C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 381-384, 1997
Théorie des groupes/*Group Theory*

Sur l'anneau d'un groupe hyperbolique

Thomas DELZANT

Irma, Université Louis-Pasteur, 7, rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg CEDEX.
E-mail : delzant@math.u-strasbg.fr
Tél. 03-88-41-64-39; Fax 03-88-61-90-69.

Résumé. Les propriétés remarquables de la fonction distance dans un espace hyperbolique permettent de montrer la propriété de factorisation unique pour certains groupes hyperboliques, et partout l'intégrité de leur anneau.

Group rings of hyperbolic groups

Abstract. *Using remarkable properties of the length fonction in hyperbolic spaces, one proves the unique factorization property for certain hyperbolic groups. In particular these groups have no zero divisors in their group rings.*

I. Introduction

En 1956, I. Kaplansky (*voir* [1]) proposa la question : « *Si G est un groupe sans torsion, et R un anneau intègre, l'anneau $R[G]$ peut-t-il avoir des diviseurs de zéro ?* »

De même (*voir* [1], [2], [3]), se pose le problème de montrer que les seuls éléments inversibles de $R[G]$ sont les éléments inversibles *triviaux*, c'est-à-dire de la forme εg, où ε est un élément inversible de R. Dans cette Note, nous étudions le cas d'un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov.

Soit H un espace métrique géodésique, δ-hyperbolique au sens de M. Gromov (*voir* [4], [5], [6]), et soit G un groupe d'isométries de H. Nous noterons e l'élément neutre de G, et $|x - y|$ la distance de deux points x et y de H.

La norme d'un élément g de G, notée $[g]$ est définie comme dans [4]

$$[g] = \inf_{p \in H}(|gp - p|)$$

et le rayon d'injectivité de l'action de G sur H est :

$$\rho = \inf_{g \in G, g \neq e}([g])$$

Soit R un anneau (non nécessairement commutatif) intègre ; on note $R[G]$ l'anneau de groupe correspondant. Si R est unitaire, on note R^* l'ensemble de ses éléments inversibles (sinon on convient que cet ensemble est vide).

Note présentée par Étienne GHYS.

Théorème. – *Si le rayon d'injectivité est supérieur à 4δ, l'anneau $R[G]$ est intègre et ses seuls éléments inversibles sont les éléments de la forme $\varepsilon g, g \in G, \varepsilon \in R^*$. La même conclusion vaut pour tout produit croisé $R * G$ de R et G.*

Remarques. – Il est intéressant de noter que la borne sur le rayon d'injectivité ne dépend que de la constante d'hyperbolicité δ. Par exemple, considérant la famille des groupes d'isométries des espaces CAT(-1) au sens de Gromov (*voir* [4]), on obtient une borne indépendante de l'espace considéré : en particulier il existe une constante universelle κ (on peut prendre $\kappa = 4\log 3$) telle que si le rayon d'injectivité (au sens usuel) d'une variété riemanienne compacte à courbure inférieure à -1 est plus grand que κ, alors son groupe fondamental satisfait la « conjecture de Kaplansky ». Malheureusement, l'hypothèse sur le rayon d'injectivité est restrictive ; elle ne permet pas de traiter le cas des groupes hyperboliques généraux. On peut démontrer que sous cette hypothèse tout sous-groupe à deux générateurs de G est libre (*voir* [7]).

II. Propriété de factorisation unique

Comme souvent (*voir* [2], [3]), la démonstration de ce résultat se fait en montrant la *propriété de factorisation unique* pour les éléments de G.

Définition. – (*voir* [2], [3]) Le groupe G satisfait *la propriété de factorisation unique* (resp. *unique forte*) si, étant donnés deux sous-ensembles A et B de G non réduits à un élément, et si $C = A.B$ désigne le sous-ensemble de G formé des produits ab d'un élément de A par un élément de B, alors il existe un élément de C (resp. un élément différent de e, élément neutre de G) qui s'écrit de façon unique comme produit d'un élément de A et d'un élément de B.

Proposition. – (voir [2], [3]) *Si G satisfait la propriété de factorisation unique (resp. unique forte), $R * G$ est intègre (resp. n'a pas d'éléments inversibles non triviaux).*

Démonstration. – Si $a^* = \Sigma_{a\in A}\alpha_a.a$ et $b^* = \Sigma_{b\in B}\beta_b b$ sont deux éléments de $R * G$ avec α_a et β_b différents de 0, et si c désigne un « facteur unique » (différent de e) dans le produit $A.B$, le terme en c du produit de a^* et b^* est non nul.

Notons que E. Rips et Y. Segev (*voir* [8]) ont construit un groupe sans torsion ne satisfaisant pas cette propriété.

Proposition. – *Si G est un groupe d'isométries d'un espace δ-hyperbolique H dont le rayon d'injectivité est supérieur à 4δ, alors G satisfait la propriété de factorisation unique forte.*

La démonstration de ce résultat est basée sur l'étude du comportement de la fonction longueur. Nous montrerons le lemme suivant au prochain paragraphe :

Lemme. – *Soient g et h deux isométries de H, et supposons que $[h] > 4\delta$; alors pour tout point p de H, on a au moins l'une des deux inégalités $|ghp - p| > |gp - p|$, $|gh^{-1}p - p| > |gp - p|$.*

Montrons comment ce lemme entraîne la propriété de factorisation unique. On conserve les notations utilisées dans la définition de cette propriété. Soit $g \in C$ un élément qui s'écrit de deux façons différentes comme produit d'un élément de A et B : $g = ab = a'b'$. Posons $h = b'^{-1}b$, de sorte que $gh = a'b$ et $gh^{-1} = ab'$ sont deux éléments de C. Le lemme précédent dit que l'un au moins de ces deux éléments déplace p plus que g. En particulier un élément c de C tel que la quantité $|cp - p|$ est *maximale* s'écrit d'au plus une façon comme produit d'un élément de A par un élément de B. Si cet élément était e, l'ensemble C serait réduit à un seul élément, ainsi donc que A et B.

III. Démonstration du lemme

Rappelons (*voir* [4], [5], [6]), que le produit de Gromov est défini par :

$$< x, y >_z = \frac{1}{2}(|x - z| + |y - z| - |x - y|).$$

La *définition* de la δ-hyperbolicité est :

$$\text{(HYP)} \qquad \forall x, y, z, t \qquad < x, y >_z \geq \min(< x, t >_z, < t, y >_z) - \delta.$$

Nous utiliserons aussi l'interprétation suivante du produit de Gromov :

(HYP)$'$ Deux géodésiques $[x, y]$ $[x, z]$ issues d'un même point x et parcourues à vitesse constante égale à un restent 2δ-proches jusqu'au temps $< y, z >_x$.

Pour démontrer le lemme, nous allons raisonner par l'absurde. Soient donc deux isométries g et h, et p un point de H tels que :

$$[h] > 4\delta; \qquad |ghp - p| \leq |gp - p|; \qquad |gh^{-1}p - p| \leq |gp - p|.$$

Par définition du produit de Gromov, et tenant compte du fait que celui ci est invariant par isométrie,

$$\text{(1)} \qquad |ghp - p| \leq |gp - p| \quad \Longrightarrow \quad < g^{-1}p, hp >_p \geq \frac{1}{2}|hp - p|.$$

De même,

$$\text{(2)} \qquad |gh^{-1}p - p| \leq |gp - p| \quad \Longrightarrow \quad < g^{-1}p, h^{-1}p >_p \geq \frac{1}{2}|h^{-1}p - p| = \frac{1}{2}|hp - p|.$$

Ainsi, (1), (2) et la définition (HYP) de l'hyperbolicité montrent que, sous les hypothèses du lemme, on a :

$$\text{(3)} \qquad < h^{-1}p, hp >_p \geq \frac{1}{2}|hp - p| - \delta.$$

Soit alors q le milieu d'un segment $\sigma = [p, h^{-1}p]$, de sorte que hq est le milieu du segment $h.\sigma = [p, hp]$. Comme la distance de p à $h^{-1}p$ (resp. hp) est supérieure à 4δ, on peut considérer le point q' (resp. q'') de $[p, q]$ (resp. $[p, hq]$) situé à une distance δ de q (resp. hq). L'inégalité (3) dit que le produit de Gromov de $h^{-1}p$ et hp au point p est supérieur à la distance $|p - q'| = |p - q''|$. Ainsi, (HYP)$'$ dit que la distance de q' à q'' est inférieure à 2δ. L'inégalité triangulaire montre alors :

$$(4)|hq - q| \leq 4\delta,$$

ce qui signifie $[h] \leq 4\delta$. C'est une contradiction.

Remerciements. Je remercie Z. Sela qui a attiré mon attention sur le problème de la factorisation unique, et m'a signalé l'article [8] ; d'ailleurs, dans un courrier à l'auteur, Z. Sela signale que E. Rips connaît une démonstration de la propriété de factorisation unique pour certains groupes à petite simplification.

Note remise le 15 octobre 1996, acceptée le 23 décembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Kaplansky I., 1970**. Problems in the theory of Rings. *NAS NRC publ.* 502 Washington 1957 (MR 20 3179) et *Amer. Math. Monthly*, 77, 445-454.

[2] **Karpilovsky G., 1989**. *Unit groups of group rings*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math 47, Longmann Scientific and technical.

[3] **Passman D. S., 1977**. *The algebraic structure of group rings*, J. Wiley and Sons.

[4] **Gromov M., 1987**. Hyperbolic groups, in Essays in Group theory, S.M. Gersten ed., *MSRI pub. n°* 8, Springer.

[5] **Coornaert M., Delzant T. et Papadopoulos A., 1990**. Géométrie et théorie des groupes, Les groupes hyperboliques de M. Gromov. *Lecture note in Math.* 1441, Springer.

[6] **Ghys E. et de la Harpe P., 1990**. *Les groupes hyperboliques, d'après M. Gromov*. Prog. Math n83 Birkhauser.

[7] **Delzant T., 1990**. Sous-groupes à deux générateurs des groupes hyperboliques, in *Group theory from a geometrical view point*, E. Ghys, A. Haefliger et A. Verjosvsky Ed. Trieste World Scientific.

[8] **Rips E. et Segev Y., 1987**. Torsion free group without unique product property, *J. Algebra*, 108, n° 1, 116-126.