



PERGAMON

Topology 40 (2001) 617–629

TOPOLOGY

www.elsevier.com/locate/top

Accessibilité hiérarchique des groupes de présentation finie

Thomas Delzant^{a,*}, Leonid Potyagailo^b

^a*Irma, Université L. Pasteur, 7 rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France*

^b*UFR de Mathématiques, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received 30 June 1998; accepted 20 August 1999

Abstract

We prove that a finitely presented group admits a finite hierarchy obtained by successive splittings along a family of elementary subgroups. © 2001 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

MSC: 20F32; 57M05; 20E08

Keywords: Accessibility; Groups acting on trees

Introduction

Soit V une variété compacte de dimension 3. Une hiérarchie pour V est une suite de variétés – non nécessairement connexes – $V = V_0, V_1, \dots, V_n$ obtenue de la façon suivante: si V est une somme connexe non triviale, V_1 est la réunion disjointe de tous les facteurs de cette somme; sinon $V_1 = V_0$. Un premier résultat, dû à Kneser, montre qu'on peut supposer que V_1 n'est pas une somme connexe non triviale, car toute variété de dimension trois est somme connexe de variétés indécomposables. Supposons alors connue V_i ; la variété V_{i+1} s'obtient en découpant V_i le long d'une surface incompressible, si une telle surface existe. Un fait fondamental en topologie de dimension trois, dû à Haken, est que cette suite s'arrête en un nombre fini d'étapes (voir par exemple [13]). Le but de cet article est de présenter un analogue algébrique de ce résultat. Soit G un groupe de présentation finie, et $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes de G invariante par conjugaison. On peut contruire une suite de (famille de) groupes de la façon suivante. On pose $G = G_0$. Si G ne se décompose pas comme amalgame ou au dessus d'un groupe de la famille $\mathcal{C}$ on s'arrête. Sinon, on décompose $G = G_1 *_C G_2$, ou $G = G_1 *_C$. On recommence cette opération avec les groupes G_1 et G_2 ,

* Corresponding author.

E-mail addresses: delzant@math.u-strasbg.fr (T. Delzant), potyag@euphrosyne.univ-lille1.fr (L. Potyagailo)

en décomposant si cela est possible chacun des facteurs. Le problème de l'accessibilité hiérarchique est de trouver une “stratégie” pour laquelle cette suite d'opérations s'arrête. Si la famille $\mathcal{C}$ est réduite au groupe trivial, et si G est de type fini, le théorème de Grushko montre que décomposer G réduit son rang: cette procédure s'arrête donc. Le cas où $\mathcal{C}$ est la famille des sous-groupes finis de G est déjà beaucoup plus difficile: en général un groupe de type fini n'est pas accessible [8], c'est-à-dire qu'une hiérarchie finie n'existe pas. Cependant une telle hiérarchie existe si le groupe G est de présentation finie [7]. Nous nous proposons dans ce texte d'établir l'existence d'une hiérarchie finie pour une famille $\mathcal{C}$ de sous-groupes satisfaisant une propriété que nous appelons élémentarité, satisfaite par exemple par la famille des sous-groupes élémentaires d'un groupe kleinien, ou la famille des sous-groupes virtuellement cycliques d'un groupe hyperbolique, si le groupe considéré est sans élément d'ordre 2. Notre résultat est effectif, en ce sens qu'il fournit une borne à la longueur de la hiérarchie obtenue en fonction de la complexité d'une présentation du groupe initial.

Notre résultat principal (Théorème 3.2) répond en particulier au problème 10 de la liste de Bestvina [1], formulé par Swarup et Bowditch; ce problème intervient dans l'étude par Bowditch des points de coupure du bord d'un groupe hyperbolique [3], ainsi que dans le problème de la classification des types d'homotopie tangentielle des variétés hyperboliques ouvertes [4]. Signalons aussi que le cas des groupes hyperboliques à deux générateurs a été traité par Kapovich et Weidmann, par une méthode entièrement différente de la notre [10].

1. Groupes élémentaires

1.1. Un groupe G étant fixé, une famille $\mathcal{C}$ de sous-groupes de G est dite *élémentaire* si:

- (a) si $C \in \mathcal{C}$ tout sous-groupe et tout conjugué de C est dans $\mathcal{C}$.
- (b) tout sous-groupe *infini* appartenant à $\mathcal{C}$ est inclus dans un unique sous-groupe infini maximal de $\mathcal{C}$, et toute réunion croissante de groupes finis de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.
- (c) tous sous-groupe de $\mathcal{C}$ satisfait la condition de point fixe suivante: si C agit dans un arbre, C fixe un point dans cet arbre ou dans son bord, ou conserve une paire de points du bord en les permutant éventuellement: autrement dit C est petit [2].
- (d) si $C \in \mathcal{C}$ est infini, maximal dans $\mathcal{C}$, et $gCg^{-1} = C$ alors $g \in C$. En particulier, si $C \in \mathcal{C}$ est maximal et $C' \subset C$, le normalisateur de C' (l'ensemble des g tels que $gC'g^{-1} = C'$) est contenu dans C .

1.2. Exemple. (A) La famille des sous-groupes finis d'ordre inférieur à un nombre donné d'un groupe G .

(B) Si G est un groupe kleinien, et $\mathcal{C}$ est la famille de ses sous-groupes élémentaires (finis, loxodromiques ou paraboliques), alors $\mathcal{C}$ est élémentaire au sens précédent: la condition de point fixe est assurée par un théorème de Tits [12], et par le fait qu'un sous-groupe élémentaire d'un groupe kleinien est virtuellement nilpotent.

(C) Si G est hyperbolique, et $\mathcal{C}$ est l'ensemble de ses sous-groupes finis ou virtuellement cycliques, alors $\mathcal{C}$ est élémentaire au sens précédent.

1.3. Actions diédrales. Soit G un groupe et $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes élémentaires. Si le groupe G agit dans un arbre τ , et si C est un sous-groupe de la famille $\mathcal{C}$, on dit que l'action de C dans τ est *diédrale*, si C conserve une droite de τ en échangeant ses deux extrémités. Notons que si l'action de C est diédrale, il en est de même de l'unique sous-groupe élémentaire maximal de $\mathcal{C}$ contenant C .

Par abus de langage, on dit que $\mathcal{C}$ n'a pas de sous-groupe diédral dans τ si cela ne se produit pour aucun sous-groupe de $\mathcal{C}$.

Le lemme suivant permet de se débarrasser du problème des actions diédrales dans l'étude de l'accessibilité hiérarchique, tout au moins si le groupe étudié n'a pas de 2-torsion.

1.4. Lemme. (a) Soit G un groupe sans élément d'ordre 2, $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes élémentaires, et $G = A *_E B$ ou $G = A *_E$ une décomposition de G en amalgame ou HNN au-dessus d'un groupe élémentaire E . Soit τ l'arbre de Serre associé à cette décomposition. Si agissant dans τ , la famille $\mathcal{C}$ contient un sous-groupe C ayant une action diédrale, alors C est conjugué à l'unique sous-groupe maximal $\hat{E}$ de $\mathcal{C}$ contenant E ; de plus E est normal dans $\hat{E}$ et le quotient est le groupe diédral $Z_2 * Z_2$.

(b) Il existe une autre décomposition de G comme amalgame ou HNN au-dessus d'un sous-groupe élémentaire sans sous-groupe d'action diédrale.

Démonstration. (a) Le groupe C conserve une droite L d'extrémités u, v , en permutant ces deux points. Le quotient de L par l'action de C est un segment de longueur $k \geq 1$, image d'un segment $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ de l'arbre τ . Notons C_0, C_1, C_k les stabilisateurs des points $a_0, a_1, \dots, a_k$ sous l'action de C , et pour chaque i de $\{1, \dots, k\}$, D_i le stabilisateur de l'arête $[a_{i-1}, a_i]$. La théorie de Bass-Serre décrit alors C comme amalgame successif $C = C_0 *_{D_1} C_1 * \dots *_{D_k} C_k$; mais l'action de C étant diédrale, on voit que $D_1 = C_1 = D_2 = \dots = C_{k-1} = D_k$ est un groupe d'indice 2 dans les sous-groupes C_0 et C_k de C ; nous le noterons D .

Quitte à remplacer C par l'un de ses conjugués, on peut supposer que le stabilisateur de l'arête $[a_0, a_1]$ est le groupe E , le stabilisateur de A_0 étant l'un des deux groupes A ou B dans le cas d'un amalgame, A dans le cas d'une HNN-extension. On remarque que D est le noyau de la surjection $C \rightarrow Z_2 * Z_2$, C_0 se projetant sur le premier facteur, C_k sur le second.

Notons que D est un groupe infini: si D était fini, le groupe C_0 serait un groupe fini contenant un sous-groupe d'indice 2 (le groupe D); donc C_0 contiendrait un élément d'ordre pair (un élément dont l'image dans Z_2 est non nul), ce qui contredit l'hypothèse que G n'a pas de 2 torsion. Comme E et C ont un sous-groupe infini en commun le groupe infini D , et comme C est maximal, le groupe E est contenu dans C , ainsi $D = E \cap C = E$, et la partie (a) est démontrée.

(b) Cas d'un amalgame. Supposons que $G = A *_E B$ et que le sous-groupe maximal $\hat{E}$ de $\mathcal{C}$ contenant E agisse diédralement. Grâce à ce qui précède, on peut supposer que $\hat{E} = C_0 *_E C_k$, avec $C_0 \subset A$ et E d'indice 2 dans C_0 et C_k . On a donc $G = A *_E (C_0 *_E B) = A *_E B_1$, avec $E \subset C_0 \subset \hat{E}$. L'arbre de Serre de cette nouvelle décomposition de G n'admet pas de sous-groupe diédral, sinon $\hat{E}$ serait diédral d'après la partie (a) du lemme; mais C_0 n'est pas normal dans $\hat{E}$, car $\hat{E} = C_0 *_E C_k$.

Cas d'une extension HNN. Supposons que $G = A *_E, tEt^{-1} = E'$. Supposons aussi que le sous-groupe maximal $\hat{E}$ de $\mathcal{C}$ contenant E agisse diédralement. Comme ci-dessus, on peut supposer $\hat{E} = C_0 *_E C_k$, avec $C_0 \subset A$ et E d'indice 2 dans C_0 et C_k . On pose $C'_0 = tC_0t^{-1}$, puis $A_1 = A *_E C'_0$, de sorte que l'on a encore $G = A_1 *_E, tC_0t^{-1} = C'_0$, et on conclue comme précédemment.

Remarquons que dans l'argument ci-dessus nous utilisons des “Stalling's folds” de type II.A (amalgame) et II.B (HNN) dans la terminologie de [2].

1.5. Lemme du point fixe équivariant. Soit $(G; \mathcal{C})$ un groupe équipé d'une famille de sous-groupes élémentaires. On suppose que G agit dans un arbre τ , et que $\mathcal{C}$ n'y a pas de groupe diédral. Dans ce cas, le second axiome montre que tout sous-groupe élémentaire C de $\mathcal{C}$ fixe un point dans $\tau \cup \partial\tau$; mais sous ces hypothèses, on a mieux:

1.6. Lemme. Si l'action de $(G; \mathcal{C})$ dans τ n'a pas de sous-groupe diédral, il existe une application $\rho: \mathcal{C} \rightarrow \tau \cup \partial\tau$ telle que:

- $\forall C \in \mathcal{C}$, C fixe $\rho(C)$.
- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \cap C_2$ est infini, $\rho(C_1) = \rho(C_2)$
- pour tout groupe C maximal dans $\mathcal{C}$, $\rho(gCg^{-1}) = g.\rho(C)$

Démonstration. Il suffit de définir ρ sur les groupes finis et infinis maximaux: si un groupe C n'est pas maximal mais infini, on posera $\rho(C) = \rho(\hat{C})$, où $\hat{C}$ est l'unique sous-groupe élémentaire maximal contenant C . Les groupes finis ou infinis maximaux fixent un point dans $\tau \cup \partial\tau$ par la propriété (c); pour pouvoir choisir ce point fixe de façon équivariante, il suffit de le faire sur une famille de sous-groupes représentants les classes de conjugaison des groupes finis de $\mathcal{C}$ et des sous-groupes maximaux; ce choix d'un point fixe définit une application ρ dont l'équivariance résulte alors de la propriété (d) des groupes maximaux de $\mathcal{C}$. $\square$

1.7. Stabilisateurs des points à l'infini. Soit $(G; \mathcal{C})$ un groupe équipé d'une famille de sous-groupes élémentaires. On suppose que G opère dans un arbre τ à stabilisateurs d'arêtes élémentaires. On a alors le lemme suivant.

1.8. Lemme. Soit $\omega \in \partial\tau$ un point du bord de τ , et G_ω son stabilisateur sous l'action de G . On a l'alternative suivante: soit G_ω est fini, soit il contient $\mathbf{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini, soit il est élémentaire.

Démonstration. Rappelons qu'un élément de G_ω est elliptique si il fixe un point p_0 de τ : il fixe alors une demi-droite $[p_0, \omega[$. Ainsi, le produit de deux éléments elliptiques de G_ω est encore elliptique. Soit $E_\omega \subset G_\omega$ le sous-groupe des éléments elliptiques. Chaque sous-groupe de type fini de E_ω fixe une demi-droite; il est donc contenu dans le stabilisateur d'une arête, et est élémentaire. Donc E_ω est une réunion croissante de sous-groupes élémentaires et est donc élémentaire.

Or E_ω est normal dans G_ω le quotient étant $\mathbf{Z}$ ou $E_\omega = G_\omega$ (la longueur de translation orientée définit un morphisme $G \rightarrow \mathbf{Z}$). Si $E_\omega = G_\omega$, on a terminé. Si E_ω est fini, G_ω contient $\mathbf{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini ou est fini. Si E_ω est infini élémentaire et $G_\omega/E_\omega = \mathbf{Z}$, soit $t \in G_\omega$ un élément qui se projette sur générateur du quotient; cet élément t normalise E_ω . Comme E_ω est infini, t est contenu dans l'unique sous-groupe élémentaire maximal contenant E_ω . $\square$

Plaçons nous dans les mêmes hypothèses que ci-dessus; on a aussi.

1.9. Proposition. Soit C_1, C_2 deux sous-groupes élémentaires infinis fixant un point $\omega \in \partial\tau$. Alors C_1 et C_2 sont contenus dans un même sous groupe élémentaire.

Démonstration. En effet, le Lemme 1.8 montre que soit G_ω est élémentaire auquel cas il n'y a rien à montrer, soit il contient $\mathbf{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini, auquel cas C_1 et C_2 sont commensurables et contiennent un sous-groupe élémentaire infini en commun. $\square$

2. Graphes de groupes

2.1. Une *décomposition* d'un groupe en graphe de groupes est la donnée d'un graphe de groupes, $X_* = (X, (G_s)_{s \in X^0}, (C_y)_{y \in X^1})$, et d'un isomorphisme $G \mapsto \pi_1(X_*)$ ou π_1 est le groupe fondamental au sens de Serre de X [11].

2.2. Une arête y d'un tel graphe est dite *triviale* si ses deux extrémités sont distinctes, et si le stabilisateur C_y de y est égal à celui de l'une de ses deux extrémités.

2.3. Une décomposition est dite *non triviale* si elle n'a aucune arête triviale.

2.4. Un groupe est dit *indécomposable* au dessus d'un groupe élémentaire si il n'admet pas de décomposition non triviale telle que les C_y soient élémentaires pour toute arête y .

2.5. Un *morphisme* de graphes de groupes: $\phi: X_* = (X, G_s, C_y) \mapsto Y_* = (Y, H_t, D_z)$ est la donnée d'un morphisme des groupes fondamentaux correspondants, ϕ , et d'une application simpliciale des arbres revêtements universels $\tilde{X}_* \mapsto \tilde{Y}_*$ ϕ -équivariante.

2.6. Une *résolution* d'un graphe $X_* = (X, G_s, C_y)$ est un graphe $\hat{X}_* = (\hat{X}, G_{\hat{s}}, C_{\hat{y}})$, muni d'un morphisme $\phi: \hat{X}_* \mapsto X_*$ induisant un *isomorphisme* des groupes fondamentaux. De façon équivalente, c'est la donnée d'une application simpliciale G -équivariante des revêtements universels. Si $\phi: \hat{X}_* \mapsto X_*$ est une résolution, ϕ identifie les groupes fondamentaux. Identifiant les groupes $G_{\hat{s}}$ et $C_{\hat{y}}$ et leurs images par ϕ , nous considérerons les $G_{\hat{s}}$ et $C_{\hat{y}}$ comme sous-groupes des G_s et C_y .

2.7. Lemme. Soit X_* un graphe de groupes, $\hat{X}_*$ une résolution de X_* . Pour toute arête $\hat{y}$ de $\hat{X}$, il existe une arête y de X telle que $C_{\hat{y}} \subset C_y$, à conjugaison près.

Il suffit de prendre $\phi(\hat{y})$.

2.8. Corollaire. Si $\hat{X}$ est une résolution d'une décomposition X de G à stabilisateurs d'arêtes élémentaires, $\hat{X}$ est aussi à stabilisateurs d'arêtes élémentaires.

Démonstration. Tout sous-groupe d'un groupe élémentaire est élémentaire. $\square$

3. Hiérarchie

3.1. Une *hiérarchie*, pour le groupe G est une suite de groupes obtenue en prenant une décomposition non triviale X_* de G au dessus de groupes élémentaires, puis une décomposition non triviale des stabilisateurs de sommets décomposable de X_* , et en recommençant *un nombre fini de fois* jusqu'à ce que tous les groupes obtenus soient indécomposables au dessus d'un groupe élémentaire ou soient élémentaires. Cette définition *dépend* de la famille $\mathcal{C}$.

3.2. Théorème. *Si G est de présentation finie, sans 2-torsion, et $\mathcal{C}$ une famille de groupes élémentaires, alors G admet une hiérarchie.*

La démonstration de ce théorème repose sur une certaine complexité, variante de l'invariant T défini et étudié dans [5].

3.3. Définition de la complexité. Soit G un groupe de présentation finie. Réalisons G comme groupe fondamental d'un orbifold simplicial (au sens de Gromov, voir [9]) Π de dimension deux, developpable tel que les stabilisateurs de sommets de Π sont élémentaires: il existe un CW-complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 noté P (c'est le *revêtement universel* de Π au sens des orbifolds) muni d'une action simpliciale *sans inversion* de G telle que les stabilisateurs de sommets (et donc d'arêtes et de faces) de P soient élémentaires, et telle que le quotient (P/G) s'identifie à Π .

On note $T(\Pi)$ – ou $T_{\mathcal{C}}(\Pi)$ quand l'on veut préciser la famille $\mathcal{C}$ – le nombre de faces de dimension 2 de Π . On définit alors:

$$c(\Pi) = (T(\Pi), b_1(\Pi))$$

où $b_1(\Pi)$ est le premier nombre de Betti de l'espace topologique sous-jacent à Π .

On pose enfin:

$$T(G) = \inf(T(\Pi)) \quad \text{avec} \quad \pi_1^{orb}(\Pi) = G$$

et

$$c(G) = \inf(c(\Pi)) \quad \text{avec} \quad \pi_1^{orb}(\Pi) = G.$$

L'ordre choisi étant l'ordre lexicographique.

3.4. Proposition (Exemple fondamental). *On a $c(G) = (0,0)$ si et seulement si G est un arbre de groupes à stabilisateurs de sommets élémentaires et stabilisateurs d'arêtes finis.*

Démonstration. Un 2-complexe simplement connexe sans faces est un arbre. La théorie de Bass-Serre décrit alors G comme groupe fondamental d'un graphe de groupes à stabilisateurs de sommets et d'arêtes élémentaires. Soit y une arête de stabilisateur infini. Notons que les deux extrémités s_1 et s_2 de y sont distinctes car ce graphe est un arbre. Soient E_1 et E_2 leurs stabilisateurs; ces groupes sont élémentaires, donc sont contenus dans un même sous-groupe élémentaire maximal E de $\mathcal{C}$. Celui-ci contient donc $E_1 *_c E_2$. On peut décrire G comme groupe fondamental d'un graphe de groupes élémentaires ayant une arête de moins en remplaçant dans le

graphe dont on est parti les deux sommets s_1, s_2 et l'arête y par un seul sommet de stabilisateur $E_1 *_C E_2$.

Remarque. Ceci ne peut en fait se produire que si $C = E_1$ ou E_2 ou si C est d'indice 2 dans E_1 et E_2 , car sinon, E contenant $E_1 *_C E_2$ contiendrait un groupe libre à deux générateurs.

Soit G un groupe de présentation finie opérant dans un polyèdre simplement connexe P à stabilisateurs d'arêtes dans une famille de sous-groupes élémentaires $\mathcal{C}$. Pour une raison technique qui apparaîtra dans le 4-ème paragraphe, il nous faut ramener l'étude du problème d'accessibilité au cas où le polyèdre étudié n'a pas de sommet séparant en plusieurs composantes connexes.

3.5. Lemme. *Supposons que le 0-squelette de P admette un sommet séparant $s \in P^0$. Alors G est le groupe fondamental d'un graphe de groupes $G = \pi_1(X, G_s, C_y)$ à stabilisateurs d'arêtes élémentaires, tel que les G_s soient des groupes fondamentaux d'orbèdre Π_s vérifiant $\sum_s (c(\Pi_s)) \leq c(P/G)$, mais dont les revêtements universels P_s n'ont pas de sommets séparants.*

Démonstration. Soit $s_1, \dots, s_n$ des représentants des classes modulo G des sommets séparants de P . Notons I l'ensemble des composantes connexes de $P \setminus \bigcup Gs_i$ modulo l'action de G . Considérons des composantes P_i , $i \in I$ représentant les éléments de I . Notons que les polyèdres P_i sont simplement connexes (Van-Kampen), et considérons, pour $i \in I$, les groupes $G_i = \{g \in G / gP_i = P_i\}$. Remarquons que $\sum T(P_i/G_i) = T(P/G)$. Soit $X = I \cup \{s_1, \dots, s_n\}$. Notons G_{s_i} le stabilisateur de s_i , et pour chaque s_i choisissons, dans le link $L(s_i)$ de s_i , une famille de points $y_{s_i, \alpha} \in P$ représentant les orbites $L(s_i)/G_{s_i}$ des G_{s_i} dans $L(s_i)$. On peut considérer ces points comme les arêtes d'un graphe dont l'ensemble des sommets est X , en disant qu'elles relient s_i au point représentant la composante connexe de $y_{s_i, \alpha}$. Si l'on note $C_{y_{s_i, \alpha}}$ l'ensemble des $g \in G_{s_i}$ qui conserve la composante connexe du link de s_i contenant $y_{s_i, \alpha}$, on voit que X devient un graphe de groupes de groupe fondamental G satisfaisant les propriétés requises par le lemme.

3.6. Théorème. *Soit $G = \pi_1(\Pi)$ où Π est un orbèdre à stabilisateurs de sommets dans $\mathcal{C}$. Supposons que le revêtement universel P de Π n'ait pas de points de coupure, que Π soit de complexité minimale parmi les orbèdres représentant Π . Soit $G = \pi_1(X_*)$ une décomposition non triviale de G , avec $X_* = (X, G_s, C_y)$, où les stabilisateurs d'arêtes C_y sont élémentaires. Supposons que $\mathcal{C}$ n'admette pas de sous-groupe d'action diédrale dans l'arbre de Bass Serre de cette décomposition. Alors il existe une résolution $\hat{X}_* = (\hat{X}, G_{\hat{s}}, C_{\hat{y}})$ de X_* telle que $\sum_{\hat{s}} T(G_{\hat{s}}) \leq T(G)$ et $\sup_{\hat{s}} (c(G_{\hat{s}})) < c(G)$.*

3.7. Réduction du Théorème 3.2 au Théorème 3.6. Soit G un groupe de présentation finie et $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes élémentaires. Nous montrons 3.2 par récurrence sur la complexité. Si G ne se scinde pas au dessus d'un groupe élémentaire, il n'y a rien à montrer. Sinon, compte tenu du Lemme 3.5, on peut supposer que G est le groupe fondamental d'un orbèdre Π tel qu'aucun sommet du revêtement universel P de Π ne soit séparant, et de complexité minimale parmi les orbèdres représentant G . Compte-tenu de la partie (b) du Lemme 1.4, on peut aussi supposer que G agit dans un arbre τ à stabilisateurs d'arêtes élémentaires, et que $\mathcal{C}$ n'y admet pas d'action

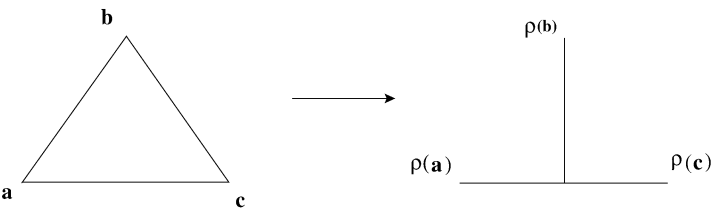
diédrale. Le Théorème 3.6 montre alors que G se scinde en un graphe de groupes à stabilisateurs d'arêtes élémentaires et stabilisateurs de sommets plus simples au sens de la complexité c .

4. Démonstration du Théorème 3.6

La démonstration – topologique – de ce résultat est illustrée sur les Figs. 1 et 2.

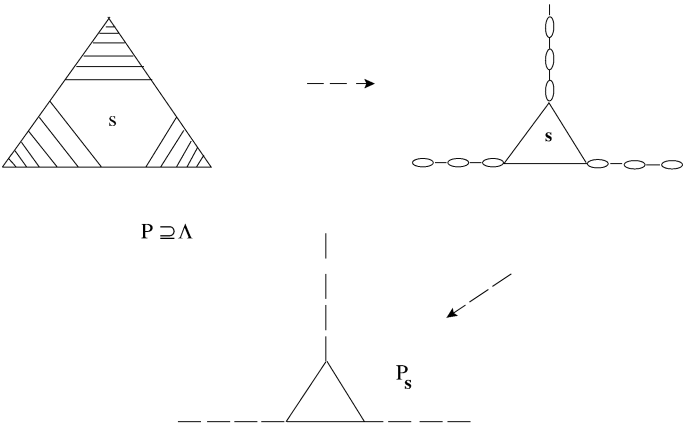
On note τ l'arbre de Bass-Serre revêtement universel de X , et on fixe un G -polygône simplement connexe P dont les faces sont des triangles, les stabilisateurs de sommets dans $\mathcal{C}$; on suppose que P réalise $c(G)$ dans ce sens que $c(P/G) = c(G)$.

4.1. 1ère étape: définition de ρ . On choisit une application équivariante $\rho: \mathcal{C} \mapsto \tau \cup \partial \tau$ comme au lemme du point fixe équivariant 1.6. Pour chaque sommet de $\Pi = P/G$ on choisit un sommet dans



Dessin 1

Fig. 1.



Dessin 2

Fig. 2.

P le représentant. On note $\Sigma = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ ces sommets particuliers. Leurs stabilisateurs sont des groupes élémentaires C_i . Pour ces sommets, on pose $\rho(p_i) = \rho(C_i)$, puis on étend ρ de façon équivariante à tout P^0 , ce qui est loisible car le stabilisateur de p_i stabilise $\rho(C_i)$.

Soit y une arête de P^1 , p et q ses deux extrémités, C_p et C_q leurs stabilisateurs. Distinguons deux cas:

(a) *son stabilisateur est infini*: Posons $p = g.p_i$ et $q = h.p_j$, de sorte que $C_p = gC_{p_i}g^{-1}$ et $C_q = hC_{p_j}h^{-1}$. Donc C_{p_i} et $g^{-1}hC_{p_j}h^{-1}g$ sont contenus dans un même sous groupe maximal de $\mathcal{C}$, de sorte que $\rho(p_i) = g^{-1}h\rho(p_j)$. Donc $\rho(p) = g.\rho(p_i) = \rho(q)$. Dans ce cas on pose $\rho(y) = \rho(p)$.

(b) *son stabilisateur est fini*: C'est un groupe fini qui agit sur l'axe $]\rho(p), \rho(q)[$ en conservant ses extrémités: il agit donc par l'identité sur cet axe et sur l'arête y . On choisit un homéomorphisme ρ de y sur cet axe. Comme le groupe agit sans inversion sur P , il est C_y équivariant.

Ceci permet de définir – dans les cas (a) et (b) – l'application ρ sur $\bigcup_{g \in G} gy$ de façon équivariante en posant $\rho(g.y) = g.\rho(y)$. On procède ainsi pour toutes les classes d'arêtes modulo G .

Remarque. Dans le cas (a) on a utilisé l'axiome (b) de la propriété d'élémentarité: si les points fixes de C_p et de C_q sont différents dans $\partial\tau$ l'application $\rho|_y : y \mapsto]\rho(p), \rho(q)[$ n'est pas équivariante en général, car à la source C_y stabilise l'arête y alors que C_y peut agir par translation sur l'axe $]\rho(p), \rho(q)[$.

A priori, l'image par l'application ρ d'une arête de P pourrait être un point à l'infini. Le lemme suivant montre que, sous réserve que $\Pi = P/G$ soit de complexité minimale, il n'en est rien. Dans l'énoncé ci-dessous, on garde les notations déjà introduites dans ce paragraphe.

4.2. Proposition. *Soit y une arête de P de sommets s, s' . Si $\rho(s) = \rho(s') \in \partial\tau$, le polyèdre $\Pi = P/G$ n'est pas de complexité minimale.*

Démonstration. Notons que dans ce cas, les stabilisateurs de s et s' sont infinis, et fixent le même point à l'infini dans τ ; ainsi, on peut appliquer la Proposition 1.9, et ces deux stabilisateurs C, C' sont contenus dans un même sous-groupe élémentaire C'' . Notons P' le polyèdre obtenu en écrasant l'arête y en un point, ainsi que toutes les arêtes de son orbite; notons S l'image de s, s' ou y dans cet écrasement. Nous distinguons deux cas suivant que s et s' sont – ou non – dans la même G -orbite.

(a) Le stabilisateur de S est le sous-groupe C'' de G engendré par C, C' , et est donc élémentaire. Notons que P' est simplement connexe, car l'application d'écrasement $P \mapsto P'$ est à fibres connexes, et que ses stabilisateurs de sommets sont élémentaires. Chaque triangle de P donne naissance soit à un triangle de P' soit à un digone, si celui-ci était adjacent à une arête de l'orbite de y . Si D est un tel digone, les stabilisateurs de ses deux arêtes sont contenus dans un même sous-groupe élémentaire (le stabilisateur d'un sommet).

(b) Supposons que s et s' sont dans la même orbite. Soit $gs = s'$. Alors le stabilisateur de $S = (s = s')$ est le sous-groupe de G engendré par C et g . Comme $gCg^{-1} = C'$ et que C, C' sont contenus dans un même sous-groupe élémentaire maximal, g normalise ce groupe, et le sous-groupe engendré par g, C est élémentaire.

Le polyèdre obtenu $\Pi' = P'/G$ n'a maintenant que des faces triangulaires ou des digones, et ses stabilisateurs de sommets sont élémentaires. Notons que le nombre de faces triangulaires modulo

G de Π' est strictement inférieur à celui de Π , car l'arête y est adjacente à au moins un triangle de P (sinon ses deux sommets seraient des points de coupure). Pour obtenir un polyèdre de complexité strictement inférieur à celle de Π , il nous faut maintenant supprimer les digones de P' .

Soit D un tel digone, s_1, s_2 ses deux sommets, y_1, y_2 ses deux arêtes. Distinguons encore deux cas, suivant qu'il existe un élément g tel que $gy_1 = y_2$, et g permute s_1, s_2 ou non.

Dans le second cas, on note P'' le polyèdre obtenu en supprimant de P' le digone D ainsi que tous ses translatés, en identifiant y_1 à y_2 , ainsi que gy_1 à gy_2 pour tout g de G . Comme on n'a pas identifié deux sommets distincts de P' les stabilisateurs des sommets de P'' sont encore élémentaires.

Dans le premier cas, on voit que y_1 et y_2 sont dans la même G -orbite, $y_2 = gy_1$ où g permute s_1 et s_2 . Notons que g^2 fixe s_1 ; comme G n'a pas d'élément d'ordre 2, cela force le stabilisateur de s_1 , et donc celui de s_2 , à être infini. Puisque g^2 appartient aux stabilisateurs de s_1 et de s_2 et est d'ordre infini, on en déduit que ces deux groupes sont contenus dans le même sous groupe élémentaire maximal, et que g le normalise. Ainsi, g et le stabilisateur de s_1 sont contenus dans un même sous-groupe élémentaire maximal: ils engendrent un sous-groupe élémentaire C . Notons alors P'' le polyèdre obtenu en supprimant le digone D ainsi que tous ses translatés, en écrasant y_1, y_2 en un sommet σ , et en étendant cette opération de façon équivariante. Le stabilisateur de σ est le groupe C défini ci-dessus et est donc élémentaire.

En répétant successivement ces opérations, on voit que l'on peut supprimer tous les digones de P' , en diminuant la complexité de P/G . $\square$

4.3. 2ème étape: définition de Λ . Si F est une face de P , de bord $\partial F = y \cup z \cup t$, on définit $\Lambda \cap \partial F$ comme étant l'ensemble des points dont l'image par ρ est le milieu d'une arête de τ . Chaque point de ∂F , sauf les trois points correspondant au centre, a un vis-à-vis: c'est le point d'un autre côté de F ayant même image par ρ : voir le dessin 1. Pour obtenir Λ on joint dans F chaque point de $\Lambda \cap \partial F$ à son vis-à-vis par un segment affine. Notons que Λ est G -équivariante, car l'application ρ l'est.

Nous regardons Λ comme une *lamination* définie sur P de façon équivariante.

Rappelons que P est muni de sa topologie de CW complexe. Notons le lemme:

4.4. Lemme. *Les composantes connexes de Λ rencontrent chaque simplexe de P en au plus un segment; en particulier celles-ci sont fermées dans P et y admettent un voisinage tubulaire co-orienté. Ces composantes connexes séparent P en exactement deux composantes.*

Démonstration. En effet on peut prolonger l'application $\rho: P \rightarrow \tau \cup \partial\tau$ en une application équivariante de tout P de sorte que les images réciproques des milieux des arêtes soient les composantes de Λ dans chaque face de P . Si l est une composante connexe de Λ , l rencontre chaque simplexe en un segment au plus. On peut mettre sur P , sans en changer la topologie, une structure de complexe telle que l en soit un sous complexe fermé. De plus, l sépare localement ce complexe. Comme P est simplement connexe, l sépare P . $\square$

4.5. 3-ème étape: définition de $\hat{X}_*$ et $\hat{\tau}$. Rappelons que par hypothèse les sommets de P ne sont pas séparants. Notons P_∞^0 l'ensemble des sommets de P dont l'image par ρ est dans $\partial\tau$, et posons $P^* = P \setminus P_\infty^0$. Définissons alors un graphe abstrait $\hat{\tau}$ dont les sommets sont les composantes connexes de $P^* \setminus \Lambda$, et dont les arêtes sont les composantes connexes de Λ . Les relations d'incidences sont évidentes.

4.6. Lemme. $\hat{\tau}$ est un arbre.

Démonstration. Ce résultat est essentiellement celui de [6, Proposition VI.4.3, p. 230]. D’après le Lemme 4.4 chaque composante de Λ sépare P en deux parties. Ainsi chaque arête du graphe $\hat{\tau}$ est séparante, et $\hat{\tau}$ est donc un arbre, à condition de vérifier que $\hat{\tau}$ est connexe.

Rappelons (Proposition 4.2) qu’aucune arête de P ne peut être envoyée dans $\partial\tau$ par ρ .

De plus, par hypothèse, $P \setminus P^0$ est connexe. Comme $\rho(P^1 \setminus P^0) \cap \partial\tau = \emptyset$, l’arbre $\hat{\tau}$ est un quotient de $P \setminus P^0$ et est connexe.

On définit alors le graphe de groupe $\hat{X}$ comme quotient de $\hat{\tau}$ par l’action de G .

4.7. Remarque. Si $\hat{s}$ (resp. y) est un sommet (resp. une arête) de $\hat{\tau}$, et Q_s (resp. A_y) la composante de $P^* \setminus \Lambda$ (resp. Λ) correspondante, son stabilisateur G_s est l’ensemble $\{g \in G \mid g.Q_s = Q_s\}$, (resp. $\{g \in G \mid g.A_y = A_y\}$).

Notons que les sommets de $\hat{\tau}$ ont naturellement une image dans τ et que deux sommets voisins ont une image voisine, d’où une application G -équivariante de $\hat{\tau}$ dans τ : ainsi $\hat{X}$ est une résolution de X .

4.8. 4-ème étape: définition de P_s , vérification des propriétés. Soit $\hat{s}$ un sommet de $\hat{\tau}$, autrement dit une composante connexe Q_s de $P^* \setminus \Lambda$. On définit un CW-complexe simplicial simplement connexe P_s en deux étapes:

- On construit un polyèdre $\tilde{P}_s$ dont les sommets sont les composantes connexes de Λ ainsi que les sommets de P dont l’image par ρ est dans τ .
- les arêtes de $\tilde{P}_s$ sont les composantes connexes de $P^1 \setminus \Lambda$; on a une relation d’incidence évidente.
- les faces de $\tilde{P}_s$ sont de deux types:
 - des triangles correspondant au centre des faces de P contenues dans Q_s ,
 - des digones correspondants aux cotés: voir le dessin 2.

On définit alors P_s en supprimant les digones de $\tilde{P}_s$ et en identifiant leurs faces comme à la Proposition 4.2.

4.9. Lemme. Le complexe simplicial P_s est simplement connexe.

Démonstration. Le Lemme 4.4 permet d’appliquer le théorème de Van-Kampen au complexe P : le groupe fondamental d’une composante connexe Q_s est engendré par les images des groupes fondamentaux des composantes connexes de Λ formant son bord. Mais P_s s’obtient à partir de Q_s en deux étapes: d’abord on écrase les composantes du bord, ce qui tue le groupe fondamental, puis on supprime des digones ce qui ne le change pas. Donc son groupe fondamental est trivial. $\square$

Enfin, si G_s est le stabilisateur de la composante connexe définie par le point s , on pose:

$$\Pi_s = P_s / G_s.$$

Cette définition ne dépend pas du choix du relevé de s dans $\hat{\tau}$. Par construction:

$$\sum_{s \in \hat{X}^0} T(\Pi_s) = T(G). \quad (*)$$

4.10. Lemme. $b_1(\Pi) \geq \sum_{s \in \hat{X}^0} b_1(\Pi_s) + b_1(\hat{X})$.

Démonstration. Notons que pour tout sommet s de $\hat{X}$, les sommets de Π_s sont des arêtes du graphe $\hat{X}$. On peut donc former un polyèdre Π' en recollant la réunion disjointes des Π_s selon les indications données par le graphe $\hat{X}$: on identifie le sommet σ de Π_s avec le sommet σ' de $\Pi_{s'}$ si $[\sigma, \sigma']$ est une arête de $\hat{X}$, autrement dit si ces deux sommets sont dans la même composante connexe de Λ , modulo l'action de G . Par construction, Π' s'obtient en écrasant des composantes connexes de Λ en un point, puis des digones en un segment. Cette application d'écrasement $q: \Pi \rightarrow \Pi'$ est à fibre connexes et relève les chemins. Donc $b_1(\Pi') \leq b_1(\Pi)$. Ainsi, comme Π' s'obtient à partir de $\hat{X}$ en remplaçant ses sommets par les polyèdres Π_s , on a $b_1(\Pi') = \sum_{s \in \hat{X}^0} b_1(\Pi_s) + b_1(\hat{X})$.

D'où l'on tire l'inégalité:

$$\sum_{s \in \hat{X}^0} b_1(\Pi_s) + b_1(\hat{X}) \leq b_1(\Pi). \quad (**)$$

4.11. Lemme. Soit s un sommet de $\hat{X}$ tel que $c(\Pi_s) = (0,0)$.

- (i) s est de valence 1 ou 2.
- (ii) si s est de valence 1 et y est son arête adjacente, $\hat{G}_s = \hat{C}_y$.
- (iii) si s est de valence 2 les deux arêtes y_1, y_2 adjacentes sont distinctes et $\hat{C}_{y_i} = \hat{G}_s$.

Démonstration. Dans ce cas, la composante connexe de $P \setminus \Lambda$ correspondant à s ne contient pas de triangle; en suivant l'holonomie de Λ , on voit qu'elle est de la forme $l \times [0,1]$, où $l \times 0$ et $l \times 1$ sont deux feuilles de Λ et $l \times]0,1[$ ne contient pas de feuille de Λ . Il en résulte que P_s est réduit à 2 sommets et une arête sur lequel G_s n'agit pas, d'où le résultat. $\square$

4.12. Conclusion. Montrons que le graphe de groupes $\hat{X}_*$ convient pour l'énoncé du Théorème 3.6. Grâce à (**), on voit que si $\sup_s (c(G_s)) = c(G)$, alors le graphe $\hat{X}$ sous-jacent à $\hat{X}_*$ est un arbre, et pour tous les sommets sauf l'un, soit $\hat{s}_0$, on a $c(\Pi_{\hat{s}}) = (0,0)$. Grâce au Lemme 4.11 et aux formules (*) et (**), on en déduit que $G = G_{\hat{s}_0}$. Comme $\hat{X}_*$ est une résolution de X_* , on en déduit que $G = G_{s_0}$ pour le sommet s_0 de τ image de $\hat{s}_0$ par l'application $\hat{\tau} \mapsto \tau$. Ainsi, l'arbre τ aurait un point fixe global ce qui signifie que la décomposition donnée par X_* est triviale.

Remerciements

Nous remercions M. Bestvina, L. Mosher et M. Sageev qui nous ont signalé des erreurs importantes dans les premières versions de ce texte concernant le problème des actions diédrales et

celui de la connexité de l'arbre $\hat{\tau}$. Nous remercions aussi I. Belegradek pour nous avoir communiqué son article [4] ainsi que pour ses nombreuses questions et encouragements.

References

- [1] M. Bestvina, The Geometric Group Theory Problem List, <ftp://ftp.math.utah.edu/u/ma/bestvina/math/questions.dvi>.
- [2] M. Bestvina, M. Feighn, Bounding the complexity of simplicial group actions on trees, *Invent. Math.* 103 (1991) 449–469.
- [3] B. Bowditch, Boundary of strongly accessible groups, preprint 1997.
- [4] I. Belegradek, Counting negatively curved manifolds up to tangential homotopy equivalence, *J. Differential Geom.* 50 (1) (1998) 59–88.
- [5] T. Delzant, Décomposition d'un groupe en produit libre ou somme amalgamée, *J. Reine Angew. Math.* 470 (1996) 153–180.
- [6] W. Dicks, M. Dunwoody, Groups Acting on Graphs, Cambridge Studies in Adv. Math., Vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [7] M.J. Dunwoody, The accessibility of finitely presented groups, *Invent. Math.* 81 (3) (1985) 449–457.
- [8] M.J. Dunwoody, An inaccessible group, *Geometric Group Theory*, Vol. 1, (Sussex, 1991), pp. 75–78, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 181, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [9] A. Haefliger, Complex of groups and orbihedra, in: E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovski (Eds.), *Group Theory from a Geometric Point of View*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [10] I. Kapovich, R. Weidmann, On the structure of 2-generated hyperbolic groups, preprint, 1998.
- [11] J.-P. Serre, SL_2 , arbres et amalgames, *Astérisque* n. 46, 1977.
- [12] J. Tits, A “theorem of Lie-Kolchin” for trees, *Contributions to Algebra* (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), Academic Press, New York, 1977, pp. 377–388.
- [13] F. Waldhausen, Recent results on sufficiently large 3-manifolds, *Proceedings of Symposium in Pure Math.*, Vol. 32, AMS, Providence, RI, 1978, pp. 21–37.