

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS ET QUOTIENTS DES GROUPES HYPERBOLIQUES

THOMAS DELZANT

0. Introduction. Le but de cet article est d'étudier les sous-groupes distingués et les quotients des groupes hyperboliques au sens de Gromov, en élargissant le cadre usuel de la théorie de la petite simplification [LS].

Au paragraphe 5 de [Gr], M. Gromov esquisse déjà une telle étude, mais les méthodes qui y sont employées semblent difficile à comprendre en toute généralité (voir à ce sujet l'introduction de [GH]). En particulier le théorème 5.3.E de [Gr] sur les sous-groupes normaux est inexact, comme le montre un contre-exemple présenté en appendice; ce même contre-exemple répond d'ailleurs par la négative à une question de M. Gromov (5.3D dans [Gr]). Nous proposons de remplacer l'énoncé 5.3.E de [Gr] par le théorème suivant, où l'on note $[[f]]$ la norme stable d'un élément (voir le paragraphe 3).

THÉORÈME I. *Soit G un groupe δ -hyperbolique non élémentaire. Il existe un entier N tel que, pour toute famille d'éléments $f_1, \dots, f_n$ tels que $[[f_i]] = [[f_j]] \geq 1000\delta$, le sous-groupe normal $\langle\langle f_i^N \rangle\rangle$ engendré par les puissances N -ièmes de ces éléments soit libre; de plus, pour tout entier k , le quotient $G/\langle\langle f_i^{kN} \rangle\rangle$ est hyperbolique.*

La démonstration que nous exposons de ce résultat repose sur l'étude des conditions de petite simplification dans les groupes hyperboliques; là encore, il convient de préciser que M. Gromov indique dans [Gr] comment aborder ce problème. Cependant aucune définition précise de ces conditions n'apparaît dans [Gr], sauf dans le cas des groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure négative. On développe au second paragraphe une version adaptée aux groupes hyperboliques de cette théorie; après avoir défini la condition de petite simplification $C'(l)$ en terme de produit scalaire, on démontre:

THÉORÈME II. *Soit $\mathcal{R}$ une famille d'éléments satisfaisant la condition de petite simplification $C'(l)$. Le sous-groupe normal $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ engendré par $\mathcal{R}$ est libre. Le groupe quotient $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ est hyperbolique.*

La démonstration de ce théorème repose sur celle du lemme 2.4, très analogue au lemme de Greendlinger, fondement de la théorie ordinaire de la petite simplification [LS]; pour en déduire le premier théorème, il s'agit alors de montrer qu'il existe un entier N tel que, pour toute famille d'éléments f_1, f_2, f_n de même norme stable $[[f_i]] = [[f_j]] > 1000\delta$, la famille des f_i^N satisfait une condition de

Reçu le 3 mai 1991.

petite simplification, ce que l'on fait au troisième paragraphe, consacré à la construction d'exemples de familles de relations satisfaisant cette condition.

Après que cet article fût écrit, plusieurs auteurs développèrent des théories de la petite simplification dans les groupes hyperboliques, en particulier dans le but de donner un sens rigoureux à la notion de *groupe générique* et de construire des groupes infini de torsion. Il nous faut citer les travaux de A. Y. Olshanski [O] et C. Champetier [C]. Notre approche est assez différentes des leurs et présente cette particularité d'offrir une présentation unifiée de la théorie classique de la petite simplification dans le groupe libre ou dans un produit libre (telle qu'on la trouve exposée dans [LS]) et la théorie hyperbolique, tout en introduisant un cadre naturel à la notion, encore fort peu utilisée, de groupe hyperbolique relativement à un sous-groupe ou une famille de sous-groupes.

Remerciements. Je remercie B. Bowdich, C. Champetier, M. Coornaert, E. Ghys, I. Martinez, A. Papadopoulos, H. Short pour d'intéressantes discussions sur les groupes hyperboliques; et le Max-Planck Institut für Mathematik, où j'ai rédigé cet article. Le professeur A. Y. Olshanski, qui a obtenu des résultats similaires aux nôtres, a mis le doigt sur plusieurs inexactitudes dans le dernier paragraphe de ce texte, et sa correspondance m'a beaucoup aidé à les corriger.

1. Espaces métriques et groupes hyperboliques. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la notion de groupe hyperbolique, puis on établit quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Plusieurs (pas tous) sont connus et dûs à M. Gromov [Gr]. Pour plus de détails sur le lemme d'approximation par les arbres, on renvoie le lecteur à [GH], [CDP], [B]. L'originalité de ce paragraphe réside surtout dans l'interprétation du lemme d'approximation par les arbres en termes de théorie des groupes (prop. 1.3.2).

1.1. Produit scalaire. Tous les espaces métriques considérés ici sont supposés géodésiques: la distance entre deux points d'un tel espace, notée $|x - y|$, est la longueur du plus court chemin les joignant. Ce chemin n'est pas nécessairement unique, mais il existe et est appelé géodésique.

M. Gromov [Gr] définit le produit scalaire de x et y relativement à z par la formule: $\langle x, y \rangle_z = (1/2)(|x - z| + |y - z| - |x - y|)$ puis définit un espace δ -hyperbolique comme étant un espace où:

$$\forall x, y, z, t \quad \langle x, y \rangle_z \geq \min(\langle x, t \rangle_z, \langle t, y \rangle_z) - \delta$$

de façon équivalente:

$$\forall x, y, z, t \quad |x - y| + |z - t| \leq \max(|x - z| + |y - t|, |x - y| + |z - t|) + 2\delta.$$

1.2. Groupes hyperboliques. Soit G un groupe finiment engendré par des éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$. On muni le graphe de Cayley de G (relativement à ce système de générateurs) de l'unique métrique invariante à gauche par l'action de

G qui donne la longueur 1 à chaque arête. La restriction de cette distance à G est la métrique du mot. Pour tout élément g de G , on note $|g|$ la distance de g à l'élément neutre e ; c'est le plus petit entier n tel que g soit produit d'au plus n générateurs; on a:

$$|g - h| = |g \cdot h^{-1}|.$$

Quand on ne précise pas, la notation $\langle g, h \rangle$ désigne le produit scalaire de g et h relativement à e qui est un point-base naturel pour G .

Soit $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ un élément de G exprimé comme produit de n autres; on dit que cette écriture est *géodésique* (resp. à C près) si

$$|g| = |g_1| + |g_2| + \cdots + |g_n|$$

$$\text{resp. } |g| \geq |g_1| + |g_2| + \cdots + |g_n| - C.$$

On dit enfin que le groupe G est δ -hyperbolique si son graphe de Cayley l'est. Cette définition dépend du choix d'un système de générateurs, mais on montre que, si on ne précise pas la constante δ , elle n'en dépend plus.

Dans toute la suite on fixe un groupe hyperbolique G . On a l'interprétation suivante du produit scalaire:

LEMME 1.2.1. *Soient g et h deux éléments de G ; leur produit scalaire est entier ou demi entier. Si $g = ab$ est une écriture géodésique de g telle que $|a| = E(\langle g, h \rangle)$, et si c est défini par:*

$$ac = h$$

alors l'écriture $h = ac$ est géodésique à 2δ près.

Démonstration. On a immédiatement $\langle a, g \rangle = |a|$; par définition de l'hyperbolicité, on a aussi l'inégalité $\langle a, h \rangle \geq \min(\langle h, g \rangle, \langle a, g \rangle) - \delta = |a| - \delta$. En développant, il vient: $|h| \geq |a| + |c| - 2\delta$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

1.3. Lemme d'approximation par les arbres et applications. Le théorème suivant, dû à M. Gromov, et dont on trouve une démonstration dans les ouvrages précédemment cités, est très utile:

THÉORÈME 1.3.1. *Soit X un espace métrique δ -hyperbolique, $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n + 1$ points de X , et Y la réunion de n segments géodésiques joignant x_0 à chaque x_i . Il existe un arbre métrique T muni d'un point base y_0 et de sommets privilégiés $y_1, \dots, y_n$ et une application*

$$f: Y \mapsto T$$

telle que:

- (i) la restriction de f à chaque segment $[x_0, x_i]$ est une isométrie sur son image $[y_0, y_i]$;
- (ii) pour tous x et y de Y , on a l'inégalité:

$$|x - y| - 2\delta \log_2(n) \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

On peut évidemment supposer que les extrémités de l'arbre T sont un sous-ensemble de celui des y_i . Nous considérerons cependant les autres y_i comme des extrémités de T (pour cela on rajoute en ces points une arête de longueur infiniment petite); il se peut aussi que pour deux indices distincts i et j les points correspondants soient confondus, mais là encore nous distinguerons ces sommets en ajoutant une arête de longueur infiniment petite. Les autres sommets de T sont au nombre de $n - 1$. Orientons l'arbre T de façon naturelle à partir de y_0 ; il admet $2n - 1$ arêtes (par convention, on ajoute aussi une arête fictive entre deux points y_i et y_j égaux dans T) notées $a_1, \dots, a_{2n-1}$. Pour chaque arête a , on note a^{-1} l'arête munie de l'orientation opposée. La géodésique de T joignant deux points y_i et y_j est ainsi constituée d'au plus n arêtes consécutives; on la note $[y_i, y_j] = a_{i_1}^{e_1} \cup \dots \cup a_{i_k}^{e_k}$. Une fois ces conventions adoptées, on peut interpréter le lemme d'approximation par les arbres dans les groupes hyperboliques.

PROPOSITION 1.3.2. Soient $e = g_0, g_1, \dots, g_n$, n éléments de G . Soit T l'arbre d'approximation de cet ensemble, et $A = \{a_1, \dots, a_{2n-1}\}$ l'ensemble de ses arêtes. Il existe des éléments $a_1, \dots, a_{2n-1}$ de G vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) $||a_i| - |a_j|| \leq 2 + 2\delta \log_2(n)$;
- (ii) Si la géodésique de T qui joint $f(g_i)$ à $f(g_j)$ est $a_{i_1}^{e_1} \cup \dots \cup a_{i_k}^{e_k}$, alors $g_i^{-1}g_j = a_{i_1}^{e_1} \dots a_{i_k}^{e_k}$, et cette écriture est géodésique à $n(2 + 2\delta \log_2 n)$ près;
- (iii) on peut de plus supposer que l'écriture de g_1 sous cette forme est géodésique.

Démonstration. Soit T l'arbre d'approximation de $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ et f l'application correspondante. Pour chaque sommet s de T , on regarde l'ensemble des g_i tels que le segment $[y_0, f(g_i)]$ passe par s ; pour chaque g ainsi défini, on regarde le point $x(s, g)$ de la géodésique $[e, g]$ situé à une distance $E(|y_0 - s|)$ de l'origine de G . Le lemme d'approximation nous dit que $|x(s, g) - x(s, g')| \leq 2 + 2\delta \log_2 n$. Pour chacun des sommets s , on choisit l'un des $x(s, g)$, noté $x(s)$, en faisant attention à ce que:

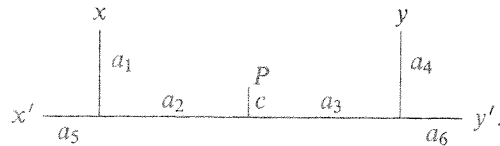
- (1) si $s = f(g)$, $x(s) = g$;
 - (2) si s est sur le segment $[y_0, f(g_1)]$, $x(s) = x(s, g_1)$.
- Pour toute arête orientée, $\alpha = [s, s']$, on pose alors $a(\alpha) = x(s)^{-1}x(s')$. On vérifie alors les propriétés (i), (ii) et (iii) requises par 1.3.2. $\square$

Convention. Dans toute la suite, nous adoptons la convention suivante: quand on dessine l'arbre d'approximation d'un nombre fini de points, on note les points du but (l'espace hyperbolique) comme les points de la source (l'arbre): ainsi, le lemme d'approximation dit que le dessin est exact à un certain nombre de δ près.

Un autre exemple qui nous sera utile est le suivant; on l'énonce dans le cas d'un espace hyperbolique quelconque.

PROPOSITION 1.3.3. Soient $[x, y]$ et $[x', y']$ deux segments géodésiques de longueur au moins égale à $2A + 20\delta$ et tels que $|x - x'| \leq A$, $|y - y'| \leq A$. Soit u (resp. v) le point de $[x, y]$ situé à une distance $A + 2\delta$ de x (resp. de y) alors tout point p de $[u, v]$ est situé à une distance inférieure à 6δ de $[x', y']$.

Démonstration. On considère l'arbre d'approximation de $[x', y'] \cup [x', x] \cup [x', p] \cup [x', y]$. Grâce aux hypothèses, on voit que celui-ci est le suivant:



Soit q le point de $[x', y']$ situé à une distance $a_5 + a_2$ de x' . Le lemme d'approximation nous dit que:

$$|p - q| \leq c + 2\delta \log_2 4 = c + 4\delta.$$

D'autre part, $|x' - q| + |y' - q| = |x' - y'| = a_5 + a_2 + a_3 + a_6$. Comme $|x - y| \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 4\delta$, comme $|x' - p| \geq a_5 + a_2 + c$ et $|y' - p| \geq a_3 + a_4 + c$, il vient: $2c \leq 4\delta$, d'où $|p - q| \leq 6\delta$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Le lemme suivant est à rapprocher des lemmes 7.1.C et 7.2.A de [Gr] (voir aussi [CDP], chap. 9, 10 et [GH], chap. 8).

LEMME 1.3.4. Soit $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ une suite de points d'un espace métrique δ -hyperbolique.

(i) On suppose que

$$(*) \quad \langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < 1/2 \min(|x_i - x_{i-1}|, |x_i - x_{i+1}|) - a - \delta.$$

Alors

$$|x_i - x_j| \geq 2a|i - j|.$$

(ii) Supposons de plus $a \geq 9\delta$ et soit u_i (resp. v_i) le point d'un segment $[x_i, x_{i+1}]$ situé à droite de x_i (resp. à gauche de x_{i+1}) à une distance $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i}$ (resp. $\langle x_i, x_{i+2} \rangle_{x_{i+1}}$) de celui-ci. Pour $i = 0$ on pose $u_0 = x_0$ et pour $i = n - 1$, $v_i = x_n$.

Alors le segment $[u_i, v_i]$ reste à une distance inférieure à 10δ de toute géodésique joignant x_0 à x_n .

Démonstration. Pour le (i), on montre par récurrence sur i que:

$$(1) \quad |x_0 - x_{i+1}| > |x_0 - x_i| + 2a.$$

De fait, en développant (*) il vient:

$$(2) \quad \begin{aligned} |x_i - x_{i+1}| &< |x_{i-1} - x_{i+1}| - 2\delta - 2a \quad \text{et} \\ |x_i - x_{i-1}| &< |x_{i-1} - x_{i+1}| - 2\delta - 2a. \end{aligned}$$

Faisant $i = 1$, on obtient (1) pour cet entier. Notons aussi que l'inégalité triangulaire implique:

$$(3) \quad |x_i - x_{i+1}| > 2\delta + 2a.$$

La définition de l'hyperbolicité montre que:

$$(4) \quad \begin{aligned} &|x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| \\ &\leq \text{Max}(|x_0 - x_{i+2}| + |x_i - x_{i+1}|; |x_0 - x_i| + |x_{i+1} - x_{i+2}|) + 2\delta. \end{aligned}$$

En additionnant (1) et (2), on voit que:

$$(4') \quad |x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| > |x_1 - x_i| + |x_{i+1} - x_{i+2}| + 2a + 2\delta,$$

ainsi (4) implique:

$$(5) \quad |x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| \leq |x_0 - x_{i+2}| + |x_i - x_{i+1}| + 2\delta$$

d'où

$$|x_0 - x_{i+2}| \geq |x_0 - x_{i+1}| + 2a,$$

ce qui montre (1) pour l'indice $i + 2$.

Pour démontrer (ii) remarquons d'abord que:

$$(6) \quad \langle x_n, x_{i+1} \rangle_{x_0} \geq \langle x_n, x_i \rangle_{x_0} + 2a.$$

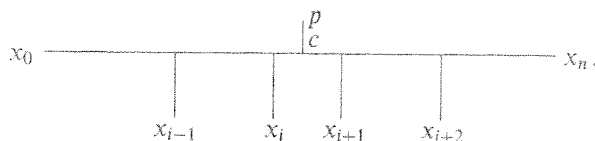
De fait, en développant, il s'agit de voir que:

$$(7) \quad |x_0 - x_{i+1}| - |x_0 - x_i| + |x_n - x_i| - |x_n - x_{i+1}| \geq 4a.$$

Mais (1) montre que $|x_0 - x_{i+1}| - |x_i - x_0| \geq 2a$, et en renversant l'ordre des termes de la suite on aurait aussi $|x_n - x_i| - |x_n - x_{i+1}| \geq 2a$.

Supposons que $2 \leq i \leq n - 2$ (le cas $i = 1$ ou $n - 1$ se traiterait de façon analogue). Soit p un point du segment $[u_i, v_i]$ et considérons l'arbre d'approximation des 7 points $x_0, x_{i-1}, x_i, p, x_{i+1}, x_{i+2}, x_n$; il est exact à $2\delta \log_2 7$ près. D'après (1)

et (7) celui-ci est le suivant:



En raisonnant comme au lemme 1.3.4, on obtient $c \leq 3\delta$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque. Il est absolument essentiel, dans ce raisonnement, de considérer l'arbre d'approximation d'un nombre borné de points (indépendant de n); sinon on obtient une estimation en $2\delta \log_2 n$ qui n'est pas uniforme en n .

1.4. Algorithme de Dehn. Considérons, pour notre groupe G , l'ensemble (fini) $\mathcal{D}$ des relations de longueur inférieure à 200δ , c'est-à-dire des mots en les générateurs de G écrits avec au plus 200δ lettres et qui représentent l'identité. Un mot m en les générateurs est dit réduit au sens de Dehn si tout sous mot de m de longueur inférieure ou égale à 100δ est géodésique; de façon équivalente si un sous-mot m' de m est égal à un sous-mot de l'une des relations R de $\mathcal{D}$, la longueur de m' est strictement inférieure à la moitié de $|R|$. Le théorème suivant, connu sous le nom d'algorithme de Dehn, permet de résoudre le problème du mot dans G ; la démonstration qu'en donne Cannon [Ca] dans le cas des groupes fondamentaux des variétés à courbure négative se généralise facilement au cas des groupes hyperboliques ([CDP], chapitre 4); nous en donnons une nouvelle démonstration ci-dessous. Par la suite nous n'utiliserons que la partie (iii) de ce théorème.

THÉORÈME 1.4.1 [Ca], [Gr]. (i) $\mathcal{D}$ est une présentation de G .

(ii) Si un mot écrit avec k lettres est réduit au sens de Dehn, la longueur de l'élément qu'il définit est au moins égale à $(4/5)k$.

(iii) Le chemin du graphe de Cayley qu'un tel mot définit reste 10δ proche de toute géodésique joignant ses extrémités.

Démonstration. On démontre d'abord (ii) et (iii). On peut évidemment supposer que le mot en question est de longueur au moins égale à 100δ . On le découpe en sous-mots de longueur comprise entre 45 et 50δ : $m = m_1 m_2 \cdots m_k$, puis l'on pose $x_0 = e$, $x_1 = m_1$, $x_2 = m_1 m_2$, ..., $x_n = m_1 m_2 \cdots m_n$. On a $|x_{i-1} - x_i| + |x_i - x_{i+1}| = |x_{i-1} - x_{i+1}|$, de sorte que $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} = 0$. On peut alors appliquer le lemme 1.3.4, ce qui permet de conclure.

Pour démontrer (i), il faut montrer comment tout mot représentant l'identité de G est un produit de conjugués d'éléments de $\mathcal{D}$. Si ce mot est de longueur inférieure à 200δ , il n'y a rien à faire; sinon, (ii) montre qu'il n'est pas réduit au sens de Dehn. Ainsi, on peut trouver un sous-mot m_1 de m ($m = am_1b$) et un élément r de $\mathcal{D}$ qui s'écrit $r = m_1 m_2$ avec $|m_2| < |m_1|$. On voit que $m = ara^{-1}(am_2b)$, et une récurrence immédiate permet de conclure. $\square$

On dit qu'une présentation finie $\langle x; \mathcal{D} \rangle$ du groupe G satisfait l'algorithme de Dehn si aucun mot en les générateurs, réduit au sens de Dehn, n'est trivial dans G . Par exemple le lemme 1.3.4 fournit un algorithme de Dehn pour tous les groupes hyperboliques. La réciproque est plus difficile. Elle résulte du fait qu'un groupe admettant un algorithme de Dehn satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire. Grâce à [Gr] par. 6, il est donc hyperbolique. Des démonstrations plus élémentaires que celle de M. Gromov ont été données par H. Short dans l'appendice de [GS] et par B. Bowdich [B]. Enonçons le:

THÉORÈME 1.4.2. *Si un groupe admet un algorithme de Dehn, il est hyperbolique.*

1.5. Réduction cyclique. Soit g un élément de notre groupe G ; on dit que g est cycliquement réduit si g est de longueur minimale dans sa classe de conjugaison.

PROPOSITION 1.5.1. *Soit g un élément de G dont tous les conjugués sont de longueur au moins 20δ . Il existe alors un élément m et un élément g' cycliquement réduit de sorte que $g = mg'm^{-1}$, et que cette écriture de g soit géodésique à 10δ près.*

Démonstration. Parmi toutes les écritures $g = mg'm^{-1}$ de g avec g' cycliquement réduit, on en choisit une pour laquelle $|m|$ est minimale. Montrons que:

$$\langle m^{-1}.g' \rangle \leq 3\delta \quad \text{et} \quad \langle g^{-1}.m^{-1} \rangle \leq 3\delta.$$

Ces deux inégalités étant similaires, on ne montre que la première. Si elle n'était pas satisfaite, on pourrait (d'après 1.2.1) trouver trois éléments a, b, c tels que: $g' = ab$ (écriture géodésique), $m^{-1} = ac$ (écriture géodésique à 2δ près) avec $|a| \geq 3\delta$. On voit que l'on a alors $g = c(ba)c^{-1}$, avec $|ba| = |g'|$ et $|c| < |m|$ ce qui contredit la minimalité de m . On conclue en regardant l'arbre d'approximation. $\square$

Remarque. Grâce à 1.3.4, on voit que si l'on pense à g comme à une géodésique brisée $[e, m] \cup [m, mg'] \cup [mg', mg'm^{-1}]$, tout point de cette géodésique brisée reste 10δ -proche de toute géodésique d'origine e et d'extrémité g .

2. Condition de petite simplification, démonstration du théorème II

2.1. Condition de petite simplification. Soit $\mathcal{R}$ une famille d'éléments cycliquement réduits du groupe G . On suppose que cette famille est stable par passage à l'inverse et conjugaison cyclique au sens suivant:

- (i) si R est élément de $\mathcal{R}$, son inverse R^{-1} l'est aussi;
- (ii) si $R = ab$ est une écriture géodésique d'un élément de $\mathcal{R}$, ba est aussi un élément de $\mathcal{R}$.

Définition. Soit $\lambda < 1/8$; on dit que la famille $\mathcal{R}$ satisfait la condition de petite simplification $C'(\lambda)$ si:

- (i) $\forall a \in G, \forall R_1, R_2 \in \mathcal{R}, |a| \leq 100\delta$ et $(a.R_1).R_2 \gg \lambda \cdot \text{Min}(|R_1|, |R_2|) \Rightarrow R_2 = aR_1a^{-1}$;
- (ii) $\text{Min}_{R \in \mathcal{R}}(|R|) \geq 1000\delta/(1 - 8\lambda)$.

2.2. Énoncé du résultat principal. On fixe une famille $\mathcal{R}$ d'éléments cycliquement réduits de G , et on note $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ le sous-groupe normal engendré par $\mathcal{R}$. On note aussi $\mathcal{R}'$ l'ensemble des mots de la forme $(ar_1b)'.(b^{-1}r_2a^{-1})$ avec $|a| \leq 20\delta$, $|b| \leq 20\delta$, où $r_1r_2 = R$ est une écriture géodésique d'un élément R de $\mathcal{R}$, et $(ar_1b)'$ est une écriture géodésique de l'élément correspondant à ce mot. On suppose $\mathcal{R}$ fini, et on note $\mathcal{D}'$ l'algorithme de Dehn pour G constitué des mots représentant l'élément neutre et de longueur inférieure à $2 \text{Max}(|R|)$, où R décrit $\mathcal{R}$. Le but essentiel de ce paragraphe est de montrer le:

THÉORÈME 2.1. *Supposons que $\mathcal{R}$ satisfasse $C'(\lambda)$ avec $\lambda \leq 1/8$. On a alors les trois propriétés suivantes:*

- (i) $\mathcal{D}' \cup \mathcal{R}'$ est un algorithme de Dehn pour le groupe quotient $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$.
- (ii) En particulier, $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ est hyperbolique.
- (iii) Le sous-groupe $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ est libre.
- (iv) La boule de rayon $(1/4) \text{Min}_{R \in \mathcal{R}}(|R|) - 1000\delta$ s'injecte dans le quotient $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$.

Il est clair, compte-tenu de 1.4.2, que dans cet énoncé, (i) implique (ii) et (iv). La démonstration de (ii) repose sur le lemme 2.4, analogue du lemme de Greendlinger dans la théorie usuelle de la petite simplification (voir [LS]); un argument formel nous permettra alors de montrer (iii).

Remarque. On peut démontrer un théorème analogue avec $1/6$ ou lieu de $1/8$; cependant la démonstration nécessite la discussion d'un plus grand nombre de cas, et si les conclusions (i), (ii), et (iv) subsistent sans trop de peine, nous ne sommes pas arrivés à préserver (iii) dans ce cas.

2.3. Un analogue du lemme de Greendlinger

Définition 2.1. On dit qu'un élément m de G ne contient pas plus de la moitié d'une relation si on ne peut trouver un élément $R = r_1r_2$ de $\mathcal{R}$ tel que:

- (1) $R = r_1r_2$ est une écriture géodésique et $|r_1| \geq |r_2| + 60\delta$;
- (2) m admette une écriture géodésique à 50δ près de la forme $m = m_1r_1m_2$.

On montre facilement le lemme suivant:

LEMME 2.2. *L'ensemble X des éléments de G qui admettent une écriture géodésique à 10δ près de la forme $g = mRm^{-1}$, où m ne contient pas plus de la moitié d'une relation est un système de générateurs de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$. Si $g = mRm^{-1}$ est une telle écriture,*

$$|mRm^{-1}| \geq 2|m| + |R| - 10\delta.$$

Soit g un élément de $\langle \mathcal{R} \rangle$; par définition, g s'écrit comme produit de conjugués d'éléments de $\mathcal{R}$, et grâce au lemme précédent, on peut choisir ces éléments dans X . On écrit: (*) $g = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \cdots m_k R_k m_k^{-1}$, et on suppose que parmi toutes les écritures de g sous cette forme, l'entier k est minimal. On pose: $g_0 = e$, $g_1 = m_1 R_1 m_1^{-1}$, $g_n = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \cdots m_k R_k m_k^{-1}$; $g_k = g$. Grâce au lemme précédent, on a toujours $|m_i R_i m_i^{-1}| \geq 2|m_i| + |R_i| - 10\delta$.

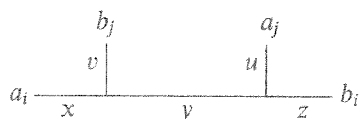
On définit deux suites de points notées a_i et b_i respectivement:

$$a_i = g_{i-1} m_i \quad b_i = a_i R_i = g_{i+1} m_i.$$

L'idée principale de la suite du texte est de penser à la suite des points $g_0, a_1, b_1, g_1, a_2, b_2, g_2, \dots, a_k, b_k, g_k$ comme à une géodésique brisée dans (le graphe de Cayley de) G .

Le lemme suivant nous montre où va servir l'hypothèse de petite simplification.

LEMME 2.3. *Supposons que pour deux indices $i \leq j$, l'arbre d'approximation des points a_i, b_i, a_j, b_j soit le suivant:*



(l'une ou plusieurs des arêtes du bord peut être réduite à un point). Alors

$$|y| \leq \lambda \cdot \min(|R_i|; |R_j|) + 10\delta.$$

N.B. L'ordre des points a une importance.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. D'après la proposition 1.2.3, on pourrait écrire: $R_i = xyz$ (écriture géodésique) et $R_j = u^{-1}y^{-1}v$ (écriture géodésique à 25δ près). Posons $R'_i = yzx$ (c'est un élément de $\mathcal{R}$) et $R'_j = yuv^{-1}$. Alors R'_j est un conjugué de R_j^{-1} de longueur inférieure ou égale à $|R_j| + 25\delta$, de sorte que l'on peut trouver (grâce à 1.5.1) un élément R'' de $\mathcal{R}$ et un élément a de G de longueur inférieure à 30δ tels que $R'' = aR'_j a^{-1}$. Mais alors le produit scalaire $\langle aR'' a^{-1}, R'_i \rangle$ est au moins égal à $|y| - 10\delta$ c'est-à-dire $\lambda \cdot \min(|R_i|; |R_j|)$. L'hypothèse de petite simplification montre alors que $R'_i = aR'' a^{-1} = yuv^{-1}$. Ainsi, $yzx = yuv^{-1}$. Il vient: $b_i^{-1} a_j = a_i^{-1} b_j$. Comme $b_i = g_i m_i$ et comme $a_i = g_{i-1} m_i$, on obtient: $m_i^{-1} g_i^{-1} g_{j-1} m_j = m_i^{-1} g_{i-1}^{-1} g_j m_j$. Autrement dit,

$$g_i^{-1} g_{j-1} = g_{i-1}^{-1} g_j.$$

Le premier terme de cette égalité est égal à: $m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_j^{-1}$, et

le second $m_i R_i m_i^{-1} \cdots m_j R_j m_j^{-1}$: on contredit ainsi la minimalité du nombre de termes employés pour exprimer g . $\square$

Plus généralement, nous aurions pu considérer non pas des écritures minimales d'un élément de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ mais plutôt des écritures réduites au sens suivant:

Définition. On dit que l'écriture $g = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \cdots m_k R_k m_k^{-1}$ est *réduite* si aucun couple d'indice (i, j) ne contredit la conclusion du lemme 2.3. En particulier une écriture minimale est réduite.

Le lemme suivant est crucial: associé à la proposition 1.3.4, il nous permettra de conclure. C'est un analogue du lemme de Greendlinger [LS] dans la théorie usuelle de la petite simplification. On suppose donnée une écriture $g = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \cdots m_k R_k m_k^{-1}$ réduite d'un élément g de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$, et on garde les notations précédentes concernant les $a_i, b_i, \dots$. Son énoncé, quoiqu'un peu technique, traduit le fait suivant: les points g_0 et g_n peuvent être joints par une courbe presque géodésique constitué de segments qui sont des sous-mots des R_i et des m_i ; l'un des segments correspondant à l'un des R_i étant suffisamment long.

LEMME 2.4. *Pour tout entier $n \leq k$, il existe un sous-ensemble $I_n = \{i_1 \leq \cdots \leq i_{k_n}\}$ de $\{1, \dots, n\}$, et pour chaque indice i de I_n , il existe des points a'_i et b'_i du segment $[a_i, b_i]$ vérifiant les six propriétés suivantes:*

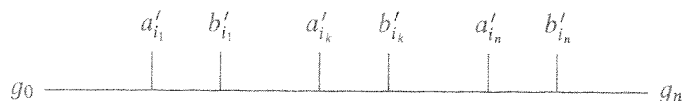
- (1) $|a'_i - b'_i| \geq \lambda |R_i| + 300\delta$;
- (2) $|b'_i - a'_{i+1}| \geq 30\delta$;
- (3) $\langle a'_i, a'_{i+1} \rangle_{b'_i} \leq 10\delta$ et $\langle b'_i, b'_{i+1} \rangle_{a'_{i+1}} \leq 10\delta$;
- (4) si $|b'_i - a'_{i+1}| \geq 50\delta$, alors $b'_i = b_i$, et la distance de a'_{i+1} au segment $[b_i, g_n]$ est inférieure ou égale à 10δ . Dans ce cas on a de plus $|a'_i - b'_i| \geq 2\lambda |R_i| + 400\delta$;
- (5) le dernier indice i_{k_n} est l'entier n , $b_n = b'_n$, $\langle a'_n, g_n \rangle_{b_n} \leq 10\delta$ et $|a'_n - b_n| \geq 2\lambda |R_n| + 400\delta$. De plus, $\langle g_0, b'_{i_1} \rangle_{a'_{i_1}} \leq 10\delta$.
- (6) il existe un indice i_0 dans I_n (dépendant de l'entier n) vérifiant l'une des deux propriétés suivantes:
 - (6.a) soit $|a'_{i_0} - b'_{i_0}| \geq |R_{i_0}| - 2\lambda |R_{i_0}| - 200\delta$;
 - (6.b) soit $|a'_{i_0} - b'_{i_0}| \geq |R_{i_0}| - 3\lambda |R_{i_0}| - 300\delta$, et $|b'_{i_0} - a'_{i_0+1}| \leq 50\delta$.

2.4. Démonstration du lemme 2.4. Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 1$, et compte-tenu du lemme 2.2, il suffit de prendre $I_n = \{1\}$, $a_n = a'_n$, $b_n = b'_n$.

Supposons donc le lemme 2.4 vrai pour un certain entier n .

Notons que la suite $g_0, a'_{i_1}, b'_{i_1}, a'_{i_2}, b'_{i_2}, \dots, a'_{i_n}, b'_{i_n}, g_n$ satisfait les hypothèses du lemme 1.3.4. En particulier, on voit que si $i \in I_n$ et $[a'', b'']$ désigne le segment obtenu en tronquant de 20δ à gauche et à droite le segment $[a'_i, b'_i]$, ce segment reste 6δ proche de toute géodésique joignant g_0 à g_n .

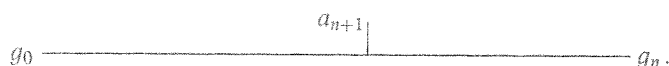
D'après 1.3.4, on a le dessin suivant:



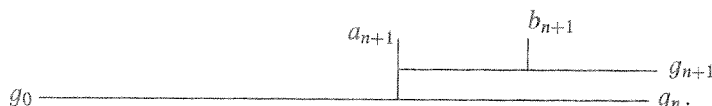
où la longueur de chaque petit segment vertical est majorée par 20δ .

Distinguons deux cas (I, II)

I. *Premier cas.* $\langle a_{n+1}, g_0 \rangle_{g_n} \leq |m_{n+1}| - 30\delta$. Dans ce cas, le triangle d'approximation de a_{n+1} , g_0 et g_n est le suivant:



De sorte que celui des 5 points $g_0, g_n, a_{n+1}, b_{n+1}, g_{n+1}$ est:



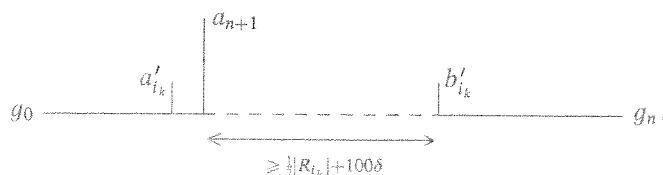
Il suffit alors de poser $I_{n+1} = \{n+1\}$, et de définir a'_{n+1} comme étant le point du segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ situé 20δ à droite de a_{n+1} . Le produit scalaire $\langle a_{n+1}, g_{n+1} \rangle$ est inférieur à 5δ puisque l'écriture $m_{n+1}R_{n+1}m_{n+1}^{-1}$ est géodésique à 10δ près, et cela permet de vérifier toutes les propriétés requises au lemme 2.4.

II. *Deuxième cas.* $\langle a_{n+1}, g_0 \rangle_{g_n} \geq |m_{n+1}| - 30\delta$: autrement dit, le point a_{n+1} est 30δ proche du segment $[g_0, g_n]$.

On note d'abord que si $|a'_{i_k} - b'_{i_k}| \geq 1/2|R_{i_k}| + 200\delta + \lambda|R_{i_k}|$, ce qui est certainement le cas pour l'indice i_0 fourni au (6) du lemme 2.4 (supposé vrai au rang n), on a:

$$\langle a_{n+1}, g_0 \rangle_{g_n} \leq |g_n - a'_{i_k}| - \lambda|R_{i_k}| - 100\delta.$$

Sinon, on aurait le dessin suivant:



On pourrait trouver des points x et y sur le segment $[a'_{i_k}, b'_{i_k}]$ et des points u et v sur

le segment $[g_n, a_{n+1}]$ tels que:

$$|x - y| \geq 1/2|R_{i_k}| + 80\delta; \quad |u - x| \leq 10\delta; \quad |v - y| \leq 10\delta.$$

Le sous-mot $v^{-1}u$ de m_{n+1} contient plus de la moitié d'une relation au sens de la définition 2.1, puisque $y^{-1}x$ représente plus de la moitié de R_{i_k} . Cette remarque permet de considérer le plus grand indice i_k pour lequel on a:

$$\langle a_{n+1}, g_0 \rangle_{g_n} \leq |g_n - a'_{i_k}| - \lambda|R_{i_k}| - 100\delta.$$

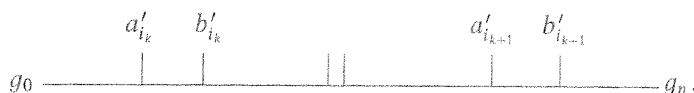
Il nous faut là encore distinguer deux cas:

$$(II.A) \quad |b'_{i_k} - a'_{i_{k+1}}| \leq 50\delta;$$

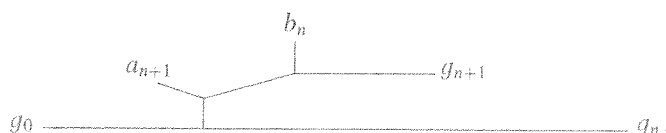
$$(II.B) \quad |b'_{i_k} - a'_{i_{k+1}}| \geq 50\delta \text{ ou } b'_{i_k} = b_n.$$

Notons que si l'indice i_k ainsi défini coïncide avec l'indice i_0 fourni par le (6), et si $|a'_{i_k} - b'_{i_k}| < |R_{i_k}| - 2\lambda|R_{i_k}| - 200\delta$, on est nécessairement dans le premier cas (II.A).

Etudions d'abord II.A. L'arbre d'approximation des 6 points $g_0, g_n, a'_{i_k}, b'_{i_k}, a'_{i_{k+1}}, b'_{i_{k+1}}$ est le suivant:



Le point a_{n+1} étant 30δ proche de la géodésique $[g_0, g_n]$, il est 40δ proche du segment $[a'_{i_k}, b'_{i_{k+1}}]$. Le sous-segment de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ qui reste 30δ proche de la géodésique $[g_0, g_n]$ contient a_{n+1} ; mais sa longueur ne peut excéder $2\lambda|R_{n+1}| + 100\delta$, sinon il resterait 10δ proche de l'un des deux segments $[a'_{i_k}, b'_{i_k}]$ ou $[a'_{i_{k+1}}, b'_{i_{k+1}}]$ sur une longueur au moins égale à $\lambda|R_{n+1}| + 20\delta$, ce qui contredirait le lemme 2.3. Ici, on s'est servi de 1.3.3: si deux segments géodésiques ont leurs extrémités 20δ -proches, quitte à les tronquer de 22δ à chaque bout, il restent en fait 6δ proches. On définit alors a'_{n+1} comme étant le point de $[a_n, b_n]$ situé $2\lambda|R_{n+1}| + 100\delta$ à gauche de a_n , de sorte que sa distance à b_{n+1} est au moins égale à $(1 - 2\lambda)|R_{n+1}| - 100\delta$, et l'on pose $b'_{n+1} = b_{n+1}$. Ainsi, on a le dessin suivant, qui est juste à 10δ près:



Grâce à ce dessin, on voit que le produit $\langle g_0, b_{n+1} \rangle_{a'_{n+1}}$ est du même ordre (à 10δ près) que $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle_{a'_{n+1}}$ qui est lui-même nul puisque a'_{n+1} est sur un segment géodésique joignant a_{n+1} à b_{n+1} . Il en résulte que si l'on pose $I_{n+1} = \{n+1\}$, a'_{n+1}

et b_{n+1} satisfont les conclusions du lemme 2.4 (d'où la récurrence), puisque $|a'_{n+1} - b_{n+1}| \geq |R_{n+1}| - 2\lambda|R_{n+1}| - 300\delta$.

Traitions maintenant le cas (II.B): $|b'_{i_k} - a'_{i_{k+1}}| \geq 50\delta$, ou $b'_{i_k} = b_n$. Le cas $i_k = n$ se traite d'une façon analogue à celui où i_k n'est pas le dernier indice, en remplaçant dans la discussion qui va suivre $a_{i_{k+1}}$ par g_n . Nous supposons donc i_k différent de n . D'après le (4) nous savons que:

$$b'_{i_k} = b_{i_k} \quad \text{et} \quad |a'_{i_k} - b'_{i_k}| \geq 2\lambda|R_{i_k}| + 400\delta.$$

De plus, le segment $[b_{i_k}, a'_{i_{k+1}}]$, tronqué de 10δ à chaque extrémité, reste 10δ proche du segment $[b_{i_k}, g'_{i_k}]$, puisque ses extrémités sont 10δ proche de ce segment. Il en résulte que le segment $[b_{i_k}, a'_{i_{k+1}}]$ ne peut rester 10δ proche d'un sous-segment de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sur une longueur plus grande que $1/2 \cdot |R_{n+1}| + 200\delta$: sinon l'élément $m_{i_k} = b_{i_k}^{-1}g_{i_k}$ contiendrait plus de la moitié d'une relation, au sens de la définition 2.1. En raisonnant comme pour le cas (A), on voit que les segments $[a'_{i_{k+1}}, b'_{i_{k+1}}]$ et $[a'_{i_k}, b_{i_k}]$ ne peuvent rester 10δ proches de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sur une longueur plus grande que $\lambda|R_{n+1}| + 30\delta$: sinon, on contredirait le lemme 3.2. Ainsi le sous-segment, noté s de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ qui reste 20δ proche de la géodésique $[g_0, g_n]$ contient a_{n+1} et a une longueur qui ne peut excéder $2\lambda|R_{n+1}| + 1/2|R_{n+1}| + 200\delta$. Comme $|R_{n+1}| \geq 1000\delta(1 - 8\lambda)$, on en déduit que:

$$|s| \leq |R_{n+1}| - 2\lambda|R_{n+1}| - 300\delta.$$

Son complément, noté d satisfait donc:

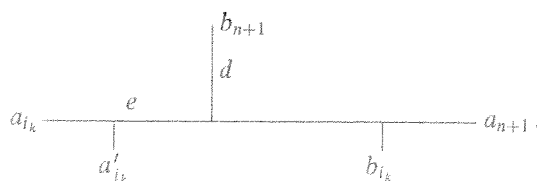
$$|d| \geq 2\lambda|R_{n+1}| + 300\delta.$$

Il nous faut encore distinguer trois cas, notés (II.B.1), (II.B.2), et (II.B.3).

(II.B.1) $|s| \leq l|R_{n+1}| + 200\delta$. Soit a'_{n+1} le point du segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ situé $\lambda|R_{n+1}| + 300\delta$ à droite de a_n . La distance de a'_{n+1} à la géodésique $[g_0, g_n]$ est au moins égale à 50δ . En raisonnant comme pour le cas (A), on que $I_{n+1} = \{n+1\}$, a'_{n+1} et b_{n+1} satisfont aux hypothèses de récurrence.

(II.B.2) $|s| \geq \lambda|R_{n+1}| + 200\delta$ et la distance de b_{i_k} à $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est inférieure à 50δ .

Regardons l'arbre d'approximation des 5 points $a_{i_k}, b_{i_k}, a_{n+1}, b_{n+1}, a'_{i_k}$.



D'après ce qui précède, $|d| \geq 2l|R_{n+1}| + 300\delta$, $|c| \leq l|R_{n+1}| + 30\delta$ et donc,

réduite. Il existe donc un couple d'indice i, j , contredisant le lemme 2.3. Autrement dit, pour un certain couple i, j d'indices, on a:

$$m_i R_i m_i^{-1} m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_j R_j m_j^{-1} = m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1}.$$

Ces équations, que l'on peut écrire aussi:

$$\begin{aligned} m_i R_i m_i^{-1} &= (m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1}) m_j R_j m_j^{-1} \\ &\quad \times (m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

forment donc une présentation du sous-groupe normal $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$.

Tout élément du sous-groupe normal $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ admet (au moins) une expression réduite: par exemple une écriture minimale est réduite (c'est ce que dit 2.3). En suivant pas à pas la récurrence qui montrait 2.4, on voit que, si $(m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1})$ est une expression réduite, on a:

$$(**) \quad |(m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1})| \geq \text{Max}(|m_i| + |R_{i_0}|(1 - 3\lambda),$$

le maximum étant pris sur tous les indices i , intervenant dans cette écriture, et l'indice i_0 étant l'indice fourni en lui appliquant par le lemme 2.4. Reprenons la démonstration du lemme 2.3; on en garde les notations. On avait: $zx = uv^{-1}$, d'où (*) $z = uv^{-1}x^{-1}$. Et, en regardant la figure 3, on voit que ces deux écritures sont géodésiques à 10δ près. Mais $u^{-1}z$ est aussi une écriture géodésique à 10δ près. De (*) il vient que $\langle z, u \rangle \geq |u| - 10\delta$, alors que le fait que $u^{-1}z$ soit une écriture géodésique à 10δ près entraîne que ce produit scalaire est inférieur à 10δ . On voit donc que $|u| \leq 20\delta$ et par symétrie, on a un résultat analogue pour x . Mais alors, $R_i = yv^{-1}$ et $R_j = y^{-1}v$ sont des écritures géodésiques à 20δ près, avec le dessin suivant:

$$\begin{array}{c} a_i \quad \quad \quad a_j \\ | \quad \quad \quad | \\ b_j \text{---} \frac{v^{-1}}{\quad} \text{---} y \text{---} \frac{v^{-1}}{\quad} \text{---} b_i. \end{array}$$

L'élément qui conjugue $m_i R_i m_i^{-1}$ et $m_j R_j m_j^{-1}$ est $g_i^{-1} g_j = m_i b_i^{-1} a_j m_j^{-1} = m_i y m_j^{-1}$, et cette écriture est géodésique à 20δ près. Quitte à changer le rôle de i et j , on peut supposer que y est plus court que v ; donc $|y| \leq 1/2 |R_i| + 20\delta$.

D'autre part, $m_i y m_j^{-1}$ est un élément de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$, de sorte qu'il admet une écriture réduite $(m_{i+1} R_{i+1} m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1} R_{j-1} m_{j-1}^{-1})$.

Dans cette écriture, et d'après 2.4, il existe un indice i_0 tel que le sous segment $[a_{i_0}, b_{i_0}]$ reste 30δ proche de la géodésique brisée $[m_i, y, m_j^{-1}]$ sur une longueur plus grande que $|R_{i_0}|(1 - 3\lambda) - 300\delta > |R_{i_0}|(1/2 + \lambda) + 200\delta$. Comme ni m_i ni

m_{j-1} ne contiennent plus de la moitié de R_{i_0} , y et R_{i_0} restent 10δ proches sur une longueur au moins égale à $\lambda|R_{i_0}| + 100\delta$. Par l'hypothèse de petite simplification, et en raisonnant comme à la preuve du lemme 2.3, on voit que R_{i_0} et R_i sont conjugués, et ont donc la même longueur. Il résulte donc de $(**)$ que l'on a :

$$\text{Max}_{i+1 \leq k \leq j-1} |m_k| < \text{Sup}(|m_i|, |m_j|) - \lambda|R_{i_0}| + 20\delta < \text{Sup}(|m_i|, |m_j|).$$

On met alors une relation d'équivalence Π sur les conjugués d'éléments de $\mathcal{R}$ de la forme mR_im^{-1} (écriture géodésique à 20δ près, où m ne contient pas plus de la moitié d'une relation), en disant que deux tels éléments sont équivalents s'ils sont conjugués par un élément de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$. Dans chaque classe d'équivalence, on choisit un représentant de longueur minimale, et on note X cet ensemble de représentants. Ce qui précède montre que si $m_iR_im_i^{-1}$ et $m_jR_jm_j^{-1}$ sont équivalents, on peut écrire :

$$\begin{aligned} m_iR_im_i^{-1} &= (m_{i+1}R_{i+1}m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1}R_{j-1}m_{j-1}^{-1})m_jR_jm_j^{-1} \\ &\quad \times (m_{i+1}R_{i+1}m_{i+1}^{-1} \cdots m_{j-1}R_{j-1}m_{j-1}^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

avec $\text{Max}_{i+1 \leq k \leq j-1} |m_k| < \text{Max}(|m_i|, |m_j|)$.

En raisonnant par récurrence sur la longueur, on voit que X est un système de générateurs de $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$; par construction, il est libre.

3. Exemples. On rappelle qu'un groupe hyperbolique est dit non élémentaire s'il n'est pas fini et s'il ne contient pas $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini. Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, il nous faut rappeler un résultat (dû à M. Gromov) sur la norme stable des éléments d'ordre infini d'un groupe hyperbolique. Dans tout ce paragraphe, on note b_r le nombre d'éléments de G de longueur inférieure à r .

Pour tout élément f , on note $[f]$ la longueur minimale de tous les conjugués de f et $[[f]]$ la limite, quand n tend vers l'infini de $1/n|f^n|$. Le nombre $[[f]]$ s'appelle la norme stable de f , c'est un invariant de conjugaison.

PROPOSITION 3.1. *Soit f un élément cycliquement réduit tel que $|f| \geq 1000\delta$.*

- (i) $0 \leq |f^n| - [f^n] \leq 100\delta$;
- (ii) $0 \leq |f^n| - n[[f]] \leq 120\delta$;
- (iii) soit $n_0 = (b_{8\delta})^2$! alors $n_0 \cdot [[f]]$ est entier.

Démonstration. Le détail de la démonstration de (i) et (ii) apparaît dans [CDP], chap. 10, prop. 6.2 et 6.4, p. 118 et 119. Esquisons une démonstration de (iii) [Gr, Remark p. 254], dont aucune preuve n'est publiée.

Choisissons un ordre sur l'ensemble des générateurs de G ; une géodésique du graphe de Cayley et dite spéciale si elle est minimisante pour l'ordre lexicographique. Deux points du graphe de Cayley sont joints par une unique géo-

désique spéciale. Une géodésique orientée infinie est dite spéciale si tout sous-segment fini l'est. On montre, en recopiant [CDP], chapitre 2, prop. 2.2 que deux points du bord de G sont joints par au moins une géodésique spéciale; comme deux telles géodésiques restent 8δ proches, deux points du bord de G sont joints par au plus $(b_{8\delta})^2$ géodésiques spéciales. Comme $[f] \geq 2\delta$, $[f]$ est de type hyperbolique et fixe deux points du bord: il permute donc l'ensemble des géodésiques spéciales joignant ces deux points. En particulier, si l'on pose $n_0 = b_{8\delta}^2$, f^{n_0} fixe une géodésique, et agit donc par translation dessus. Si g est un élément de cette géodésique, on a donc $|f^{k \cdot n_0} g - g| = |g^{-1} f^{k \cdot n_0} g| = k \cdot |f^{n_0} g - g|$. En divisant par k et en passant à la limite, il vient $[[f]] = (1/n_0)|f^{n_0} g - g|$. $\square$

Le théorème suivant précise un résultat annoncé dans l'introduction. On garde les notations précédentes concernant n_0 .

THÉORÈME 3.2. Soit $p \in (1/n_0)\mathbb{N}$, et $\{f_1, \dots, f_k\}$ l'ensemble des éléments cycliquement réduits de longueur stable p . Soit $N_0 = b_{500\delta}^2$, et k un entier. L'ensemble $\mathcal{R}_p^k$ des conjugués de longueur minimum des $f_i^{kN_0}$ satisfait la condition de petite simplification $C'(1/10.k)$.

Remarque (Groupes de torsion d'Olshanskii [O]). On peut déduire de ce fait que tout groupe hyperbolique non élémentaire admet un quotient qui est un groupe de torsion infini, en remarquant, grâce à l'algorithme de Dehn, que la restriction de la projection de G sur G_p est injective dans la boule de rayon $p/100 - 10\delta$, et en itérant cette procédure. Cependant un résultat plus profond est décrit en [O] qui obtient ainsi des groupes infinis de torsion dont l'ordre des éléments est borné.

Le théorème 3.2 résulte du lemme suivant.

LEMME 3.3. Soient f et g deux éléments cycliquement réduits tels que $|f| \geq 1000\delta$, $|g| \geq 1000\delta$, et $[[f]] = [[g]]$, soit $n \geq b_{500\delta}$; soit a tel que $|a| \leq 110\delta$ et supposons que $\langle f^{2n}, ag^{2n} \rangle \geq 2/3(|f^n|)$ alors $f^{k \cdot N_0} = ag^{k \cdot N_0} a^{-1}$.

Démonstration. De fait, les hypothèses du lemme jointes à la proposition 3.1 montrent que la distance $|f^i - ag^i|$ reste inférieure à 400δ si $i \leq n$; on peut donc trouver deux indices distincts i et j inférieurs à n tels que $f^{i-j} = g^{i-j}$. Comme $i - j$ divise N_0 , on a la conclusion. $\square$

On dit qu'un élément est primitif si il n'est puissance d'aucun autre élément; on sait que tout élément d'ordre infini est puissance d'un élément primitif (cela résulte de la non nullité de sa norme stable et de la propriété (iii) de 3.1), et que dans un groupe hyperbolique non élémentaire, il existe une infinité d'éléments primitifs deux à deux non conjugués.

On note C_G le sous-groupe distingué formé des $u \in G$ qui agissent trivialement sur le bord: si G n'est pas élémentaire, C_G est un groupe fini constitué d'éléments de longueur inférieure à 100δ .

Le lemme suivant est à la source de nombreux exemples.

LEMME 3.4. *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire et n un entier. Il existe des éléments $S_1, \dots, S_n$ cycliquement réduits et primitifs tels que l'ensemble des conjugués de longueur minimum des S_i satisfasse l'hypothèse de petite simplification $C'(1/30)$. On peut de plus les choisir de sorte que pour tout conjugué cycliquement réduit S'_i de S_i , et tout $|u| \leq 100\delta$, $uS'_iu^{-1} = S'_i \Rightarrow u \in C_G$.*

Démonstration. Soient $p_1, \dots, p_{2n}$ des éléments primitifs deux à deux conjugués et dont les puissances ne sont pas conjuguées. Soit $m_i = \prod_{j \neq i} [[p_j]] \cdot N_0$, de sorte que les $P_i = p_i^{m_i}$ ont mêmes normes stables et sont deux à deux non conjugués. En appliquant le résultat précédent, on voit que pour k suffisamment grand, les conjugués de longueur minimale des $q_i = P_i^k$ satisfont la condition de petite simplification $C'(1/100)$. Soit $S_i = q_{2i-1}q_{2i}$. On se convainc, par un argument analogue au lemme 3.3, que les R_i sont primitifs et que leurs conjugués de longueur minimum satisfont l'hypothèse de petite simplification $C'(1/30)$, d'où la première conclusion.

Si x est un élément hyperbolique de Γ , on note C_x l'ensemble des éléments u de longueur inférieure à 100δ qui fixent les deux points $x^{\pm\infty}$ du bord de Γ . On vérifie que si S'_i est un conjugué de longueur minimum de R_i et $u \in C_{R'_i}$ alors $u \in C_{p'_{2i-1}} \cap C_{p'_{2i}}$ pour deux conjugués p'_{2i-1} et p'_{2i} de p_{2i-1} et p_{2i} . En remplaçant les p_i par les S_i itérant ce procédé un nombre fini de fois, on peut donc construire des éléments primitifs p_i tels que $C_{p_i} = C_G$. Si c'est le cas, les S_i ainsi construits satisfont aussi la seconde conclusion. $\square$

Pour voir comment utiliser le lemme 3.4, montrons le théorème suivant annoncé par Gromov [Gr]:

THÉORÈME 3.5 (SQ Universalité des groupes hyperboliques). *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire, et A un groupe dénombrable. G admet un quotient qui contient A ; si de plus A est hyperbolique, on peut aussi choisir ce quotient hyperbolique.*

Remarque. Comme il existe des groupes hyperboliques satisfaisant la propriété T de Kazdan, et que cette propriété est stable par passage au quotient, on en déduit que tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe ayant la propriété T, ce qui répond à une question de C. Pittet posée dans [HV]. En théorie combinatoire des groupes, un groupe contenant tout groupe dénombrable comme sous-groupe d'un quotient est appelé groupe SQ Universel.

Démonstration. L'idée d'appliquer la théorie de la petite simplification pour fabriquer des groupes satisfaisant cette propriété revient à Britton et Levin, voir [LS], chapitre V, page 282.

Quitte à remplacer G par G/C_G (qui a même bord), on peut supposer C_G trivial. On considère d'abord le cas où A est hyperbolique. A est supposé muni d'un système de générateurs $X = x_1, \dots, x_n$. On considère un système de générateurs Y de A contenant X . On muni $G * A$ de la métrique canoniquement associée à un système de générateurs de G et à Y ; la solution du problème du mot dans un

puisque $|a'_{i_k} - b_{i_k}| \geq 2\lambda|R_{i_k}| + 400\delta$, on a :

$$(*) \quad |e| \geq \lambda|R_{i_k}| + 300\delta.$$

On définit alors le nouvel ensemble d'indice $I_{n+1} = \{i_1, i_2, \dots, i_k, n+1\}$; on ne change pas les points a'_i et b'_i pour $i \leq i_{k-1}$; on garde aussi a'_{i_k} ; on remplace le point $b_{i_k} (= b'_{i_k})$ par le point, noté provisoirement b''_{i_k} pour éviter toute confusion, situé sur la géodésique $[a'_{i_k}, b_{i_k}]$ à une distance $|e| - 30\delta$ de a'_{i_k} . Enfin le point a'_{n+1} est le point du segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ situé à une distance $|d|$ de b_{n+1} .

Dans la vérification des propriétés (1) à (6) requises par le lemme 2.4, comme on n'a pas touché au premiers indices, seules les propriétés (6) et le fait que $\langle a'_{i_{k-1}}, b''_{i_k} \rangle_{a'_{i_k}} \leq 10\delta$ sont délicates.

Notons que l'on sait que $\langle a'_{i_{k-1}}, b_{i_k} \rangle_{a'_{i_k}} \leq 10\delta$. D'autre part, les points a'_{i_k} , b''_{i_k} et b_{i_k} sont sur un même segment géodésique.

Calculons alors la différence des produits scalaires $\langle a'_{i_{k-1}}, b''_{i_k} \rangle_{a'_{i_k}} - \langle a'_{i_{k-1}}, b_{i_k} \rangle_{a'_{i_k}}$. En revenant à la définition on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|b''_{i_k} - a'_{i_k}| - |b''_{i_k} - a'_{i_{k-1}}| - |b_{i_k} - a'_{i_k}| + |b_{i_k} - a'_{i_{k-1}}|) \\ &= \frac{1}{2} (|b_{i_k} - b''_{i_k}| - |b_{i_k} - a'_{i_k}| - |b''_{i_k} - a'_{i_{k-1}}|) \leq 0 \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire.

Reste donc à choisir l'indice i_0 de façon à ce que la propriété (6) requise par le lemme 2.4 soit satisfaite. Si l'indice i_0 relatif à I_n est différent de i_k , on le garde. Sinon, nous avons déjà remarqué que cela impliquait que :

$$|a'_{i_k} - b_{i_k}| \geq |R_{i_k}| - 2\lambda|R_{i_k}| - 200\delta,$$

de sorte que

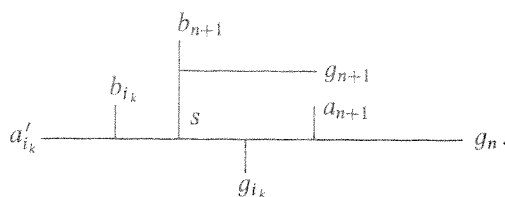
$$|a'_{i_k} - b''_{i_k}| \geq |R_{i_k}| - 3\lambda|R_{i_k}| - 300\delta.$$

Dans ce cas, et par construction même, $|a'_{n+1} - b''_{i_k}| \leq 50\delta$: l'indice i_k satisfait donc la propriété requise par le (6) du lemme 2.4.

(II.B.3) $|s| \geq l|Rn+1| + 200\delta$ et la distance de b_{i_k} à $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est supérieure à 50δ .

Nécessairement, le segment s reste 10δ proche de la géodésique $[b_{i_k}, g_{i_k}]$ sur une longueur au moins égale à 100δ . Et donc s reste 20δ proche de ce segment géodésique sur une longueur au moins égale à 100δ . Toujours grâce à 1.3.3, on a

le dessin suivant:



On désigne alors par a'_{n+1} le point de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ situé le plus à droite parmi ceux qui sont à une distance inférieure à 10δ de la géodésique $[b_{i_k}, g_{i_k}]$. On pose aussi $I_{n+1} = \{i_1, i_2, \dots, i_k, n+1\}$. On ne change pas les points a'_i et b'_i pour $i \leq i_k$; on vérifie alors sans peine toutes les conclusions du lemme 2.4.

Ceci achève de démontrer 2.4. $\square$

2.5. *Démonstration du théorème 2.1.* Montrons d'abord la conclusion (ii) du Théorème 2.1.

Pour montrer 2.1 (ii), considérons un mot m , en les générateurs de G , nul dans le quotient $G/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$. Il s'agit de démontrer qu'il n'est pas réduit au sens de Dehn pour la présentation donnée par $\mathcal{R}' \cup \mathcal{D}'$. Supposons donc qu'il est réduit pour $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire que tout sous-mot de m de longueur inférieure à $\text{Max}(|R|)$ est géodésique. Le chemin qu'il définit dans le graphe de Cayley de G est 10δ -proche de toute géodésique joignant les extrémités de m .

Soit g l'élément de G défini par ce mot m . Exprimons g comme produit de conjugués des R_i , $g = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \dots m_k R_k m_k^{-1}$, en exigeant que parmi toutes les écritures de g sous cette forme, l'entier k soit minimal, ou même simplement que cette écriture soit réduite. Ceci permet d'appliquer le lemme 2.4 dont on conserve les notations.

Rappelons que la suite $g_0, a'_{i_1}, b'_{i_1}, a'_{i_2}, b'_{i_2}, \dots, a'_{i_n}, b'_{i_n}, g_n$ fournie par 2.4 satisfait les hypothèses de la proposition 1.3.4. En particulier, on voit que, dans ce lemme, si $i \in I_n$ et $[a'_i, b'_i]$ désigne le segment obtenu en troncant de 20δ à gauche et à droite le segment $[a''_i, b''_i]$, ce segment reste 6δ proche de toute géodésique joignant g_0 à g_n . Soit i_0 l'indice particulier fourni par le (6). Les points a''_{i_0} et b''_{i_0} sont aussi 10δ -proches de cette géodésique. On peut donc trouver, sur le chemin défini par m deux points u et v tels que les distances $|a''_{i_0} - u|$ et $|b''_{i_0} - v|$ soient inférieures à 20δ . Il en résulte que le sous-mot de m qui est le chemin qui va de u à v est une écriture géodésique de $(a_1 b)$ avec a et b de longueur inférieure à 20δ et r_1 représentant (beaucoup) plus que la moitié d'un conjugué de R_{i_0} . Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Il nous reste à examiner la troisième partie du théorème 2.1 concernant la liberté du sous-groupe normal engendré par $\mathcal{R}$. On garde les notations du début de ce paragraphe. Grâce à la discussion qui précède, on voit que toute relation de la forme $e = m_1 R_1 m_1^{-1} m_2 R_2 m_2^{-1} \dots m_k R_k m_k^{-1}$, où les m_i ne contiennent pas plus de la moitié d'une relation, entraîne que l'écriture correspondante de e n'est pas

produit libre montre que ce groupe est hyperbolique, et la constante d'hyperbolicité est le maximum de celle de G et celle de A ; quitte à changer celle de G , nous supposons que c'est la plus grande. On choisit $S_1, \dots, S_n$ comme au lemme 3.4, et l'on pose $R_i = x_i S_i$. On vérifie que, comme la constante d'hyperbolicité de A relativement à X est majorée par celle de G , l'ensemble des conjugués de longueur minimum des R_i satisfait la condition de petite simplification $C'(1/10)$.

Il faut noter ici un point important qui m'a été signalé par A. Olshanski et que j'avais omis dans la version initiale de ce texte: dans cette vérification, on utilise de façon essentielle la condition $uS'_i u^{-1} = S'_i$ et $|u| \leq 100\delta \Rightarrow u = 1$, si S'_i est un conjugué de longueur minimale de S_i , qui apparaît aussi dans [O].

Il en résulte que le quotient est hyperbolique. Il s'agit de montrer que A s'y injecte. De fait nous connaissons un algorithme de Dehn pour ce quotient, et un mot réduit au sens de Dehn dans A le reste dans le quotient, puisque dans le nouvel algorithme de Dehn du quotient les relations que l'on ajoute ne contiennent pas de sous-mot en les x_i de longueur plus grande que la moitié de ladite relation. Ainsi si un mot en les x_i peut être raccourci grâce à l'algorithme de Dehn fourni par le théorème 2.1, il pouvait déjà l'être dans A .

Si A n'est plus supposé hyperbolique, mais simplement finiment engendré par des éléments $x_1, \dots, x_n$, on a recours à l'astuce suivante pour montrer que A s'injecte bien dans le quotient défini par la même formule: si l'on choisit $Y = A$, la métrique du mot correspondante devient 1-hyperbolique. On vérifie facilement que dans le paragraphe 2 on ne se sert jamais du fait que le groupe considéré soit finiment engendré; ce fait n'intervient de façon essentielle que pour construire, comme au début de ce paragraphe des familles de relations satisfaisant la condition de petite simplification, ce qui fait intervenir le fait que la boule de rayon bornée contiennent seulement un nombre fini d'éléments; dans le cas où le groupe considéré n'est pas finiment engendré il faut simplement remplacer $\mathcal{R}$ fini par $\mathcal{R}$ borné dans le théorème 2.1 pour garder les mêmes conclusions; évidemment l'algorithme de Dehn construit n'est plus fini, mais simplement borné, ce qui ne suffit plus à impliquer l'hyperbolicité au sens ordinaire. Dans le produit libre $G * A$ la boule de rayon 1 contient tout A qui s'injecte donc dans le quotient d'après 2.1. Le cas où A n'est pas finiment engendré se ramène au précédent grâce au théorème de Higman, Neuman, Neuman (voir [LS]) qui dit que tout groupe dénombrable est un sous-groupe d'un groupe engendré par deux générateurs.

Remarque. Notre démonstration suggère une définition de l'hyperbolicité relative, assez différente de celle proposée par [Gr, 8.6.A]: si G est un groupe et $A_1, A_2, \dots, A_k$ une famille de sous-groupes, on peut dire que G est hyperbolique relativement aux A_i si il existe des éléments $g_1, \dots, g_k$ dans G tels que $\{g_1, \dots, g_k\} \cup A_1 \dots \cup A_k$ engendrent G et que le graphe de Cayley de G relativement à ce système de générateurs (infini en général) soit hyperbolique. Beaucoup de résultats algébriques sur les groupes hyperboliques s'étendent sans peine à ce cas relatif; c'est le cas de la théorie de la petite simplification comme nous venons de le voir.

APPENDICE

Soit G_1 n'importe quel groupe hyperbolique infini, par exemple $\mathbb{Z}$; considérons le produit libre G de G_1 et du groupe cyclique d'ordre deux dont on note t le générateur. Soit f un élément de G_1 d'ordre infini. Pour tout couple d'entiers $n, m, m \geq 2$, f^n et $g_{n,m} = (f^n t)^m$ engendrent un groupe libre. De plus la solution du problème de la conjugaison dans un produit libre montre que le sous-groupe engendré par f^n et $g_{n,m}$ ne contient pas d'élément de longueur inférieure à n qui est donc arbitrairement grand. Cependant si m est impair, $m = 2k + 1$, $g_{n,m} = f^n \cdot (t f^n t^{-1})^k \cdot t \cdot f^n$, et le sous-groupe normal engendré par f^n et $g_{n,m}$ contient t qui est d'ordre 2 et est donc non libre. Ceci est un contre-exemple à une question de [Gr, (5.3.D)] et contredit de plus l'existence d'une constante N telle que pour tout m_1 et $m_2 \geq m$, tout couple f, g le sous groupe normal engendré par f^{m_1} et g^{m_2} soit libre. Je ne connais pas de contre-exemple au problème suivant: existe-t-il une constante N_2 telle que pour tout couple (f, g) d'éléments de G et tout couple k, k' d'entiers, le sous-groupe normal engendré par f^{kN_2} et $g^{k'N_2}$ soit libre? Notons qu'une telle constante existe si l'on suppose le rapport des normes de f et g borné supérieurement et inférieurement par A et $1/A$; dans ce cas, on peut prendre $N_2 = A!N_0$ ou N_0 est la constante trouvée au théorème 3.2.

RÉFÉRENCES

- [B] B. BOWDICH, "Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path metric spaces" dans *Group theory from the geometrical viewpoint*, édité par Ghys, Haefliger et Verjovski, World Scientific, River Edge, N.J., 1991.
- [C] J. CANNON, *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*, Geom. Dedicata **16** (1984), 123–149.
- [Ch] C. CHAMPETIER, *Petite simplification dans les groupes hyperbolique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **3** (1994), 161–221; *Propriétés statistiques des groupes de présentation finie*, à paraître dans Adv. Math.
- [CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT ET A. PAPADOPOULOS, *Notes sur les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Math. **1441**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [GS] S. GERSTEN ET H. SHORT, *Small cancellation groups are automatic*, Inv. Math. **102** (1990), 305–335.
- [GH] E. GHYS ET P. DE LA HARPE, *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [Gr] M. GROMOV, "Hyperbolic groups" in *Essays in Group Theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **8**, Springer-Verlag, New York, 1987, 75–263.
- [HV] P. DE LA HARPE ET A. VALETTE, *La propriété T de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque **175** (1989).
- [LS] R. C. LYNDON ET P. E. SCHUPP, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [O] A. YU. OLSHANSKI, *On residualizing homomorphisms and G-subgroup of hyperbolic groups*, Internat. J. Algebra Comput. **3** (1993), 365–409; *Periodic quotient groups of hyperbolic groups*, Mat. Sb. **182** (1991), 543–567.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR, 7 RUE R. DESCARTES, F-67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE; delzant@math.u-strasbg.fr