dimension 3) L_n est l'orbite sous l'action de ce groupe du point que nous avons choisi pour origine. La métrique riemannienne G -invariante permet de considérer T^*L_n comme sous-variété symplectique $U(2)$ -invariante de $T^*S^5/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, et par un raisonnement proche de celui de la fin du § III on voit que l'image du moment de T^*L_n qui est incluse, dans $\mathfrak{u}(2)^*$ est l'intersection de l'image du moment de toute la variété avec ce sous-espace linéaire. Le lemme de prolongement résulte immédiatement du lemme 7 et de la partie consacrée à $SU(2) \times S^1$. L'image du moment est dessinée ci-dessous:



VI.3.3. $\dim G_x = 4$. La composante neutre du groupe d'isotropie est donc un groupe compact de rang inférieur à 2 et de dimension 4; à revêtement fini près, il s'agit donc de $SU(2) \times S^1$; mais un coup d'œil au système de racines de $\mathfrak{su}(3)$ montre qu'il n'y a qu'une seule façon (à conjugaison près) d'envoyer ce groupe presque injectivement dans $SU(3)$; l'image s'identifie au sous-groupe (isomorphe à $\mathfrak{u}(2)$) des matrices de la forme (**). Comme $U(2)$ est son propre normalisateur dans $SU(3)$ le groupe G_x est réduit à $U(2)$.

L'orbite est ici un espace projectif complexe $P^2(\mathbf{C})$; dans cette notation, le fibré normal de l'orbite est somme de son fibré cotangent et du fibré en droites complexes hermitien de classe d'Euler n ; notons le $E(n)$: c'est $SU(3) \times \mathbf{C}/U(2)$ où $U(2)$ agit sur $\mathbf{C}$ par la représentation $\det^n$. Le groupe d'isotropie principal est le sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

des matrices diagonales de la forme

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^{-1} \end{pmatrix}$$

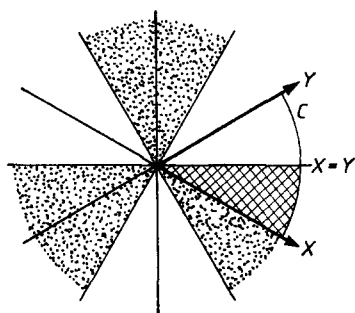
avec φ décrivant les racines n -ièmes de l'unité. Pour écrire le moment, rappelons d'abord que l'on peut considérer $P^2(\mathbf{C})$ comme orbite de l'action coadjointe de $SU(3)$; par exemple en disant que, muni de sa forme symplectique naturelle, c'est un espace homogène symplectique de $SU(3)$; son image par l'application moment est donc un difféomorphisme sur une orbite coadjointe: cette orbite est celle du premier point d'un mur de notre chambre de Weyl qui appartient au réseau des entiers. On identifie $T^*P^2(\mathbf{C})$ avec la sous-variété de $su(3)^* \times su(3)^*$ des points de la forme (d, x) où d est dans $P^2(\mathbf{C})$ et x est perpendiculaire à d ; on calcule alors le moment:

$$J: T^*P^2(\mathbf{C}) + E(n) \rightarrow su(3)^*,$$

$$((d, x); z) \rightarrow x + n |z|^2 d$$

(il est entendu que z est un vecteur dans la fibre de $E(n)$ au dessus de d).

D'où le dessin de l'image du moment:



Notons que la sous-variété $T^*P^1(\mathbf{C}) + E(n) (= T^*S^2 + E(n))$ est une sous-variété symplectique $U(2)$ -invariante qui rencontre chaque orbite de l'action de $SU(3)$ suivant une $U(2)$ -orbite. On peut donc s'en servir comme "slice"; un raisonnement rigoureusement identique à celui fait précédemment montre que le lemme de prolongement résulte alors de l'étude de l'action de $SU(2) \times S^1$ (revêtement à deux feuillets de $U(2)$) sur cette variété.

VI.3.4. Conclusion. Là encore la conclusion résulte de la comparaison des modèles locaux étudiés et de la vérification du fait que si deux de ces modèles ont même image du moment, c'est qu'il correspondent à des groupes d'isotropie distincts.

VI.4. Cas de $U(2, \mathbf{H})$

VI.4.1. Rappelons que $U(2, \mathbf{H})$, groupe des isométries de l'espace quaternionique de dimension deux est aussi le groupe Spin (5) revêtement à deux feuillets de $SO(5)$. Comme ce groupe est de dimension 10 et de rang 2, la dimension de M est 12, une orbite isotrope est de dimension au plus 6, et le groupe d'isotropie G_x d'un point de cette orbite est de dimension au moins 4. Il n'y a pas d'algèbre de Lie compacte de rang au plus 2 et de dimension 5, 7 ou 9; ainsi la dimension de ce groupe est 4, 6, 8 ou 10.

Ecartons aussi la dimension 8: en effet la seule algèbre de Lie de dimension 8 et de rang inférieur ou égal à 2 est $su(3)$, et en regardant simultanément les deux systèmes de racines, on voit que $u(2, \mathbf{H})$ ne contient pas de sous-algèbre isomorphe à $su(3)$.

Ecartons aussi le cas ou celui-ci serait de dimension 10: dans ce cas ce serait $U(2, \mathbf{H})$ entier, mais ce groupe n'admet pas de représentation unitaire dans $\mathbf{C}^6$ libre en au moins un point, ce qui contredit l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée.

Reste donc à examiner les dimensions 4 et 6; les orbites correspondantes sont de dimension 6 et 4.

VI.4.2. Dim $O = 4$. Dans ce cas, l'algèbre de Lie de la composante neutre du groupe d'isotropie (de dimension 6) est isomorphe à $su(2) + su(2)$, et il n'y a qu'une façon d'envoyer cette algèbre de Lie dans $u(2, \mathbf{H})$, c'est celle qui correspond à l'inclusion naturelle de $U(1, \mathbf{H}) \times U(1, \mathbf{H}) (= SU(2) \times SU(2))$ dans $U(2, \mathbf{H})$. Le normalisateur de ce groupe est son produit semi-direct avec le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La représentation linéaire d'isotropie est ici une représentation de G_x dans $\mathbf{C}^2$ qui est non triviale en restriction à $SU(2) \times SU(2)$ en vertu de l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée. Une telle représentation est nécessairement triviale sur l'un des deux facteurs et égale à π_2 sur l'autre. En particulier le groupe d'isotropie ne peut être le normalisateur de $SU(2) \times SU(2)$, et celui-ci est donc connexe.

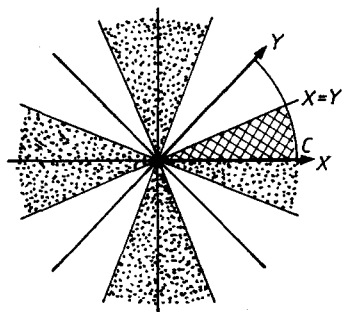
L'orbite est donc l'espace projectif de dimension 1 sur $\mathbf{H}$ (c'est-à-dire la sphère S^4), son fibré normal symplectique est le fibré en droite canonique K sur $P^1(\mathbf{H})$. Le groupe d'isotropie principal est le centre (isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) de celui des deux $SU(2)$ pour lequel la représentation linéaire d'isotropie est triviale. Pour calculer l'image du moment, nous allons, là encore, construire un slice $U(2)$ invariant.

On considère $U(2)$ comme le sous-groupe de $U(2, \mathbf{H})$ formé des matrices complexes: c'est aussi le groupe d'isotropie sous l'action coadjointe de $i \cdot Id$. L'intersection de ce groupe avec $SU(2) \times SU(2)$ est clairement le tore maximal de G . L'orbite de l'origine sous son action est la droite $P^1(\mathbf{C})$, ou, si l'on préfère, la sphère S^2 . La restriction de la représentation linéaire d'isotropie au tore maximal est somme de la représentation triviale sur l'un des facteurs et de la représentation de S^1 dans $\mathbf{C}^2$ donnée par la formule:

$$\theta \rightarrow \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la restriction S^2 du fibré en droite canonique sur $P^1(\mathbf{H})$ est somme du fibré en droite (complexes) canonique et de son opposé, chacun étant stable par l'action de $U(2)$. En identifiant, grâce à l'unique métrique $U(2, \mathbf{H})$ -invariante T^*S^2 à une sous-variété

symplectique $U(2)$ de $T^*P^1(\mathbf{H})$, on peut considérer $T^*S^2 + E(1)$ comme sous-variété symplectique $U(2)$ invariante de $T^*P^1 + K$; de plus il est facile de se convaincre que celle-ci rencontre chaque orbite sous l'action de $U(2, \mathbf{H})$, et que son image du moment (par l'action de $U(2, \mathbf{H})$) n'est autre que son image du moment par l'action de $U(2)$, si l'on identifie $u(2)^*$ à un sous-espace linéaire de $u(2, \mathbf{H})^*$ grâce au produit scalaire invariant. Le lemme de prolongement résulte alors immédiatement du lemme 7 et du paragraphe consacré à $SU(2) \times S^1$. L'image du moment est dessinée ci-dessous:



VI.4.3. $\dim \mathcal{O} = 6$. Dans ce cas, l'algèbre de Lie de la composante neutre du groupe d'isotropie, de dimension 4, est isomorphe à $su(2) + \mathbf{R}$. Il y a deux façon distinctes (non conjuguées) d'envoyer cette algèbre dans $u(2, \mathbf{H})$; les deux groupes correspondant sont les groupes d'isotropie sous l'action coadjointe des deux murs de la chambre de Weyl; les orbites correspondantes sont donc des orbites coadjointes. Décrivons les avec plus de précision; le premier correspond à l'inclusion de $U(2)$ dans $U(2, \mathbf{H})$ décrite au paragraphe précédent; le second à l'inclusion naturelle de $U(1, \mathbf{H}) \times S^1$ dans $U(1, \mathbf{H}) \times U(1, \mathbf{H})$ qui est lui même inclu dans $U(2, \mathbf{H})$.

Discutons ces deux cas:

a) Cas de $U(2)$. Le normalisateur de $U(2)$ dans $U(2, \mathbf{H})$ est son extension par la matrice $j \cdot Id$; ainsi soit G_x est $U(2)$ soit $U(2)$ est d'indice 2 dans ce groupe.

Dans le premier cas, l'orbite lagrangienne est l'espace symétrique de rang maximum $U(2, \mathbf{H})/U(2)$, le groupe d'isotropie principal est le centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de $U(2, \mathbf{H})$.

Dans le second, et compte tenu du fait que l'automorphisme de $U(2)$ induit par la conjugaison par $j \cdot Id$ n'est autre que la conjugaison (complexe), on voit que l'orbite n'est autre que l'espace symétrique de rang maximum $SO(5, \mathbf{R})/SO(3, \mathbf{R}) \times SO(2, \mathbf{R})$; le groupe d'isotropie principal est ici le sous-groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ du tore maximal de $U(2, \mathbf{H})$.

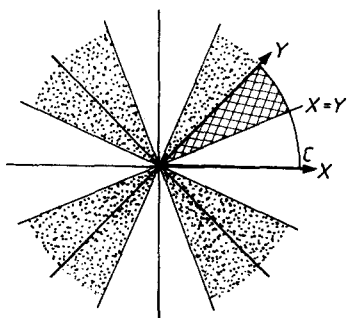
Dans ces deux cas, les images du moment ont été calculées au § III: elles remplissent la chambre de Weyl.

b) Cas de $U(1, \mathbf{H}) \times S^1$. Son normalisateur est $U(1, \mathbf{H}) \times N(S^1)$ où $N(S^1)$ est le normalisateur du cercle dans $SU(2)$. Ainsi l'orbite est soit $P^3(\mathbf{C})$, soit son quotient par l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui consiste à multiplier une droite complexe à droite par le quaternion j . Considérons le sous-groupe K (isomorphe à $U(2)$) des éléments de G qui commutent à j ; son intersection avec G_x est (dans les deux cas possibles) le sous-groupe des matrices

de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'orbite de l'origine sous l'action de notre nouveau groupe n'est autre que l'espace projectif réel de dimension 3. On vérifie que le plongement de son cotangent dans $T^*P^3(\mathbf{C})$ qui est défini grâce à la métrique invariante en fait un slice pour notre action; ainsi le lemme 7 du § IV permet de montrer le lemme de prolongement. Dans les deux cas, l'image du moment est la même, mais les groupes d'isotropie principaux sont distincts: dans le premier, c'est le centre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de G ; dans le second, c'est le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}$ ou θ décrit $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Dessinons l'image du moment:



VI.4.4. Conclusion. En comparant les cinq modèles possibles, on vérifie la conclusion du théorème annoncé pour $U(2, \mathbf{H})$.

VI.5. Cas de $G(2)$. Comme ce groupe est de dimension 14 et de rang 2, la dimension de M est 16, une orbite isotrope est de dimension au plus 8, et le groupe d'isotropie G_x d'un point de cette orbite est de dimension au moins 6. Il n'y a pas d'algèbre de Lie compacte de rang au plus 2 et de dimension 7, 9, 11; ainsi la dimension de ce groupe est 6, 8, 10 ou 14. Écartons la dimension et 10: en effet l'algèbre de Lie de G_x serait $su(3)$ ou $u(2, \mathbf{H})$, mais en regardant les systèmes de racines de ces algèbres, on voit qu'aucune n'est incluse dans $g(2)$.

Écartons aussi la dimension 8: dans ce cas le groupe d'isotropie $SU(3)$ qui n'admet pas de représentation unitaire non triviale dans $\mathbf{C}^2$.

Écartons aussi le cas où celui-ci serait de dimension 14: dans ce cas ce serait $G(2)$ entier, mais ce groupe n'admet pas de représentation unitaire dans $\mathbf{C}^8$ libre en au moins un point, ce qui contredit l'hypothèse de complète intégrabilité généralisée.

Ainsi, la seule possibilité est la dimension 6; l'algèbre de Lie de G_x est $su(2) + su(2)$, et il n'y a qu'une seule (à conjugaison près) sous-algèbre de $g(2)$ isomorphe à $su(2) + su(2)$. La composante neutre du groupe correspondant est isomorphe à $SU(2) \times SU(2)$, qu'il vaut d'ailleurs mieux écrire $U(1, \mathbf{H}) \times U(1, \mathbf{H})$; grâce au lemme suivant on voit que G_x est connexe, ainsi l'orbite n'est autre que l'espace symétrique de rang maximal de G_2 , et on est ramené à l'étude de IV.5.

Lemme. *Dans $G(2)$, $SU(2) \times SU(2)$ est son propre normalisateur.*

En effet, si un élément g de G_2 normalise ce groupe, quitte à le multiplier par un élément de $SU(2) \times SU(2)$, on peut supposer qu'il normalise T . Dans la représentation coadjointe, il agit sur t^* comme un élément du groupe de Weyl, mais les deux racines perpendiculaires de G_2 qui correspondent aux deux facteurs n'ont pas la même longueur, donc g est obligé de les fixer (il pourrait les changer en leurs opposées mais on se ramènerait à ce cas en le multipliant par l'élément de $SU(2) \times SU(2)$ qui a le même effet). Ainsi Ad_g^* fixe deux racines non opposées, donc toutes les racines, Ad_g^* est l'identité et donc g est central, mais le centre de G_2 est trivial, ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

- [C-D-M] CONDEVAUX, M., DAZORD, P., MOLINO, P.: Géometrie du moment. Preprint Lyon 1988.
- [Da] DADOK, J.: Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 125–137.
- [Di] DIEUDONNÉ, J.: Elements d'Analyse, t.V. Paris: Gauthier-Villard 1975.
- [De] DELZANT, T.: Hamiltoniens périodiques et image convexe du moment; à paraître au Bulletin de la S.M.F. (1988).
- [F] FRANKEL, T.: Fixed points and torsion on Kaehler manifolds. Ann. of Math. **70** (1959), 1–8.
- [G-S] GUILLEMIN, V., STERNBERG, S.: Symplectic Technics in Physics. Cambridge University Press 1985.
- [I] IGLESIAS, P.: Classification des $SO(3)$ -variétés symplectiques de dimension 4; preprint C.P.T (Luminy) 84/PE 1673 (1984).
- [K] KIRWAN, F. C.: Cohomology of quotient in symplectic and algebraic geometry. Princeton University Press Math. Notes **31** (1984).
- [L] LOOS, O.: Symmetric spaces (2 vol.). New York: Benjamin 1969.
- [MA] MARLE, C. M.: Normal forms generalizing action angle coordinates for hamiltonian action of Lie groups. Lett. in Math. Phys. **7** (1983), 55–62.
- [M-F] MISHENKO, A., FOMENKO, A.: Generalised Liouville method of integration of hamiltonian systems. Funct. Anal. and its Appl. **12** (1982), 113–121.
- [Mo] MOLINO, P.: Structure transverse aux orbites de la représentation coadjointe: le cas des orbites réductives. Sémin. Géom. Diff. (1983–1984), Montpellier.
- [W] WEINSTEIN, A.: The local structure of Poisson manifolds. J. of Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.
- [W] WEINSTEIN, A.: Neighborhood classification of isotropic embedding. J. of Diff. Geom. **16** (1981), 125–128.
- [W] WEINSTEIN, A.: Lecture on symplectic manifolds. CBMS Reg Conf. Series, A.M.S. Providence 1977.

THOMAS DELZANT
 Université Louis Pasteur
 Département de Mathématiques
 7 rue René Descartes
 F-67084 Strasbourg Cedex

(Received December 20, 1988)