

Sous-algèbres de dimension finie de l'algèbre des champs hamiltoniens.

Thomas Delzant ⁽¹⁾

I. Introduction.

Soit (M, σ) une variété symplectique. Rappelons qu'un champs de vecteur X sur M est localement hamiltonien si son flot préserve la structure symplectique, ou, ce qui revient au même, si $i(X)\sigma$ est une 1-forme fermée. Si cette forme est exacte on dit que X est globalement hamiltonien. Un hamiltonien de X est une fonction $x \in C^\infty(M)$ telle que $i(X)\sigma = dx$.

L'ensemble $\mathcal{X}_\sigma$ des champs de vecteurs localement hamiltoniens forme une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson. La sous-algèbre $\mathcal{X}_\sigma^h$ des champs globalement hamiltoniens est un idéal de l'algèbre $\mathcal{X}_\sigma$ des champs localement hamiltoniens, contenant l'idéal dérivé. Cela résulte de la formule de Poisson :

Si X et Y sont localement hamiltoniens, $\sigma(X, Y)$ est un hamiltonien de $[X, Y]$.

Pour toutes ces notions, le lecteur pourra se reporter au traité de J. M Souriau ([S]), ainsi qu'à ([A], [A-M], [G-S], [L-M], [M-S], [W]).

Nous étudions les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{X}_\sigma$, sous-l'hypothèse que M soit compacte. On peut regrouper les résultats obtenus en un énoncé.

Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathcal{X}_\sigma$ des champs localement hamiltoniens, et soit $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{X}_\sigma^h$ la sous-algèbre des champs globalement hamiltoniens de $\mathcal{G}$.*

- i) Si $\mathcal{G} = \mathcal{R} + \mathcal{S}$ est une décomposition de Levi, $[\mathcal{R}, \mathcal{S}] = 0$.*
- ii) Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, elle est compacte.*
- iii) Si $\mathcal{G}$ est nilpotente, $\mathcal{H}$ est centrale, et $\mathcal{G}$ est nilpotente en deux coups.*
- iv) Si $\mathcal{G}$ est résoluble, $\mathcal{H}$ est abélienne, et $\mathcal{G}$ est métabelienne.*

II Démonstration.

Soit $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de dimension finie de $\mathcal{X}_\sigma$. Nous noterons $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ l'idéal des champs globalement hamiltoniens. On a le :

Lemme 1 *Soit $X \in \mathcal{G}$.*

- i) Les valeurs propres de ad_X sont 0 et des nombres imaginaires purs.*
- ii) Si $\mathcal{G}_0$ est le sous-espace de Jordan associé à la valeur propre 0, $ad_X^2 : E_0 \rightarrow E_0, ad_X^2 = 0$.*
- iii) Si E_λ est le sous-espace de Jordan associé à la valeur non nulle λ , $ad_X : E_\lambda \rightarrow E_\lambda, ad_x = \lambda.Id$ est une homothétie.*
- iv) On peut décomposer $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \sum_{\lambda_k > 0} F_{\lambda_k}$, avec $ad_X : F_k \rightarrow F_k, ad_X^2 = -\lambda_k Id$.*

⁽¹⁾ Irma, Université Louis Pasteur, 7 rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex.
e-mail : delzant@math.u-strasbg.fr

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{G}$. Calculons la forme de Jordan de

$$ad_X^C \in End(\mathcal{G} \otimes C)$$

Si Y est un vecteur propre de cet endomorphisme et λ la valeur propre associée, on a :

$$(1) \quad [X, Y] = \lambda Y$$

Soit $y \in C^\infty(M)$ définie par :

$$(2) \quad \sigma(X, Y) = y$$

Comme X conserve σ , On déduit de (1) et (2) :

$$X.y = \lambda y$$

Soit ϕ_t le flot du champ de vecteur X . La fonction $y \circ \phi_t$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}y = \lambda y$$

Comme M est compacte, cette fonction de t est bornée. On a donc nécessairement $\lambda \in iR$. Ceci établi i).

Soit $\mathcal{G}_0$ l'espace de Jordan associé à la valeur propre 0. Montrons que la restriction de ad_X^2 y est nulle. Sinon, il existe un vecteur cyclique Y d'ordre 3, c'est à dire un Y_0 tel que

$$[X, Y_0] = Y_1 \neq 0; [X, Y_1] = Y_2 \neq 0; [X, Y_2] = 0$$

Comme ci-dessus, on pose $y_1 = \sigma(X, Y_0)$, $y_2 = \sigma(X, Y_1)$ de sorte que la fonction y_i est un hamiltonien de Y_i ; alors

$$(3) \quad \frac{d}{dt}y_1 \circ \phi_t = \sigma(X, Y_1) \circ \phi_t = y_2 \circ \phi_t$$

Comme $[X, Y_2] = 0$, la fonction y_2 est constante le long des trajectoires de X . Si cette constante est non nulle, (3) montre que y_1 est arbitrairement grand ce qui est impossible sur une variété compacte. Ainsi la fonction y_2 est identiquement nulle, et le champ hamiltonien associé Y_2 est aussi nul. Ceci établi ii).

Soit $\mathcal{G}_{i\lambda}$ l'espace de Jordan associé à la valeur propre $i\lambda$. Montrons qu'en fait c'est un espace propre. Sinon, il existe un vecteur cyclique d'ordre 2, Y , c'est-à-dire que si l'on définit Z par :

$$(4) \quad [X, Y] = i\lambda Y + Z$$

on a

$$(5) [X, Z] = i\lambda Z$$

Comme $i\lambda \neq 0$, les formules suivantes définissent des hamiltoniens y, z de Y, Z :

$$(6) \quad i\lambda z = \sigma(X, Z) \quad ; i\lambda y + z = \sigma(X, Y)$$

Comme ci-dessus, on note ϕ_t le flot de X . Les fonctions $y(t) = y \circ \phi_t$ et $z(t) = z \circ \phi_t$ sont bornées et satisfont le systèmes d'équations :

$$(7) \quad \frac{d}{dt}(z(t)) = i\lambda z(t) \quad ; \frac{d}{dt}(y(t)) = i\lambda y(t) + z(t)$$

D'où la solution

$$(8) z(t) = z(0)e^{i\lambda t} \quad ; y(t) = (y(0) + z(0)t)e^{i\lambda t}$$

Ainsi, z doit être identiquement nulle, contradiction. Ceci établi iii) et iv) en résulte. $\diamond$

Lemme 2 *Si $\mathcal{G}$ est nilpotente, $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{X}_\sigma^h$ est un idéal central. En particulier $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est centrale et $\mathcal{G}$ est nilpotente en 2 coups.*

Démonstration. Comme $\mathcal{G}$ est nilpotente, si $X \in \mathcal{G}$ les valeurs propres de ad_X sont nulles. Si restreint à $\mathcal{H}$, ad_X est non nul, il existe un $Y \in \mathcal{H}$, et donc hamiltonien, tel que :

$$[X, Y] = Z \neq 0 \quad [X, Z] = 0$$

Notons y un hamiltonien de Y . Soit $z = \sigma(X, Y)$ de sorte que $X.z = cte$. Cette constante doit être nulle car sur une variété compacte, z admet un point critique. Comme $[X, Y] = Z$, $X.y$ est un hamiltonien de Z et $X.y = z + A$. Comme z est constante le long des orbites de X cela n'est possible que si $z = -A$ identiquement : z est constante et Z est nul contradiction. $\diamond$

Lemme 3 *Si $\mathcal{G}$ est résoluble, $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est abélienne, autrement dit $\mathcal{G}$ est métabelienne. Mieux, $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{X}_\sigma^h$ est abélienne.*

Comme $\mathcal{G}$ est résoluble, l'algèbre $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est nilpotente et contenue dans $\mathcal{H}$; en appliquant le lemme 2, on voit que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est abélienne, et $\mathcal{G}$ est métabelienne. Pour la seconde assertion, raisonnons par l'absurde. Si $\mathcal{H}$ est nilpotente, il n'y a rien à montrer, toujours d'après I.2. Sinon, il existe un $X \in \mathcal{H}$ tel que ad_X admette une valeur propre non nulle, donc imaginaire pure $i\lambda$. Quitte à remplacer X par $\frac{1}{\lambda}X$, on peut trouver Y et Z tels que :

$$[X, Y] = Z \quad [X, Z] = -Y$$

Ainsi, Y et Z sont dans $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ et ces deux éléments commutent. Comme X est globalement hamiltonien, on peut en choisir un hamiltonien x . On pose $z = \sigma(X, Y)$. La fonction $Y.z$ est constante car Y et Z commutent. En calculant cette constante en un extremum de z , on voit donc que $Y.z = 0$. Comme $Y.x$ est un hamiltonien de Z , $Y.x = z + C$, ou C est une constante. Comme $Y.z = 0$ cela implique que $z = -C$; en dérivant, on obtient $Z = 0$ contradiction. $\diamond$

Lemme 4. *Si $\mathcal{G}$ est semi-simple, $\mathcal{G}$ est compacte.*

Démonstration. En effet comme toutes les valeurs propres des opérateurs ad_X sont imaginaires pures, la forme de Killing est négative. Comme l'algèbre de Lie est semi-simple la forme de Killing est donc définie négative. $\diamond$.

Lemme 5 *Si $\mathcal{G} = \mathcal{R} + \mathcal{S}$ est une décomposition de Levi de $\mathcal{G}$, alors $[\mathcal{R}, \mathcal{S}] = 0$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{S}$ est semi-simple, $[\mathcal{S}, \mathcal{S}] = \mathcal{S}$ et si $X \in \mathcal{S}$, X est globalement hamiltonien. Montrons que la restriction de ad_X à $\mathcal{R}$ n'a pas de valeurs propres imaginaires pures $i\lambda, \lambda \neq 0$. Le résultat suivra, car $\mathcal{S}$ étant compacte, $ad_X : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ est diagonalisable avec des valeurs propres imaginaires pures : si il n'a que 0 comme valeur propre, il doit être nul. Sinon, quitte à remplacer X par $\frac{X}{\lambda}$, on peut trouver deux éléments Y et Z dans $\mathcal{R}$ tels que $[X, Y] = Z, [X, Z] = -Y$. Il en résulte que Y et Z sont globalement hamiltoniens et donc commutent. Mais alors X, Y, Z forment une algèbre de Lie résoluble non commutative de champs globalement hamiltoniens, ce qui est interdit par le lemme 3. $\diamond$.

Les lemmes 2,3,4, 5 sont respectivement les parties *iii),iv),ii)* et *i)* du théorème annoncé dans l'introduction.

Bibliographie.

[A-M] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of mechanics*, seconde édition, Benjamin 1978.

[A] V. I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou 1974 (1976 en français).

[G-S] V. Guillemin, S. Sterneberg, 1984. *Symplectic technics in physics*, Cambridge.

[L-M] P. Libermann, C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*. D. Reidel Publishing Co., 1987.

[M-S] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1995.

[S] J.-M. Souriau, 1970 *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod.

[W] A. Weinstein, 1977 *Lectures on symplectic Manifolds*, CBMS Lectures notes n. 29.