

L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique

T. DELZANT

Introduction

Soit G un groupe de présentation finie et Γ un groupe hyperbolique au sens de M. Gromov [Gr2]; le but de cet article est de décrire l'ensemble des images de G dans Γ .

Le groupe Γ est équipé d'un système de générateurs, partant de la *métrique du mot*, notée $|g|$. On note $T(G)$ le nombre minimum de relations d'une présentation triangulaire de G , c'est-à-dire d'une présentation dont toutes les relations sont de longueur deux ou trois; si G est défini par des relations arbitraires, un argument de triangulation montre que $T(G)$ est inférieur à la somme des longueurs de ces relations.

THÉORÈME. *Soit $h : G \mapsto \Gamma$ un homomorphisme. On a l'alternative suivante:*

Soit $h(G)$ est conjugué à un sous-groupe de Γ engendré par des éléments $a_1, \dots, a_k$ dont la longueur vérifie $\sup_i |a_i| < \varepsilon_\Gamma T^2(G)$. (ε_Γ est une constante ne dépendant que de Γ).

*Soit h se factorise à travers une somme amalgamée ou une extension HNN au-dessus d'un groupe fini: il existe deux groupes A et B , un groupes fini F (distinct de A et B dans le cas d'une somme amalgamée), une application surjective $s : G \mapsto A *_F B$ (ou $s : G \mapsto A *_F$) et un homomorphisme $h' : A *_F B \mapsto \Gamma$, (ou $h' : A *_F \mapsto \Gamma$), tels que $h = h' \circ s$.*

Rappelons qu'on dit d'un groupe G qu'il satisfait la propriété FA de Serre si toute action de G dans un arbre simplicial fixe un point; un quotient d'un tel groupe ne peut être un amalgame ou une extension HNN [Se]. Comme Γ n'a qu'un nombre fini d'éléments de longueur donnée, on obtient:

COROLLAIRE. a) Soit G un groupe de présentation finie qui n'est ni une somme amalgamée ni une HNN-extension au dessus d'un groupe fini. Si un groupe Γ est hyperbolique il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à G .

b) Si G est un groupe de présentation finie satisfaisant la propriété FA et Γ un groupe hyperbolique, Γ ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de quotients de G .

Remarques. L'énoncé de la partie a) du corollaire dans le cas où G est sans torsion est dû à M. Gromov ([Gr1]), théorème 6.7, [Gr2] théorème 5.3.C'). Une démonstration en a été proposée par E. Rips et Z. Sela ([R-S1]). Dans le cas où Γ est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte, et G celui d'une surface, ce résultat est dû à W. Thurston ([Th]) pour h injective, et à A. Reznikov pour h quelconque ([R]). Pour les groupes de surface, les démonstrations de [Th], [Gr1, 2] (avec j injective) et [R] (h quelconque) sont respectivement basées sur l'existence de surfaces plissées, minimales et d'applications harmoniques. La démonstration de [R-S1] s'appuie sur la théorie de E. Rips des groupes opérant dans les arbres réels. Le cas des groupes ayant de la torsion nécessite une approche nouvelle.

On peut interpréter la partie a) du corollaire en terme de l'espace des monomorphismes modulo conjugaison au but et automorphisme à la source : si cet espace est infini, alors G se scinde comme somme amalgamée ou HNN extension au dessus d'un groupe fini. Dans le cas contraire, on a une borne effective sur son cardinal. On précisera cela en III.2.

Plan de la démonstration. Soit G un groupe de présentation finie; choisissons une présentation de G . La donnée d'un homomorphisme h de G dans Γ est la donnée d'une solution à un système d'équations dans Γ . On interprète (paragraphe I) les résultats de [R-S2] en termes topologiques. La géométrie hyperbolique de Γ permet de construire (paragraphe II) sur le polyèdre de van Kampen de G (associé à cette présentation) un feuilletage mesuré λ (plus précisément une lamination) dont l'holonomie est bien comprise: si on réalise l'homomorphisme h par une application continue de ce polyèdre dans H/Γ , où H désigne un polyèdre de dimension deux simplement connexe sur lequel Γ agit librement, l'image par h d'une courbe contenue dans une feuille de λ mais ne rencontrant pas de singularités est homotope, à extrémités fixées, à courbe de H/Γ de longueur uniformément bornée. Un argument topologique, objet du dernier paragraphe, permet alors de conclure. En appendice est détaillé, sur la suggestion du rapporteur, le calcul d'un exemple simple montrant l'intérêt d'introduire le feuilletage par tranche construit au paragraphe I et II: cet exemple contient l'idée de la démonstration du théorème.

I. Le feuilletage des triangles géodésiques

Rappelons d'abord la définition de la δ -hyperbolicité au sens de M. Gromov ([Gr2], [CDP], [GH]).

Le groupe Γ est équipé d'un système de générateurs; la métrique du mot invariante par translation à gauche en fait un espace métrique; cet espace métrique est contenu dans le graphe de Cayley de Γ , noté $Ca(\Gamma)$, muni de la métrique simpliciale. Ceci permet de parler de géodésiques de Γ .

Dans cet espace métrique, la distance de deux points v et w est notée $|v - w|$; la boule de centre v et rayon R est notée $B(v, R)$.

Soit T un triangle géodésique de Γ de cotés a, b, c . On dit que T est δ -fin si tout point de la géodésique a (ou b ou c) est à une distance inférieure à δ d'un point de b ou c (ou a ou c , ou a ou b); on dit que Γ est hyperbolique si tous ses triangles géodésiques sont δ -fins.

Si T est δ -fin on peut découper chaque géodésique a, b, c en deux intervalles $a = c_a \cup b_a$, $b = c_b \cup a_b$ et $c = a_c \cup b_c$ de sorte que les longueurs de c_a et c_b , a_b et a_c , b_c et b_a soient égales, et tout point de c_a soit à une distance inférieure à δ d'un point de c_b (Fig. 1).

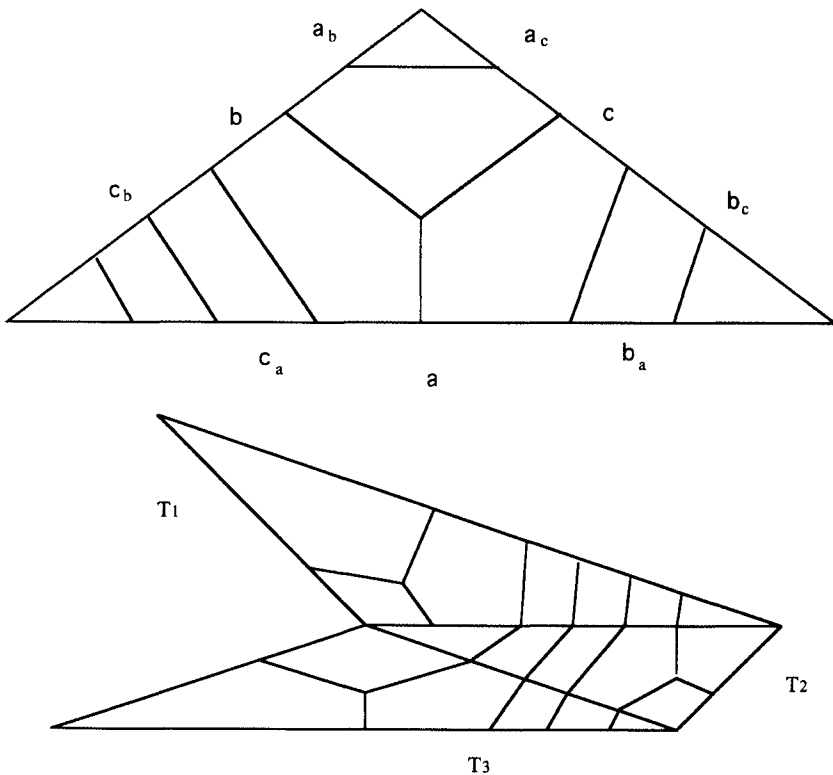


Figure 1

Si T_1, T_2, T_n est une suite de triangles adjacents, on peut construire par récurrence une application d'holonomie isométrique d'un sous-intervalle d'un coté de T_1 dans celui d'un coté de T_n , en suivant successivement les identifications des cotés données par la définition de l'hyperbolicité (Fig. 1).

Malheureusement, il se peut très bien qu'une partie du premier coté de T_1 coïncide avec une partie du dernier de T_n mais que l'holonomie ainsi définie d'un sous-intervalle d'un coté T_1 à valeur dans ce même coté ne soit pas l'identité: en voulant préserver la mesure "naturelle" qui équipe chaque géodésique, on a été trop exigeant. La même difficulté apparaît ([Gr2], 8.3D) quand on cherche à construire le *flot géodésique* d'un groupe hyperbolique. Dans ce cas le problème est d'identifier deux-à-deux les géodésiques joignant deux points à l'infini dans Γ de façon équivariante. Cela n'est pas possible en conservant la mesure naturelle de ces géodésiques (sinon, par exemple, la norme stable des éléments de Γ serait toujours entière), mais on peut le faire en changeant la mesure qui les équipe.

Le but de ce paragraphe est de construire une famille de triangles (remplaçant les triangles géodésiques) équipés d'un feuilletage, ou plus précisément d'une *lamination* remédiant à cet inconvénient (Lemme II.1).

Dans le cas d'un groupe sans torsion, cette construction est la traduction *topologique* de l'existence, due à E. Rips et Z. Sela, de *représentants canoniques* à l'ensemble des solutions d'un système d'équations dans un groupe hyperbolique.

Nous reprenons, à quelques modifications mineures près, le texte [R-S2] afin de fixer les notions de "cylindre" et "tranche" utilisées par la suite.

DÉFINITIONS. Un *cylindre* d'un segment géodésique $[p, q] \subset Ca(\Gamma)$ est un sous-ensemble du 5δ -voisinage de ce segment et qui le contient. Pour tout point $v \in C$, une *projection* de v sur $[p, q]$ désigne un point de $[p, q]$ qui lui est 5δ -proche.

Un point $v \in C$ est dit être *à gauche* (resp. *à droite*) de v_o si la distance $|v - v_o|$ est plus grande que 100δ , et si une projection de v sur $[p, q]$ est à gauche (resp. à droite) d'une projection de v_o . On note $L(v_o, C)$ (resp. $R(v_o, C)$) l'ensemble des points situés à gauche (resp. à droite) de v_o . Cette notion de position est un peu délicate: en particulier un point p' du segment $[p, q]$ n'est "à droite" de p que si $|p - p'| \geq 100\delta$.

Le *décalage* de deux points v_o et v_1 de C est défini par la formule suivante:

$$\begin{aligned} d(v_o, v_1) = & \#(L(v_o, C) - L(v_1, C)) - \#(L(v_1, C) - L(v_o, C)) \\ & + \#(R(v_1, C) - R(v_o, C)) - \#(R(v_o, C) - R(v_1, C)) \end{aligned}$$

Par construction, le décalage d est un cocycle :

$$d(v_o, v_1) + d(v_1, v_o) = 0 \quad d(v_o, v_1) + d(v_1, v_2) + d(v_2, v_o) = 0$$

On définit aussi la *tranche* $tr(v_o, C)$ d'un cylindre C contenant v_o :

$$tr(v_o, C) = \{v \in C / d(v_o, v) = 0\}$$

Il est important de noter que $tr(v_o, C)$ ne dépend que de C et pas de la géodésique $[p, q]$.

La fonction décalage ordonne les tranches d'un cylindre fixé: on dit que $tr(v_o, C) < tr(v_1, C)$ si $d(v_o, v_1) < 0$.

Enfin, deux tranches $tr(v_o, C)$ et $tr(v_1, C)$ sont *consécutives* si $tr(v_o, C) < tr(v_1, C)$, et s'il n'existe pas d'élément w tel que $tr(v_o, C) < tr(w, C) < tr(v_1, C)$.

On peut donc découper chaque cylindre C en une (unique) suite croissante $C = [T_1, T_2 \cdots T_k]$ de tranches *consécutives*.

Là encore, il convient d'insister sur le fait que deux points consécutifs sur la géodésique $[p, q]$ n'appartiennent pas nécessairement à des tranches consécutives; il se peut même qu'un point u situé à droite d'un point v (pour l'ordre ordinaire) se retrouve dans une tranche d'indice inférieur.

Tout ceci est bien défini dans un espace métrique géodésique quelconque, et ces tranches, ainsi que la relation d'ordre $<$ vérifient des propriétés de localité (Fig. 2).

LEMME I.1. a) *Le diamètre de chaque tranche est inférieur à 20δ ; la distance entre la i -ème et la j -ème tranche est minorée par $E(|i - j|/20\delta)$ où E désigne la partie entière.*

b) *Si deux tranches T et T' sont consécutives, $\forall (p, p') \in T \times T'$, $|p - p'| \leq 40\delta + 1 \leq 50\delta$.*

c) *Si les cylindres C et C' de deux segments $[p, q]$ et $[p', q']$ coïncident dans la boule de centre v_o et de rayon 200δ , les tranches correspondantes sont égales: $tr(v_o, C) = tr(v_o, C')$.*

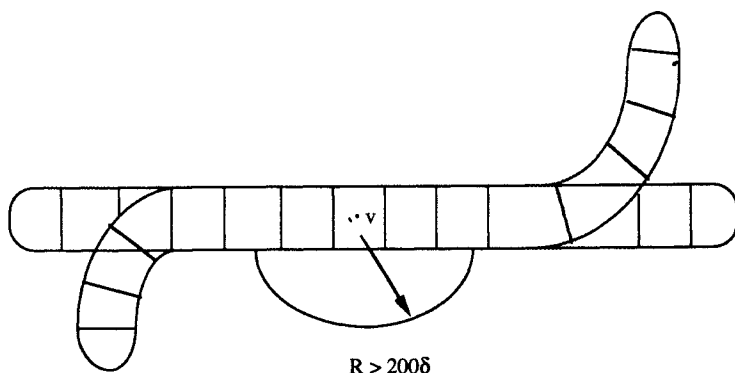


Figure 2

d) Supposons que $|v_o - v_1| \leq 100\delta$ et que l'intersection $C \cap C'$ contienne v_o, v_1 et que $B(v_o, 200\delta) \cap C = B(v_o, 200\delta) \cap C'$; alors:

Soit il existe un point situé à gauche de v_o pour C qui est aussi à gauche de ce point pour C' et $tr(v_o, C) < tr(v_1, C) \Leftrightarrow tr(v_o, C') < tr(v_1, C')$.

Soit, il existe un point situé à gauche de v_o pour C qui est à sa droite pour C' , et $tr(v_o, C) < tr(v_1, C) \Leftrightarrow tr(v_o, C') > tr(v_1, C')$.

e) Si $v \in C$, si $B(v, R) \cap C$ coïncide avec $B(v, R) \cap C'$, si $C = [T_1 \cdot T_2 \cdots T_k]$ (resp. $C' = [T'_1 \cdot T'_2 \cdots T'_k]$) est la décomposition de C (resp. C') en tranches consécutives, et si $v \in T_i = T'_i$ alors:

Soit il existe un point situé à gauche de v_o pour C et C' , et si l (resp. m) désigne le plus grand entier pour lequel il existe $v \in T_{i-l}$ (resp. T_{i+m}) tel que $|w - v| \leq R - 200\delta$, alors pour tout j de l'intervalle $[-l, m]$ on a $T_{i+j} = T'_{i+j}$.

Soit il existe un point situé à gauche de v_o pour C qui est à droite de v_o pour C' , et si l (resp. m) désigne le plus grand entier pour lequel il existe $w \in T_{i-l}$ (resp. T_{i+m}) tel que $|w - v| \leq R - 100\delta$, alors pour tout j de l'intervalle $[-l, m]$ on a $T_{i-j} = T'_{i+j}$.

La démonstration de ce lemme élémentaire est laissée au lecteur. $\square$

Soient $g_1, \dots, g_n$ une famille d'éléments de Γ ; on convient dans tout ce qui suit que $g_{-i} = g_i^{-1}$ et que $g_o = Id$ est l'élément neutre de Γ . Supposons que la famille de $(g_i)_{-n \leq i \leq n}$ soit solution d'un système d'équations triangulaires $w^1, \dots, w^p$, où $w^a: g_{i_a} g_{j_a} g_{k_a} = 1$. Notons que comme $g_o = e$ certaines de ces équations triangulaires peuvent en fait être de longueur 2.

Pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la suite, les inconnues g_i apparaissant dans ce système d'équations sont appelés les *générateurs*.

On définit (en suivant [R-S2]) une constante $c(\Gamma)$ ne dépendant que de Γ en posant $c(\Gamma) = 2^{v_{2\delta} \mu_o} \cdot \mu_o + 200\delta$, où $\mu_o = 10^6 \delta^2$, et $v_{2\delta}$ est le cardinal de la boule de Γ de centre e et de rayon 2δ .

Une fois donné une telle solution à un système d'équation, E. Rips et Z. Sela montrent le:

THÉORÈME I.2. ([R-S2], Cor. 4.3 au Th. 4.2) Soit $\rho = c(\Gamma)n$. Il existe pour chaque générateur g_i , $-n \leq i \leq n$, un cylindre du segment géodésique $[e, g_i]$, noté $C(g_i)$, vérifiant les propriétés suivantes:

- (invariance) $C(g_i) = g_i C(g_{-i}) = g_i C(g_i^{-1})$
- (stabilité) Si $w: khg = 1$ est l'une des équations du système étudié et si $r(w) = \frac{1}{2}(|g| + |k| - |h|)$,

$$C(g) \cap B(e, r(w) - \rho + 200\delta) = C(k^{-1}) \cap B(e, r(w) - \rho + 200\delta)$$

De même, en considérant les équations $h g k = 1$, $k h g = 1$, et en posant $s(w) = 1/2(|h| + |g| - |k|)$, $t(w) = 1/2(|k| + |h| - |g|)$, la propriété d'invariance montre:

$$C(g) \cap B(g, s(w) - \rho + 200\delta) = gC(h) \cap B(g, r(w) - \rho + 200\delta)$$

$$C(k^{-1}) \cap B(k^{-1}, t(w) - \rho + 200\delta) = gC(h) \cap B(h^{-1}, t(w) - \rho + 200\delta)$$

(voir la Fig. 3).

(La propriété d'invariance est le Lemme 3.2 de [R-S2].)

Dans toute la suite, on fixe une famille de cylindres vérifiant ces propriétés.

La L-mesure des générateurs. Par définition, si g est l'un des générateurs intervenant dans notre système d'équations, la L -mesure de g est le nombre de tranches du cylindre $C(g)$.

Pour chaque générateur g , on fixe une courbe $c_g : [0, L(g)] \mapsto Ca(\Gamma)$ telle que $c_g(i)$ soit un élément de la i -ème tranche de g . On peut choisir cette courbe de sorte que $c_{g^{-1}}(L(g) - i) = g^{-1}c_g(i)$. Grâce au lemme I.1.b, on voit que $|c_g(i) - c_g(i+1)| \leq 50\delta$. Donc, quitte à remplacer c_g par la courbe géodésique par morceaux qui joint ces points, on peut supposer que $|c_g(i - 1/2) - c_g(i + 1/2)| \leq 50\delta$. De plus le théorème II.1 dit que, si $w: ghk = 1$ est l'une des équations et si $r(w) = 1/2(|g| + |k| - |h|)$, alors $C(g) \cap B(e, r(w) - \rho + 200\delta) = C(k^{-1}) \cap B(e, r(w) - \rho + 200\delta)$. Donc, si l'on pose $i_w = \text{Max}(i/|c_g(i)| < r(w) - \rho, |c_{k^{-1}}(|k| - i)| < r(w) - \rho)$, on remarque (grâce au lemme I.1.e) que, pour $i \leq i_w$, la i -ème tranche de $C(g)$

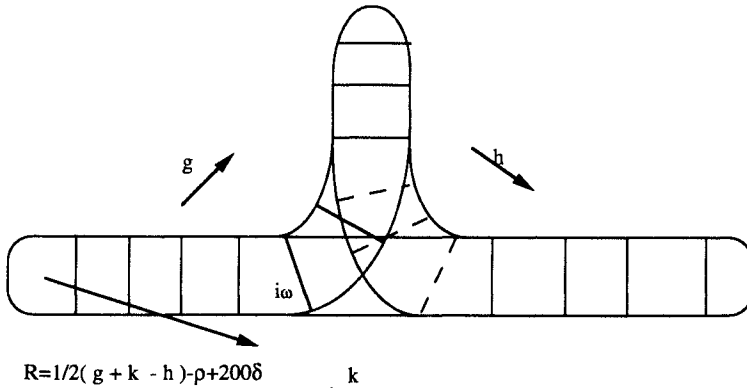


Figure 3

coïncide avec celle de $C(k^{-1})$:

$$\forall i \leq i_w, \quad tr(c_g(i), C(g)) = tr(c_{k^{-1}}(i), C(k^{-1})) \quad (*)$$

Dans ce cas on dit que $c_g(i)$ est le vis-à-vis de $c_{k^{-1}}(i)$.

Remarque I.1. (Cas où Γ est sans torsion.) Si une translation de Γ laisse invariante un ensemble fini, elle représente nécessairement un élément d'ordre fini de ce groupe. Ainsi, si Γ est sans torsion, on peut choisir de façon équivariante un point—appelé centre—dans chaque sous-ensemble fini (en particulier dans chaque tranche) de Γ . Dans ce cas, on peut définir $c_g(i)$ comme étant le “centre” de la tranche $tr(c_g(i), C(g))$. Cette courbe c_g devient le *représentant canonique* de g au sens de [R-S2], et $(*)$ devient:

$$\forall i \leq i_w, \quad c_g(i) = c_{k^{-1}}(i) \quad (**)$$

Le feuilletage A_w . Pour chacune des équations de notre système, $w: khg = 1$, on considère un 2-simplexe Δ_w ; il se peut que l'équation considérée soit de longueur deux et dans ce cas Δ_w est seulement un digone. Chaque côté de Δ_w est marqué par g , h , et k puis est considéré comme segment de longueur $L(g)$, $L(h)$, $L(k)$.

On définit une *lamination* (la terminologie est celle de Thurston pour les surfaces) A_w de Δ_w , avec (au plus) une singularité de la façon suivante (voir Fig. 4).

a) $A_w \cap [g]$ est constitué des $L(g)$ points entiers de ce segment ; de même pour h et k .

b) si $i \leq i_w$, $c_g(i)$ est le vis-à-vis de $c_{k^{-1}}(i)$. Dans ce cas: $tr(c_g(i), C(g)) = tr(c_{k^{-1}}(i), C(k^{-1}))$, et l'on joint ces deux points par une feuille de A_w . On procède d'une façon analogue pour les deux autres cotés.

Les feuilles ainsi construites sont, par définition, les feuilles *régulières* de A_w .

c) On rajoute une singularité au centre de Δ_w à laquelle on joint les points des trois cotés qui n'ont pas encore de vis-à-vis. Les feuilles obtenues sont les feuilles *singulières* de A_w .

Remarque I.2. La lamination ainsi définie ressemble beaucoup au feuilletage “horocyclique” de la Figure 1; au lieu de préserver la mesure géodésique, elle préserve la L -mesure (en dehors des singularités). Il convient cependant de noter que cette mesure ne satisfait pas en général l'inégalité triangulaire: si $ghk = 1$ est l'une de nos équations, on n'a pas en général $L(g) \leq L(h) + L(k)$. Une construction analogue pour les géodésiques de longueur infinie a été faite par M. Gromov ([Gr2], 8.3.D), qui en déduit l'invariance topologique du flot géodésique. On peut d'ailleurs remplacer dans ce qui précède la fonction décalage de [R-S2], par la fonction L

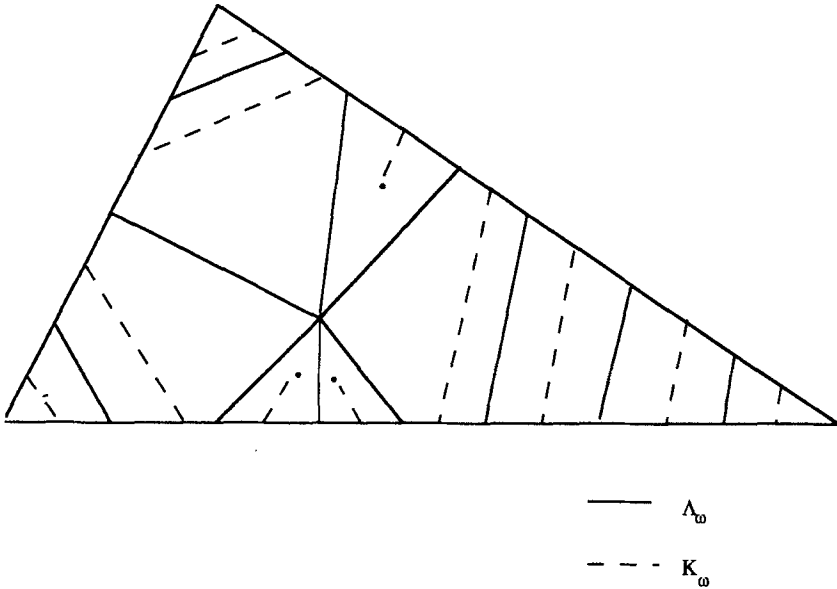


Figure 4

introduite par Gromov, en modifiant un peu ([Gr2], 8.3.C) pour tenir compte du fait que les géodésiques sont de longueur finie.

Le graphe K_w . Par définition, ce graphe (en pointillé sur la Fig. 4) est une réunion d'arêtes allant d'un bord de Δ_w à l'autre de sorte que chaque composante connexe de $\Delta_w - K$ contienne une et une seule composante connexe de Λ_w , et de pointes (ou demi-arêtes) séparant les feuilles singulières de Λ . Ainsi $K_w \cap \partial\Delta_w$ est constitué des points à coordonnées *demi-entières* pour la L -mesure de chacun des cotés de ce triangle.

Grâce au théorème I.2.a, on voit que le nombre de points d'un côté de Δ_w n'ayant pas de vis-à-vis dans l'un des deux autres cotés n'excède pas $20\delta\rho$. Le graphe K_w et la lamination Λ_w satisfont donc:

LEMME I.3. *Dans le triangle Δ_w il y a au plus $3.20\rho\delta$ feuilles singulières de Λ_w .*

II. Le polyèdre feuilleté P

Soit G un groupe de présentation finie, et $h : G \mapsto \Gamma$ un homomorphisme.

Un argument de triangulation montre qu'il existe une présentation de G dont toutes les relations sont de longueur trois, ou peut-être deux s'il y a de la deux

torsion. Dans tout ce qui suit, une telle présentation: $(G_1, \dots, G_n; w_1, \dots, w_m)$ est fixée.

Soit P le polyèdre de van Kampen de cette présentation: c'est le polyèdre de dimension deux dont le 0-squelette est réduit à un point, le 1-squelette est l'ensemble des générateurs, et le deux squelette est constitué de triangles (2-simplices) et digones $(\Delta_{w_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspondant aux relations de longueur deux et trois. Son groupe fondamental est G .

Par définition, la famille des $g_i =_{\text{def}} h(G_i)$ forme une *solution* du système d'équations $w_1 \cdots w_n$ dans Γ , de sorte qu'on peut appliquer la construction précédente: chaque face Δ_w de P est équipée d'une lamination Λ_w , et d'un graphe K_w . Comme le long de deux faces adjacentes, Λ_w et k_w coïncident, P est équipé d'un graphe K et d'une lamination Λ .

Pour chaque triangle w , les feuilles de Λ_w sont des segments tracés dans P ; on les appelle les *arcs* de Λ : ce sont les traces sur les triangles des feuilles de Λ . On distingue comme précédemment les arcs réguliers des arcs singuliers. Ainsi, les feuilles de Λ sont obtenues en mettant bout à bout les arcs de Λ .

Le groupe Γ étant hyperbolique, il est de présentation finie, et l'on peut choisir un polyèdre de dimension deux simplement connexe H , équipé d'une action de Γ , dont le 1-squelette est le graphe de Cayley de Γ , et tel que le quotient H/Γ soit fini; on note $e \in H$ l'origine naturelle de $Ca(\Gamma)$. On équipe H d'une métrique de longueur Γ -invariante à gauche qui donne la longueur 1 à chaque arête du graphe de Cayley.

On réalise l'homomorphisme h comme application continue (abusivement) notée $h: (P, s_0) \mapsto (H/\Gamma, e)$ en prenant soin à ce que l'application relevée au revêtement universel ($\tilde{h}: P \mapsto H$) satisfasse la condition suivante: si $g = h(G_\alpha)$ désigne l'un des générateurs, et si $[g]$ désigne le coté correspondant de $\tilde{P}$ paramétré par l'intervalle $[0, L_g]$, $\tilde{h}[g]$ est la courbe $c_g(t)$ du graphe $Ca(\Gamma)$ joignant e à $g.e$. Le prolongement au 2-squelette de P est arbitraire (parmi les prolongements continus).

LEMME II.1. a) Soient $l_1, \dots, l_n$ une famille composable d'arcs réguliers de Λ . Λ extrémités fixées, le chemin $h(l_n \cdots l_1)$ de H/Γ est homotope à chemin de longueur inférieure à $20 \cdot \delta$.

b) De même, si $c_1 \cdots c_n$ sont des arêtes composables du graphe K , $h(c_1 \cdots c_n)$ est homotope, à extrémités fixées, à un chemin de longueur inférieure à $100 \cdot \delta$.

Démonstration. a) L'image par $\tilde{h}$ du revêtement universel $\tilde{P}$ de P est une famille infinie de triangles (non géodésiques) de $Ca(\Gamma)$ donc chaque coté est équipé d'un cylindre. Relevons le chemin $h(l_n \cdots l_1)$ à travers le revêtement universel $H \mapsto H/\Gamma$. Soit $e(\tilde{h}(l_i \cdots l_1))$ l'extrémité du chemin relevé $\tilde{h}(l_i \cdots l_1)$, et C_i le cylindre du coté du triangle de $Ca(\Gamma)$ le contenant. En appliquant la propriété (*) du paragraphe I, on remarque que la suite des cylindres C_i et des points $e(\tilde{h}(l_i \cdots l_1))$ vérifie: $tr(e(\tilde{h}(l_i, l_{i-1} \cdots l_1)), C_i) = tr(e(\tilde{h}(l_{i-1} \cdots l_1)), C_{i-1})$.

Ainsi, si o désigne l'origine de $\tilde{h}(l_1)$, toutes les extrémités $e(\tilde{h}(l_i \cdots l_1))$ sont dans une même tranche $tr(C_1, o)$ qui est un sous ensemble de diamètre inférieur à 20δ de $Ca(G)$ (lemme I.1.)

En particulier, la distance dans H de $e(\tilde{h}(l_i \cdots l_n))$ à o est inférieure au diamètre de la tranche $tr(o, C_1)$. Comme H est simplement connexe, on peut homotoper cette courbe—à extrémités fixées—une géodésique de $Ca(\Gamma) \subset H$, qui est de longueur inférieure au diamètre de la tranche. La projection dans H/Γ de cette homotopie homotope $h(l_1 \cdots l_n)$ à un chemin de longueur inférieure à 20δ (le diamètre de la tranche).

Pour b), il suffit de remarquer que la distance $|c_g(i) - c_g(i + 1/2)|$ n'excède pas 25δ . $\square$

Remarque II.1. Supposons de plus Γ sans torsion, choisissons de façon équivariante un centre à chaque tranche comme à la remarque I.1, et prenons pour $c_g(i)$ le centre de la tranche qui le contient; dans ce cas (**) dit que l'extrémité du chemin $e(\tilde{h}(l_1 \cdots l_n))$ coïncide avec son origine, et l'on peut renforcer la conclusion du a) du lemme précédent: le lacet $h(l_n \cdots l_1)$ de H/Γ est homotope à zéro.

Malheureusement, cela est impossible à faire pour un groupe avec torsion, sinon on arriverait à une contradiction (voir la remarque III.1).

III. Le graphe de groupe X

Dans ce paragraphe, on découpe le polyèdre P suivant le graphe K , on montre que pour chaque composante Q , le groupe $h(\pi_1(Q))$ est engendré par des éléments de longueur bornée (en fonction de $T(G)$), et on applique le théorème de van Kampen pour conclure.

On garde les notations du paragraphes précédent. Pour chaque composante connexe K_α du graphe K , on note NK_α un petit voisinage régulier de K_α dans P . Les composantes connexes de K sont de trois sortes:

Type I: K_α ne contient pas de pointes et $NK_\alpha - K_\alpha$ a deux composantes connexes. Dans ce cas pour chacune des ces deux composantes N_1K_α et N_2K_α , $\pi_1(N_iK_\alpha) = \pi_1(NK_\alpha)$.

Type II: K_α ne contient pas de pointes et $NK_\alpha - K_\alpha$ est connexe. Dans ce cas, $\pi_1(NK_\alpha - K_\alpha)$ est d'indice deux dans $\pi_1(NK_\alpha)$.

Type III: K_α contient une pointe.

Le troisième cas mérite une étude un peu plus détaillée:

LEMME III.1. *Si K_α contient une pointe, $NK_\alpha - K_\alpha$ est connexe, et l'homomorphisme $\pi_1(NK_\alpha - K_\alpha) \mapsto \pi_1(NK_\alpha)$ est surjectif.*

Démonstration. On veut homotoper toute courbe de NK_α dans NK_α à une courbe de $NK_\alpha - K_\alpha$. Pour ce faire, il suffit d'éliminer successivement les intersections, supposées transverses, de cette courbe avec K_α . On peut le faire en poussant chaque point d'intersection le long de K_α pour l'amener jusqu'à une pointe; celle-ci permet de la supprimer. $\square$

Soit $K' = K - \{K_1 \cdots K_p\}$ le graphe K privé de ses composantes à pointes.

Comme pour toute composante à pointe K_α de K , $NK_\alpha - K_\alpha$ est connexe, les composantes connexes de $P - K$ sont celles de $P - K'$.

En particulier, si Q est une composante connexe de $P - K'$, Q contient une unique feuille A_Q de la lamination A , et $\pi_1(A) \mapsto \pi_1(Q)$ est surjective: par construction du graphe K , $P - K$ est un voisinage tubulaire de A , et enlever les composantes à pointes ne change rien (à cause du Lemme III.1).

On considère alors le *graphe de groupe* Y (voir [Se], [S-W], [D-D]) dont les sommets sont:

- a) les composantes connexes de $P - K'$, marquées par leur groupe fondamental.
- b) les composantes de type II de K marquées par $\pi_1(NK_\alpha)$.

Les arêtes de Y sont: les composantes connexes de type I ou II de K , marquées par le groupe fondamental $\pi_1(NK_\alpha)$ et $\pi_1(NK_\alpha - K_\alpha)$ respectivement; les homomorphismes d'attachement des arêtes vers les sommets sont évidents. (Attention, les homomorphismes d'attachements des groupes d'arêtes dans les groupes de sommets ne sont pas injectifs avec notre définition; si on préfère qu'ils le soient il convient de remplacer les groupes fondamentaux intervenants dans la définition de Y par leurs images dans $G = \pi_1(P)$).

Une composante connexe Q de $P - K'$ est dite *régulière*, si A_Q ne contient pas de singularité, *singulière* sinon; le sommet correspondant est alors dit régulier ou singulier. Les sommets de type b sont aussi considérés comme singuliers.

En appliquant le théorème de van Kampen, on remarque que l'homomorphisme canonique $\pi_1(Y, \sigma_o) \mapsto G = \pi_1(P, s_o)$, où $\pi_1(Y, \sigma_o)$ désigne le groupe fondamental de ce graphe de groupe au sens de la théorie de Bass-Serre [S], [S-W], [D-D], et σ_o la composante privilégiée de $P - K$ contenant s_o , est bijectif.

Enfin, le graphe de groupe X est le graphe obtenu en remplaçant dans Y les stabilisateurs de sommets et d'arêtes par leurs images respectives dans le groupe $\pi_1(H/h(G)) \subset \Gamma$. Notons que ce graphe possède une origine s_o privilégiée, qui est la seule composante contenant le seul sommet de P .

Par construction, l'homomorphisme h se factorise à travers $\pi_1(X, s_o)$.

Le lemme suivant est la clef de la démonstration.

LEMME III.2. a) Si Q est une composante régulière de $P - K'$, $h(\pi_1(Q))$ est fini.
 b) Les stabilisateurs d'arêtes de X sont finis.

Démonstration. a) comme b) résultent immédiatement du lemme II.2, et du fait que $\pi_1(A) \mapsto \pi_1(Q)$ est surjective: l'image par h de toute courbe composée d'arcs réguliers de A (où d'arêtes de K) est homotope à extrémités fixées à une courbe de longueur bornée. En particulier si A_Q ne contient que des arcs réguliers, l'image par h_* de son groupe fondamental est un sous-groupe borné, donc fini, de Γ .

La démonstration du a) du lemme suivant n'est pas sans rappeler celle, due à M. J. Dunwoody ([D-D], VI 4, VI 6), de l'accessibilité des groupes de présentation finie; nous ne l'utiliserons que pour préciser le théorème principal.

LEMME III.3. a) Le graphe X a au plus $T(G) + b_1(G, Z_2)$ sommets singuliers.

b) Si une arête y ne sépare pas le graphe X , h se factorise à travers une HNN-extension au dessus d'un groupe fini.

c) Si une arête y sépare le graphe en deux morceaux $X = X_1 \cup_y X_2$, avec $s_o \in X_1$, alors soit h se factorise (non trivialement) à travers une somme amalgamée au dessus d'un groupe fini, soit $h(\pi_1(X_1, s_o))$, est conjugué à $h(\pi_1(X_2, *))$.

Démonstration. a) Chaque triangle de P contient au plus une singularité; il y a donc au plus $T(G)$ sommets singuliers de type a.

Si s est un sommet singulier de type b, il est l'extrémité d'une unique arête, et le stabilisateur de celle-ci est exactement d'indice deux; il existe donc un homomorphisme de G à valeur dans $Z/2Z$ qui envoie tous les stabilisateurs des sommets sur l'élément neutre, sauf celui de s , et qui envoie celui-ci surjectivement sur $Z/2Z$. Les homomorphismes ainsi construits correspondants à des sommets distincts sont indépendants sur $Z/2$. Ainsi leur nombre ne peut excéder $b_1(G, Z/2Z)$.

b) Soit y cette arête; d'après le lemme III.2, l'image par l'homomorphisme h de $\pi_1(K_y)$ est un groupe fini. Donc le graphe X a une arête non-séparante à stabilisateur fini; la théorie de Bass-Serre dit que le groupe fondamental de X est une HNN-extension au dessus de ce groupe.

Pour c), on raisonne comme en b), mais on suppose maintenant que l'arête sépare le graphe. En notant C_y le stabilisateur (fini) de cette arête, $C_y = h(\pi_1(K_y))$, on distingue trois possibilités:

- 1) $\pi_1(X_1) \neq C_y$ et $\pi_1(X_2) \neq C_y$
- 2) $\pi_1(X_2) = C_y$
- 3) $\pi_1(X_1) = C_y$

Dans le premier cas l'homomorphisme se factorise à travers une somme amalgamée au dessus d'un groupe fini. Dans le second, $h(\pi_1(X_1, s_o)) = h(\pi_1(X, s_o))$. Dans le troisième, $h(\pi_1(X_2))$ est conjugué à $h(\pi_1(X, s_o))$ ($s_o \notin X_2$). $\square$

Fin de la démonstration

Pour montrer le théorème de l'introduction, on suppose que l'homomorphisme h étudié ne se factorise pas à travers une somme amalgamée ou une HNN extension au dessus d'un groupe fini. Appliquant le lemme III.3 à toutes les arêtes, on voit que pour une composante Q_s de $P - K'$, $h(G) = h(\pi_1(X, s_o))$ est conjugué à $h_*(\pi_1(Q_s))$, ce second groupe n'étant bien défini qu'à conjugaison près. Si A_s désigne la lamination de Q_s , considérée maintenant comme graphe tracé dans Q_s , A_s contient tous les arcs singuliers de A , et il y en a au plus $T(G) \cdot \rho \cdot 60\delta$ (à cause du Lemme I.3). L'application $\pi_1(A_s) \mapsto \pi_1(Q_s)$ étant surjective, pour démontrer le théorème de l'introduction, et compte tenu du lemme II.1, il suffit de poser $\varepsilon_F = c(\Gamma) \cdot 10^4 \cdot \delta^2$, et d'appliquer à A_s le:

LEMME III.4. *Soit A un graphe connexe, L le 1-squelette de A , E un espace métrique, et $h : A \mapsto E$ une application continue. Supposons que:*

1) *pour toute arête l de A $h(l)$ est homotope, à extrémités fixées, à une courbe de longueur inférieure à 20δ .*

2) *il existe un sous-ensemble fini L_o de l'ensemble L des arêtes tel que si $l_1 \cdots l_n$ est une suite d'arêtes composables de $L - L_o$ alors l'image par h de $l_1 \cdots l_n$ est homotope, à extrémités fixées, à une courbe de longueur inférieure à 20δ .*

Alors pour tout sommet s de A , $h_(\pi_1(A, s))$ est engendré par des courbes de longueurs inférieures à $(4^*L_o + 3)20\delta$.*

Démonstration. Soit T un arbre maximal tracé dans A ; pour tout sommet s' de T le segment $[s, s'] \subset T$ contient au plus *L_o arêtes de L_o ; donc son image est homotope, à extrémités fixées, à une courbe de longueur inférieure à $(2^*L_o + 1)50\delta$. Or $\pi_1(A, s)$ est le groupe libre engendré par les courbes de la forme $[s, s']a[s'', s]$ où $[s, s']$ et $[s'', s]$ sont des segments de T , et a une arête n'appartenant pas à T joignant s' à s'' . $\square$

La démonstration que nous venons d'achever donne mieux que le résultat annoncé dans l'introduction: partant d'un groupe de présentation finie G , et d'un homomorphisme h de G dans Γ , nous avons produit un graphe de groupe X . Soit $\bar{X}$ le graphe obtenu à partir de X de la façon suivante: les sommets de $\bar{X}$ sont les sommets non triviaux de X , où l'on dit qu'un sommet est trivial s'il est régulier et de valence un ou deux: dans ce cas, son stabilisateur est égal à celui des deux arêtes adjacentes. Les arêtes de $\bar{X}$ sont les intervalles de X composés d'une suite $y_1, y_2 \cdots y_k$ d'arêtes composables de X telles que $e(y_1) = o(y_2)$, $e(y_2) = p(y_3) \cdots e(y_{k-1}) = o(y_k)$ soient des sommets triviaux. Ces arêtes sont marquées par le stabilisateur commun des y_i .

Ce graphe $\bar{X} = \bar{X}(G, h)$ vérifie les propriétés suivantes.

- Il existe deux homomorphismes $s : G \mapsto \pi_1(\bar{X})$ (surjectif) et $h' : \pi_1(\bar{X}) \mapsto \Gamma$ tels que $h = h'os$.
- le nombre de sommets de $\bar{X}$ est majoré par $T(G) + b_1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
- le nombre d'arêtes de $\bar{X}$ est majoré par $T(G) + b_1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + b_1(G, \mathbb{Z})$.
- la restriction de h' au stabilisateur de chaque sommet et chaque arête est un isomorphisme sur son image qui est engendrée par des éléments de Γ dont la somme des longueurs est bornée par $\varepsilon_F T^2(G)$.
- les stabilisateurs d'arêtes sont finis.

L'ensemble des (classes d'isomorphismes) de graphes de groupes satisfaisant cette propriété est fini. L'existence même d'un graphe de groupe satisfaisant toutes ces propriétés est une version raffinée du théorème annoncé.

Supposons de plus Γ sans torsion: dans ce cas, le groupe fondamental de $\bar{X}$ est le produit libre des stabilisateurs de ses sommets et d'un groupe libre. Ce cas particulier est susceptible d'être décrit par un énoncé synthétique:

THÉORÈME III.1. *Soit G un groupe de présentation finie, Γ un groupe hyperbolique sans torsions, et L_r le groupe libre de rang r . Il existe des sous-groupes $G_1, \dots, G_n$ de Γ , engendrés par des éléments de longueurs inférieures à $\varepsilon_G \cdot T^2(G)$, tels que tout homomorphisme de G dans Γ se factorise en un homomorphisme surjectif $s : G \mapsto G_{i_1} * \dots * G_{i_k} * L_r$, $k + r \leq \text{rank } G$, et un homomorphisme $h' : G_{i_1} * \dots * G_{i_k} * L_r \mapsto \Gamma$ dont la restriction à G_i transforme ce groupe en l'un de ses conjugués.*

Cet énoncé généralise le résultat principal de [R] sur la stratification de l'espace des modules des solutions d'une équation quadratique (pour arriver à un énoncé analogue, [R] supposait que G est un groupe de surface, et Γ le groupe fondamental d'une variété complète à courbure majorée par une constante négative dont le rayon d'injectivité tend vers zéro à l'infini).

Remarque III.1. Notre raisonnement montre *a contrario* l'impossibilité de trouver des représentants canoniques (au sens de [RS2]) à un système d'équations dans un groupe hyperbolique ayant de la torsion: si cela était possible, en raisonnant comme à la remarque II.1, on montrerait que si une arête de X est triviale, son stabilisateur est trivial; ainsi, le groupe F de l'énoncé du théorème principal serait trivial. Il est facile de faire un contre-exemple: si $G = \Gamma = A *_F B$, A, B, F étant tous trois finis et sont tels que le commutant de F dans A et B est différent de F , alors le commutant de F dans G contient un groupe infini cyclique: le groupe engendré par $x = ba$ si $[b, F] = [a, F] = F$. Les sous-groupes $A *_F x^n B x^{-n}$ de $G = \Gamma$ sont deux-à-deux non conjugués et tous isomorphes à G : il existe donc une infinité d'homomorphismes

injectifs de G vers Γ deux-à-deux non conjugués, et aucun ne se factorise à travers un produit libre.

IV. Appendice (Un exemple)

Il est bien connu ([Gr], [CDP], [GH]) que les sous-groupes abéliens d'un groupe hyperbolique sans torsion Γ sont les sous-groupes infinis cycliques. En particulier, tout homomorphisme $h : \mathbb{Z}^2 \mapsto \Gamma$ se factorise à travers l'extension HNN $1_{\star_1}$ du

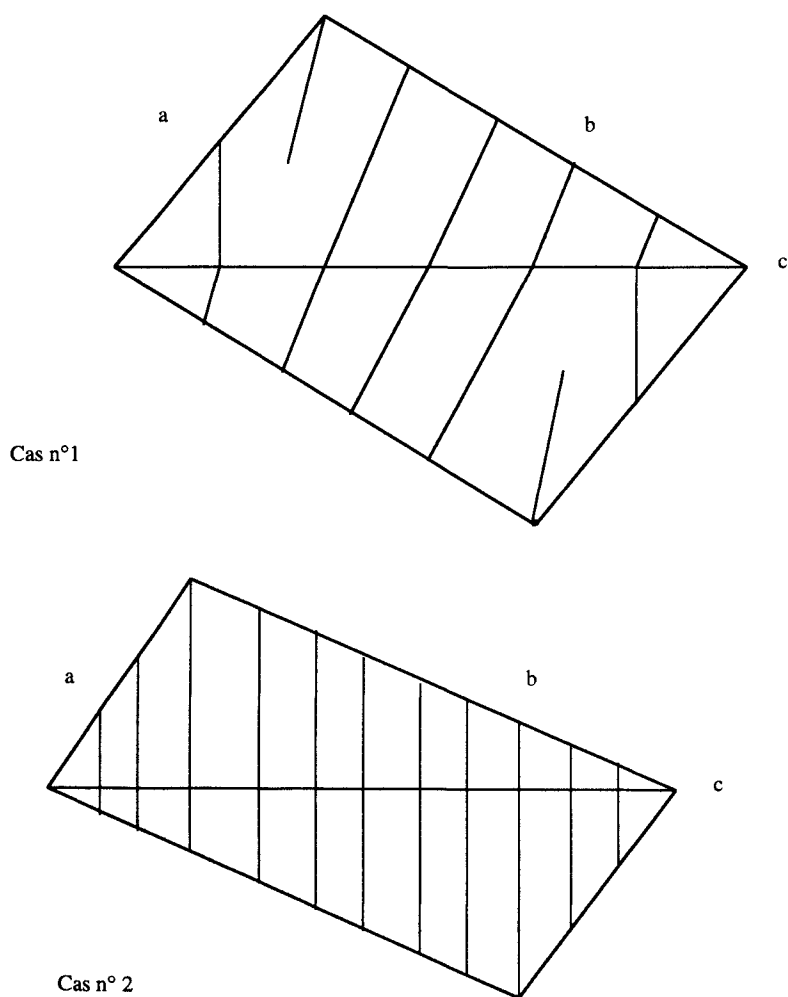


Figure 5

groupe réduit à un élément par lui-même. On peut le voir (même si c'est une démonstration très peu naturelle de ce fait élémentaire) en utilisant le feuilletage $\mathcal{A}$ introduit au paragraphe I et II. L'exemple où $\Gamma = \mathbb{Z}$ est le groupe libre de rang 1 équipé d'un système non libre de générateurs illustre la nécessité d'introduire $\mathcal{A}$. Dans cet exemple, $G = \mathbb{Z}^2 : \langle abc = bca = 1 \rangle$; le polyèdre P n'est autre que le tore T^2 ; $\Gamma = \mathbb{Z}$ engendré par u , et on définit h par $h(a) = u^3$, $h(b) = u^9$, $h(c) = u^{-12}$.

Premier cas. Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ est équipé d'un système de deux générateurs u , $v = u^2$. Les écritures géodésiques de $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ sont $h(a) = uv$, $h(b) = uv^4$, $h(c) = v^{-6}$. Comme le montre la Figure 5, le feuilletage "horocyclique" induit sur P par h n'est pas très utile: son unique feuille non singulière est une courbe homotope à a^4b^{-1} dont l'image par h est non-nulle.

Second cas. Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ est équipé de son générateur naturel (un seul élément u). Dans ce cas $h(a) = u^3$, $h(b) = u^9$, $h(c) = u^{-12}$ sont des écritures géodésiques; mais ce sont aussi des représentants *canoniques* au sens de [R-S2] (comme le graphe de Cayley de Γ est une droite, les triangles sont plats). Le feuilletage $\mathcal{A}$ a trois composantes qui sont des courbes homotopes à $b^{-1}a^3$. La structure de graphe de groupes qu'acquiert $\mathbb{Z}^2$ est celle d'un cycle à trois sommets et arêtes marqués d'un même infini cyclique $\mathbb{Z}$ qui est le noyau de h . Ainsi, h se factorise à travers le groupe fondamental du graphe de groupes dont le graphe sous-jacent est le cycle à trois sommets et tous les stabilisateurs de sommets et d'arêtes sont triviaux.

Remerciements

Je tiens à remercier Z. Sela, qui m'a patiemment expliqué le contenu de [RS2] à Oberwolfach en 1992, et m'en a explicité plusieurs améliorations depuis: le lemme technique principal de cet article joue un rôle important dans notre texte. Mais aussi le rapporteur, qui a relevé une faute dans la première version de ce texte; ses nombreuses remarques m'auront permis de clarifier la démonstration présentée.

BIBLIOGRAPHIE

- [CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT and A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes*, Les groupes hyperboliques de M. Gromov. Lecture note in Math. 1441, Springer 1990.
- [D-D] W. DICKS and M. J. DUNWOODY. *Groups acting on graphs*. Cambridge studies in advanced mathematics 17, 1989.
- [GH] E. GHYS et P. DE LA HARPE. *Les groupes hyperboliques, d'après M. Gromov*. Progress in Math n83, Birkhauser 1990.

- [Gr1] M. GROMOV. *Filling riemanian manifolds*, Journ. Diff. Geom 18 (1983), 213–307.
- [Gr2] M. GROMOV. Hyperbolic groups, in *Essays in Group Theory*, S. M. Gersten editor, MSRI publication no8, Springer 1987.
- [R] A. REZNIKOV. *Quadratic equations in groups from the global geometry viewpoint*. Preprint 1993.
- [R-S1] E. RIPS and Z. SELA. *Structure and rigidity in hyperbolic groups*, GAFA 4(3) (1994), p. 337–380.
- [R-S2] E. RIPS and Z. SELA. *Canonical representative and equations in hyperbolic groups*. Preprint.
- [S-W] P. SCOTT and C. T. C. WALL. Topological methods in group theory, in *Homological Group Theory*, C. T. C. Wall, editor. London Math. Soc. Lecture Note 36 (1979), 137–173.
- [S] J.-P. SERRE. Arbres, amalgames, SL_2 , Astérisque no46 (1977).
- [Th] W. THURSTON. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton 1978.

IRMA – Université L. Pasteur et CNRS
7 rue R. Descartes, F-67084,
France
e-mail; delzant@math.u-strasbg.fr

Received March 30, 1994