"Leonhard Euler, mathématicien, physicien et théoricien de la musique,"
X. Hascher, A. Papadopoulos, éd.

Les polynômes Eulériens, d'Euler à Carlitz

Dominique Foata

Abstract. The polynomials commonly called "Eulerian" today have been introduced by Euler himself in his famous book "Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac Doctrina serierum" (chap. VII), back in 1755. They have been since thoroughly studied, extended, applied. The purpose of the present paper is to go back to Euler's memoir, find out his motivation and reproduce his derivation, surprisingly partially forgotten. The rebirth of those polynomials in a q-environment is due to Carlitz two centuries after Euler. A brief overview of Carlitz's method is given, as well as a contemporary application of those q-polynomials.

Résumé. Les polynômes, que nous appelons aujourd'hui "Eulériens," ont été introduits par Euler lui-même, dans son livre sur le calcul différentiel, "Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac Doctrina serierum" (chap. VII), en 1755. L'étude de leurs propriétés, leur usage, leurs extensions ont occupé les mathématiciens jusqu'à ce jour. Le but de cet article est de donner un bref aperçu sur toute cette étude, mais surtout de se replonger dans le calcul d'Euler et de s'interroger sur sa motivation. On trouvera également une courte étude de l'extension qu'en a fait Carlitz dans l'algèbre des q-séries, ainsi qu'une application contemporaine des méthodes de ce dernier.

Jacques Bernoulli, le premier mentor d'Euler, avait déjà introduit ses fameux *nombres de Bernoulli*, notés B_{2n} ($n \geq 1$) dans la suite, pour donner une expression pour la somme des n-ièmes puissances des m premiers entiers. Dans son mémoire posthume [Be1713], on trouve sa célèbre formule, que nous reproduisons sous la forme

$$(0.1)\quad \sum_{i=1}^{m} i^n = \frac{m^{n+1}}{n+1} + \frac{m^n}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq r \leq n/2} \binom{n+1}{2r} m^{n-2r+1} (-1)^{r+1} B_{2r},$$

où n, $m \geq 1$. Une fois connue la suite (B_{2n}) des nombres de Bernoulli, on voit que la sommation dans le membre de droite ne contient que $\lfloor n/2 \rfloor$ termes, quel que soit le nombre m de puissances n-ièmes qu'on veut sommer. Les nombres de Bernoulli B_{2n} peuvent être définis par leur fonction génératrice

$$(0.2)\qquad \frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} B_{2n},$$

les premières valeurs étant:

n	1	2	3	4	5	6	7
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6

Il faut noter qu'à part le premier terme $-u/2$, il n'y a pas de terme de rang impair dans le développement, une propriété facile à vérifier. D'autre part, le facteur $(-1)^{n+1}$ et les premières valeurs dans la table indiquent que tous ces nombres sont strictement *positifs*, ce qui est vrai pour tout n.

Au vu de la formule de Bernoulli (0.1), Euler a certainement pensé qu'il y avait aussi une expression analogue pour la somme alternée $\sum_{i=1}^m i^n(-1)^i$. A la place des nombres de Bernoulli, il a introduit une autre suite de nombres (G_{2n}) $(n \geq 1)$, qu'on a appelé dans les siècles suivants *nombres de Genocchi* du nom, cette fois, du mentor de Peano [Ge1852]. Ceux-ci sont liés aux nombres de Bernoulli par la formule

$$G_{2n} = 2(2^{2n}-1)B_{2n} \qquad (n \geq 1) \tag{0.3}$$

et leurs premières valeurs sont les suivantes

n	1	2	3	4	5	6	7
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227

Des relations (0.2) et (0.3) on tire immédiatement la fonction génératrice des nombres de Genocchi sous la forme :

$$\frac{2u}{e^u+1} = u + \sum_{n\geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n}. \tag{0.4}$$

La formule obtenue par Euler pour la somme alternée $\sum_{i=1}^m i^n(-1)^i$ est analogue à celle de Bernoulli. Il suffit de connaître les $\lfloor n/2 \rfloor$ premiers nombres de Genocchi, pour faire le calcul. Le résultat obtenu par Euler est ainsi le suivant.

Théorème 0.1. *Soit* (G_{2n}) $(n \geq 1)$ *la suite des nombres définis par la relation* (0.3) *(ou par* (0.4)*). Si* $n = 2p \geq 2$, *on a l'identité*

$$\sum_{k=1}^m k^{2p}(-1)^k = (-1)^m \frac{m^{2p}}{2} + \sum_{k=1}^p \binom{2p}{2k-1}(-1)^{m+k+1}\frac{G_{2k}}{4k} m^{2p-2k+1}, \tag{0.5}$$

tandis que si $n = 2p+1$, *il vient :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^{2p+1}(-1)^k &= (-1)^m \frac{m^{2p+1}}{2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2p+1}{2k-1}(-1)^{m+k+1}\frac{G_{2k}}{4k} m^{2p-2k+2} + (-1)^{p+1}\frac{G_{2p+2}}{4(p+1)}. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Si les nombres G_{2n} définis par (0.3) apparaissent effectivement dans l'ouvrage précité d'Euler, avec la suite des premières valeurs, il n'est pas évident que ces nombres soient des entiers, et encore moins qu'ils soient impairs. Ce dernier résultat est une conséquence du petit théorème de Fermat et du théorème de von Staudt-Clausen, démontré un siècle plus tard (voir, à ce sujet, l'ouvrage classique de Nielsen [Ni23] consacré entièrement à l'étude des nombres de Bernoulli et des nombres et polynômes dérivés).

Il semble que les deux identités (0.5) et (0.6) obtenues par Euler n'aient pas eu le retentissement qu'on aurait pu imaginer. En revanche, la découverte effective des *polynômes Eulériens*, qu'il a faite pour les obtenir a été fondamentale par la suite. Nous nous proposons de présenter cette découverte, en faisant simplement une lecture contemporaine de son approche.

Il a fallu attendre Carlitz [Ca54] et presque deux siècles pour que ces polynômes obtiennent une extension dans l'algèbre des q-séries. Nous terminons l'article par une présentation de la méthode de Carlitz. En revanche, la riche combinatoire des polynômes Eulériens et de leurs extensions n'est pas ici racontée. Elle nécessiterait un plus long mémoire.

1. La découverte des polynômes

Au lieu de calculer a priori la somme $\sum\limits_{i=1}^{m} i^n(-1)^i$, Euler introduit le *polynôme* $\sum\limits_{i=1}^{m} i^n t^i$, l'exprime à l'aide des polynômes $\sum\limits_{i=1}^{m} i^{n-k}t^i$ $(1\le k\le n)$. Chemin faisant, il fait apparaître une suite de polynômes $A_n(t)$ $(n\ge 0)$ dans son calcul, qui sont les polynômes Eulériens, qu'il caractérise par une simple récurrence. Après coup, il lui suffit de faire $t=-1$ dans l'expresion trouvée pour établir le théorème 0.1. Voici sa méthode.

Soit $(a_i(x))$ $(i\ge 0)$ une suite de polynômes en la variable x et soit t une autre variable. Pour tout entier $m\ge 1$ on a l'identité banale :

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i(x)t^i = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m} a_{i-1}(x)t^i = a_0(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)t^i - a_m(x)t^m. \tag{1.1}$$

Considérons alors l'opérateur $\Delta = \sum\limits_{k\ge 0}\dfrac{(-1)^k}{k!}D^k$, où D est l'opérateur usuel de dérivation. Un polynôme $p(x)$ étant donné, on définit

$$a_i(x) := \Delta^{m-i}p(x) \quad (0\le i\le m);$$
$$\mathbf{S}(p(x),t) := \sum_{i=1}^{m}\Delta^{m-i}p(x)\,t^i = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\,t^i.$$

Comme D commute avec Δ on a $\mathbf{S}(D^k p(x),t) = D^k\mathbf{S}(p(x),t)$ pour tout $k\ge 0$, de sorte qu'en utilisant (1.1) on obtient :

$$a_0(x) + \mathbf{S}(p(x),t) - p(x)t^m = a_0(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)t^i - a_m(x)t^m$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m} a_{i-1}(x)t^i = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m} \Delta a_i(x)\, t^i$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} D^k a_i(x)\, t^i = \frac{1}{t}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=1}^{m} D^k a_i(x)\, t^i$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\mathbf{S}(D^k p(x), t) = \frac{1}{t}\Big(\mathbf{S}(p(x),t) + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!}\mathbf{S}(D^k p(x),t)\Big).$$

D'où l'identité

$$\text{(1.2)} \quad \mathbf{S}(p(x),t) = \frac{1}{t-1}\Big(p(x)t^{m+1} - a_0(x)t + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!}\mathbf{S}(D^k p(x),t)\Big).$$

Explicitons cette identité lorsque $p(x) = x^n$ $(n \geq 0)$ et lorsque $x = m$. On vérifie tout d'abord la relation:

$$\text{(1.3)} \qquad \Delta^i x^n = (x-i)^n \quad (0 \leq i \leq m).$$

C'est banalement vrai pour $i = 0$ pour tout $n \geq 0$. Pour $i \geq 0$, on a

$$\Delta^{i+1}x^n = \Delta\Delta^i x^n = \Delta(x-i)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-i)^{n-k} = (x-(i+1))^n. \quad \square$$

Par conséquent,

$$\mathbf{S}(x^n,t) = \sum_{i=1}^{m}\Delta^{m-i}x^n\, t^i = \sum_{i=1}^{m}(x-(m-i))^n\, t^i.$$

Posons $S(x^n,t) := \mathbf{S}(x^n,t)\mid_{\{x=m\}}$. On obtient

$$\text{(1.4)} \qquad S(x^n,t) = \sum_{i=1}^{m} i^n t^i.$$

D'autre part,

$$\text{(1.5)} \qquad a_0(m) = \Delta^m x^n \mid_{\{x=m\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ 0, & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

L'identité (1.2), lorsque $p(x) = x^n$ et $x = m$, devient donc:

$$S(x^n,t) = \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} - a_0(m)t + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}S(D^k x^n,t)\Big)$$
$$= \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} - a_0(m)t$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}S(n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},t)\Big),$$

et finalement

$$\text{(1.6)} \ S(x^n,t) = \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} - a_0(m)t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}S(x^{n-k},t)\Big).$$

Une autre démonstration de l'identité (1.6) consiste, pour $m \geq 1$, $0 \leq k \leq m$ et $n \geq 0$, à poser $s(k,m,n) := (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{m} i^{n-k} t^i$, de sorte que $s(0,m,n) = \sum_{i=1}^{m} i^n t^i$ et à établir l'identité précédente sous la forme :

$$s(0,m,n) = \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} - a_0(m)t + \sum_{k=1}^{n} s(k,m,n)\Big),$$

avec toujours $a_0(m) = 1$ si $n = 0$ et 0 si $n \geq 1$. Cette identité est banale à vérifier pour $m = 1$ quel que soit $n \geq 0$. Pour $m \geq 2$, on a les relations:

$$s(k,m,n) = (-1)^k \binom{n}{k} m^{n-k} t^m + s(k, m-1, n),$$

de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} s(k,m,n) = \big((m-1)^n - m^n\big) m^{n-k} t^m + \sum_{k=1}^{n} s(k, m-1, n).$$

Par récurrence sur $m \geq 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
s(0,m,n) &= \sum_{i=1}^{m} i^n t^i = m^n t^m + \sum_{i=1}^{m-1} i^n t^n = m^n t^m + s(0, m-1, n) \\
&= m^n t^m + \frac{1}{t-1}\Big((m-1)^n t^m - a_0(m-1)t + \sum_{k=1}^{n} s(k, m-1, n)\Big) \\
&= m^n t^m + \frac{1}{t-1}\Big(-a_0(m)t + \sum_{k=1}^{n} s(k,m,n) + m^n t^m\Big) \\
&= \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} - a_0(m)t + \sum_{k=1}^{n} s(k,m,n)\Big). \quad \square
\end{aligned}$$

C'est cette dernière identité que l'on va récrire successivement pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Pour $n = 0$ on a $a_0(m) = 1$ d'après (1.5), d'où

$$S(1,t) = \sum_{i=1}^{m} t^i = \frac{1}{t-1}(t^{m+1} - t) = \frac{t(t^m - 1)}{t-1},$$

comme il est bien connu.

Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, on a $a_0(m) = 0$. L'identité (1.6) donne, en reportant chaque fois les expressions déjà trouvées pour $S(x^k, t)$:

$$\begin{aligned}
S(x,t) &= \frac{1}{t-1}(mt^{m+1} - S(1,t)) = \frac{1}{t-1}\Big(mt^{m+1} - \frac{t(t^m-1)}{t-1}\Big) \\
&= \frac{mt^{m+1}}{t-1}\mathbf{1} - \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^2}\mathbf{1}; \\
S(x^2,t) &= \frac{1}{t-1}\Big(m^2 t^{m+1} - 2S(x,t) + S(1,t)\Big) \\
&= \frac{m^2 t^{m+1}}{t-1}\mathbf{1} - \frac{2mt^{m+1}}{(t-1)^2}\mathbf{1} + \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^3}(\mathbf{t}+\mathbf{1});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(x^3,t) &= \frac{1}{t-1}\Big(m^3t^{m+1} - 3S(x^2,t) + 3S(x,t) - S(1,t)\Big)\\
&= \frac{m^3t^{m+1}}{t-1}\mathbf{1} - \frac{3m^2t^{m+1}}{(t-1)^2}\mathbf{1} + \frac{3mt^{m+1}}{(t-1)^3}(\mathbf{t+1})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^4}(\mathbf{t^2+4t+1});\\
S(x^4,t) &= \frac{1}{t-1}\Big(m^4t^{m+1} - 4S(x^3,t) + 6S(x^2,t) - 4S(x,t) + S(1,t)\Big)\\
&= \frac{m^4t^{m+1}}{t-1}\mathbf{1} - \frac{4m^3t^{m+1}}{(t-1)^2}\mathbf{1} + \frac{6m^2t^{m+1}}{(t-1)^3}(\mathbf{t+1})\\
&\quad - \frac{4mt^{m+1}}{(t-1)^4}(\mathbf{t^2+4t+1}) + \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^5}(\mathbf{t^3+11t^2+11t+1});\\
S(x^5,t) &= \frac{1}{t-1}\Big(m^5t^{m+1} - 5S(x^4,t) + 10S(x^3,t)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 10S(x^2,t) + 5S(x,t) - S(1,t)\Big)\\
&= \frac{m^5t^{m+1}}{t-1}\mathbf{1} - \frac{5m^4t^{m+1}}{(t-1)^2}\mathbf{1} + \frac{10m^3t^{m+1}}{(t-1)^3}(\mathbf{t+1})\\
&\quad - \frac{10m^2t^{m+1}}{(t-1)^4}(\mathbf{t^2+4t+1}) + \frac{5mt^{m+1}}{(t-1)^5}(\mathbf{t^3+11t^2+11t+1})\\
&\quad - \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^6}(\mathbf{t^4+26t^3+66t^2+26t+1}).
\end{aligned}$$

Soit $A_n(t)$ le coefficient de $\dfrac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}}$ dans les expressions de $S(x^n,t)$ calculées ci-dessus pour $n=0,1,2,3,4,5$. On trouve (les polynômes écrits en caractères gras) $A_0(t)=A_1(t)=1$, $A_2(t)=t+1$, $A_3(t)=t^2+4t+1$, $A_4(t)=t^3+11t^2+11t+1$, $A_5(t)=t^4+26t^3+66t^2+26t+1$. On *constate*, d'une part, que pour calculer $S(x^n,t)$, le nouveau polynôme $A_n(t)$ qui apparaît s'obtient par la récurrence

$$(1.7)\qquad A_0(t)=1;\quad A_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}A_k(t)(t-1)^{n-1-k}\quad (n\geq 1);$$

d'autre part, que $S(x^n,t)=\sum\limits_{i=1}^{m} i^nt^i$ s'exprime alors par la formule

$$(1.8)\quad S(x^n,t)=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{n+l}\binom{n}{l}\frac{t^{m+1}A_{n-l}(t)}{(t-1)^{n-l+1}}m^l + (-1)^n\frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}}A_n(t).$$

Une fois ces deux faits observés, il faut alors démontrer que cette nouvelle expression pour $S(x^n,t)$ s'exprime bien à l'aide de ces nouveaux polynômes. En d'autres termes, il faut prouver le théorème suivant.

Theorem 1.1. *Soit* $(A_n(t))$ $(n \geq 0)$ *la suite des polynômes définis par la récurrence* (1.7)*. On a alors l'identité* (1.8)*.*

Aujourd'hui, pour démontrer ce théorème, on pense tout de suite à reporter la formule de récurrence (1.7) dans la formule (1.6), à faire jouer cette récurrence et au prix d'un changement de variables dans les sommes finies "$\sum$" à dégager la formule (1.8). C'est la démonstration qui est présentée en premier. Du temps d'Euler, on n'a pas la notation "$\sum$", encore moins celle des sommes doubles. La formule (1.6) par exemple est écrite :

$$\begin{aligned} S.x^n p^x = \frac{1}{p-1}\Big(x^n p^{x+1} - A^p - nS.x^{n-1}p^x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}S.x^{n-2}p^x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}S.x^{n-3}p^x \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}S.x^{n-4}p^x - \&c.\Big) \end{aligned}$$

Euler est donc conduit à imaginer une autre démonstration, plus conceptuelle, où l'on voit poindre déjà l'indépendance linéaire dans les polynômes.

Pour la première démonstration, on part de l'identité (1.6) et on applique la formule de récurrence (1.7) à tous les termes $S(x^{n-k}, t)$ de la somme, avec k allant de 1 à n. On obtient:

$$\begin{aligned} S(x^n, t) &= \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} S(x^{n-k}, t)\Big) \\ &= \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} S(x^j, t)\Big) \\ &= \frac{1}{t-1}\Big(m^n t^{m+1} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \\ &\qquad \sum_{l=1}^{j} (-1)^{j+l}\binom{j}{l}\frac{t^{m+1}A_{j-l}(t)}{(t-1)^{j-l+1}} m^l + (-1)^j \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{j+1}} A_j(t)\Big) \\ &= \frac{m^n t^{m+1}}{t-1} + \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=l}^{n-1} (-1)^{n+l} \frac{n!}{(n-j)!\, l!\, (j-l)!} \frac{t^{m+1}A_{j-l}(t)}{(t-1)^{j-l+2}} m^l \\ &\qquad + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} A_j(t)(t-1)^{n-j-1}. \end{aligned}$$

Dans la double sommation, on fait le changement de variable $j = k - l$, pour déduire :

$$\begin{aligned} S(x^n, t) = \frac{m^n t^{m+1}}{t-1} + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} t^{m+1} m^l \sum_{k=0}^{n-1-l} \binom{n-l}{k} \frac{A_k(t)}{(t-1)^{k+2}} \\ + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S(x^n,t) &= \frac{m^n t^{m+1}}{t-1} + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \frac{t^{m+1} m^l}{(t-1)^{n-l+1}} \\
&\qquad \sum_{k=0}^{n-1-l} \binom{n-l}{k} A_k(t)(t-1)^{n-l-k-1} + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) \\
&= \frac{m^n t^{m+1}}{t-1} + \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \frac{t^{m+1} m^l}{(t-1)^{n-l+1}} A_{n-l}(t) \\
&\qquad\qquad + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) \\
&= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \frac{t^{m+1} m^l}{(t-1)^{n-l+1}} A_{n-l}(t) + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} A_n(t). \quad \square
\end{aligned}
$$

Récrivons maintenant la démonstration originale d'Euler de la façon suivante. Pour $p(x) = x^n$ avec $n \geq 1$ et $l = 0, 1, \ldots, n$, posons

$$
\begin{aligned}
Y_l &:= S(D^l p(x), t); \\
Z_l &:= \begin{cases} \dfrac{D^l p(m)}{t-1} t^{m+1}, & \text{si } 0 \leq l \leq n-1; \\ \dfrac{D^n p(m)}{t-1} (t^{m+1} - t), & \text{si } l = n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La formule (1.2) écrite en remplaçant successivement $p(x)$ par $D^l p(x)$ pour $l = 0, 1, \ldots, n$ fournit les identités

$$
Y_l = Z_l + \sum_{j=1}^{n-l} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{t-1} Y_{l+j} \quad (0 \leq l \leq n), \tag{1.9}
$$

se rappelant que dans la formule (1.2) le coefficient $a_0(x)$ est nul, lorsqu'on y fait $x = m$, sauf pour $Y_n = S(D^n p(x), t)$, auquel cas il vaut 1. Or, les deux suites $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ forment chacune une base pour l'algèbre des polynômes de degré au plus égal à n. Il suffit, en effet, de remarquer que Y_l et Z_l sont des polynômes de degré $n - l$ $(l = 0, 1, \ldots, n)$. Il existe donc une suite bien déterminée de coefficients $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ telle que l'on ait

$$
Y_0 = \sum_{l=0}^{n} b_l (-1)^l Z_l, \tag{1.10}
$$

soit en utilisant (1.9),

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \sum_{l=0}^{n} b_l (-1)^l \Big(Y_l - \sum_{j=1}^{n-l} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{t-1} Y_{l+j} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(b_k (-1)^k - \sum_{\substack{l+j=k, \\ l \geq 0,\, j \geq 1}} b_l (-1)^l \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{t-1} \Big) Y_k.
\end{aligned}
$$

On en tire, d'abord, $b_0 = 1$, ensuite pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$b_k = \frac{1}{t-1}\Bigl(\frac{b_{k-1}}{1!} + \frac{b_{k-2}}{2!} + \cdots + \frac{b_1}{(k-1)!} + \frac{b_0}{k!}\Bigr)$$

ou encore

$$k!\,(t-1)^k b_k = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} l!\,(t-1)^l b_l (t-1)^{k-1-l}.$$

Par comparaison, avec la récurrence des polynômes Eulériens eux-mêmes, on conclut que

$$b_n = \frac{1}{n!\,(t-1)^n} A_n(t) \quad (n \ge 0).$$

En reportant la valeur de b_n dans (1.10), on retrouve l'identité (1.8). $\square$

2. Le formulaire des polynômes Eulériens

Les polynômes $A_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ définis par la formule de récurrence (1.7) sont unanimement appelés *polynômes Eulériens*. Il est difficile de cerner l'instant où cette appellation est apparue. Formons la série génératrice exponentielle

$$A(t,u) := \sum_{n\ge 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!}.$$

Alors (1.7) est *équivalente* à

$$\begin{aligned} A(t,u) &= 1 + \sum_{n\ge 1} \sum_{\substack{k+l=n \\ 0\le k\le n-1}} A_k(t)\frac{u^k}{k!}\,\frac{(t-1)^{l-1}}{l!} u^l \\ &= 1 + A(t,u) \times \sum_{l\ge 1} \frac{(t-1)^{l-1}}{l!} u^l \\ &= 1 + A(t,u) \frac{1}{t-1}\bigl(\exp(u(t-1)) - 1\bigr); \end{aligned}$$

soit

$$A(t,u) = \sum_{n\ge 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{t-1}{t - \exp(u(t-1))}, \tag{2.1}$$

qui est la traditionnelle fonction génératrice exponentielle des polynômes Eulériens. Elle est explicitement donnée par Euler dans ce même chapitre.

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge 0} \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} \frac{u^n}{n!} &= \frac{e^u}{1 - te^u} = e^u \sum_{j\ge 0} (te^u)^j \\ &= \sum_{j\ge 0} t^j \sum_{n\ge 0} \frac{(u(j+1))^n}{n!} = \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{n!} \sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^n. \end{aligned}$$

Soit encore une définition équivalente des polynômes Eulériens sous la forme

$$\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^n \quad (n\ge 0), \tag{2.2}$$

qui est celle que l'on prend le plus couramment aujourd'hui.

On peut encore récrire l'identité (1.8) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} i^n t^i = -t^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_k(t)}{(1-t)^{k+1}} m^{n-k} + \frac{tA_n(t)}{(1-t)^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Un argument simple sur l'ordre des séries formelles en t montre alors que lorsque m tend vers l'infini, on obtient de nouveau l'identité (2.2). Réciproquement, on peut remplacer chaque fraction $A_k(t)/(1-t)^{k+1}$ du membre de droite de (2.3) par $\sum_{j\ge 0} t^j(j+1)^k$, qui est le membre de droite de (2.2). Un calcul facile montre alors que le membre de droite de (2.3) devient

$$-\sum_{j\ge 0} t^{m+1+j}(m+1+j)^n + t\sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^n = \sum_{i=1}^{m} i^n t^i.$$

Par conséquent, l'identité (2.2) et sa forme *finie* (2.3) ou (1.8) sont aussi *équivalentes.*

La relation

$$A_n(t) = (1+(n-1)t)A_{n-1}(t) + t(1-t)\cdot DA_{n-1}(t) \quad (n\ge 1), \tag{2.4}$$

où D désigne cette fois l'opérateur de dérivation en t, s'obtient de (2.2) de la façon suivante. Le membre de droite de (1.4) est égal à

$$\begin{aligned}(1-t)^n &\sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^{n-1}(1+(n-1)t-nt+(1-t)j)\\ &= (1-t)^n \sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^{n-1}(1-t)(j+1)\\ &= (1-t)^{n+1}\sum_{j\ge 0} t^j (j+1)^n = A_n(t). \quad \square\end{aligned}$$

Enfin, posons $A_n(t) := \sum\limits_{k\ge 0} A_{n,k}t^k$. L'identité (2.2) donne $A_0(t) = (1-t)/(1-t) = 1$. De plus, le terme constant de chaque polynôme $A_n(t)$ est $A_{n,0}=1$. Dans (2.4), le coefficient de t^k ($k\ge 1$) est égal à $A_{n,k}$ à gauche et à $A_{n-1,k}+(n-1)A_{n-1,k-1}+kA_{n-1,k}-(k-1)A_{n-1,k-1}$ à droite. Comme $A_{n,k}=0$ pour $k\ge n\ge 1$, on obtient la formule de récurrence

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1} \quad (1\le k\le n-1)\,; \\ A_{n,0} &= 1 \quad (n\ge 0)\,; \qquad A_{n,k}=0 \quad (k\ge n), \end{aligned} \tag{2.5}$$

de sorte que chaque $A_n(t)$ est un polynôme à coefficients entiers *positifs*. Les premières valeurs des coefficients $A_{n,k}$, appelés universellement *nombres Eulériens*, sont consignées dans la table suivante.

k=	0	1	2	3	4	5	6
n=1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

En résumé, les polynômes Eulériens $A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k} t^k$ $(n \geq 0)$ sont définis, *de façon équivalente*, par les relations :

(1.7) $A_0(t) = 1; \quad A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(t)(t-1)^{n-1-k}$ $(n \geq 1)$;

(1.8) $\sum_{i=1}^{m} i^n t^i = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \frac{t^{m+1} A_{n-l}(t)}{(t-1)^{n-l+1}} m^l + (-1)^n \frac{t(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} A_n(t),$
pour $m \geq 1$, $n \geq 0$;

(2.1) $\sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{t-1}{t - \exp(u(t-1))}$;

(2.2) $\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{j \geq 0} t^j (j+1)^n \quad (n \geq 0)$;

(2.4) $A_0(t) = 1$, $A_n(t) = (1+(n-1)t)A_{n-1}(t) + t(1-t) \cdot DA_{n-1}(t)$ $(n \geq 1)$;

(2.5) $A_{n,k} = (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1} \quad (1 \leq k \leq n-1),$
$A_{n,0} = 1 \quad (n \geq 0); \qquad A_{n,k} = 0 \quad (k \geq n);$

(2.6) $A_{n,k} = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i (k-i+1)^n \binom{n+1}{i} \quad (0 \leq k \leq n-1);$

(2.7) $x^n = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{x+k}{n} A_{n,k} \quad (n \geq 0).$

Les deux dernières relations, non mentionnées plus haut, sont faciles à établir. Pour la première on utilise (2.2) en partant de $A_n(t)(1-t)^{-(n+1)}$. Pour la seconde, appelée souvent *identité de Worpitzky*, on calcule simplement le coefficient de t^k dans $(1-t)^{n+1} \sum_{n \geq 0} t^n (j+1)^n$. Comme signalé plus haut, les trois premières relations (1.7), (1.8) et (2.1) sont dues à Euler. La seconde (1.8) est fondamentale pour la suite et semble à avoir été oubliée depuis. Les autres relations ont été obtenues ultérieurement par divers auteurs.

3. Nombres tangents et démonstration du Théorème 0.1

Les *nombres tangents* T_{2n-1} $(n \ge 1)$ sont définis comme les coefficients du développement en série de Taylor de $\operatorname{tg} u$, soit

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} u &= \sum_{n\ge1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} T_{2n-1}\\ &= \frac{u}{1!}1 + \frac{u^3}{3!}2 + \frac{u^5}{5!}16 + \frac{u^7}{7!}272 + \frac{u^9}{9!}7936 + \frac{u^{11}}{11!}353792 + \cdots\end{aligned}$$

Or, à partir de la formule (0.4), on peut calculer la fonction génératrice des nombres de Genocchi G_{2n} $(n \ge 1)$. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} G_{2n} &= \sum_{n\ge1} \frac{(iu)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n G_{2n}\\ &= \frac{2iu}{e^{iu}+1} - iu = \frac{iu(1-e^{iu})}{1+e^{iu}} = u\operatorname{tg}(u/2).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{n\ge1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} G_{2n} = u\operatorname{tg}(u/2) = \sum_{n\ge1} \frac{u^{2n}}{2^{2n-1}(2n-1)!} T_{2n-1},$$

et donc

$$n\,T_{2n-1} = 2^{2n-2} G_{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_{2n} \qquad (n \ge 1). \tag{3.1}$$

Les premières valeurs des nombres tangents T_{2n-1} $(n \ge 1)$, comparés aux nombres de Genocchi apparaissent dans la table suivante.

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227
T_{2n-1}	1	2	16	272	7936	353.792	22.368.256

Remplaçons maintenant t par -1 et u par iu dans l'identité (1.9), qui fournit la fonction génératrice exponentielle des polynômes Eulériens. On obtient:

$$\sum_{n\ge0} A_n(-1)\frac{(iu)^n}{n!} = \frac{2}{1+e^{-2iu}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1} i^{n-1} A_n(-1)\frac{u^n}{n!} &= \frac{1}{i}\Bigl(\frac{2}{1+e^{-2iu}} - 1\Bigr) = \frac{1}{i}\frac{1-e^{-2iu}}{1+e^{-2iu}} = \operatorname{tg} u\\ &= \sum_{n\ge1} T_{2n-1}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

On en tire

$$A_{2n}(-1) = 0, \quad A_{2n-1}(-1) = (-1)^{n-1} T_{2n-1} \quad (n \ge 1). \tag{3.2}$$

Pour terminer la démonstration du Théorème 0.1, on procède comme suit. Avec $t=-1$ l'identité (1.11) devient

$$\sum_{k=1}^{m} k^n(-1)^k = (-1)^m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{A_k(-1)}{2^{k+1}} m^{n-k} + \frac{(-1)A_n(-1)}{2^{n+1}}.$$

Lorsque $n=2p\geq 2$ les identités (3.2) entraînent:

$$\sum_{k=1}^{m} k^{2p}(-1)^k = (-1)^m \frac{m^{2p}}{2} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p}{2k-1} (-1)^{m+k-1} \frac{T_{2k-1}}{2^{2k}} m^{2p-2k+1}. \tag{3.3}$$

En utilisant la relation $n\,T_{2n-1} = 2^{2n-2}G_{2n}$ $(n\geq 1)$, on peut récrire (3.3) à l'aide des nombres de Genocchi sous la forme:

$$\sum_{k=1}^{m} k^{2p}(-1)^k = (-1)^m \frac{m^{2p}}{2} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p}{2k-1} (-1)^{m+k+1} \frac{G_{2k}}{4k} m^{2p-2k+1}. \tag{3.4}$$

Lorsque $n=2p+1\geq 1$ on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} k^{2p+1}(-1)^k &= (-1)^m \frac{m^{2p+1}}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2p+1}{2k-1} (-1)^{m+k+1} \frac{T_{2k-1}}{2^{2k}} m^{2p-2k+2} + (-1)^{p+1} \frac{T_{2p+1}}{2^{2p+2}}; \end{aligned} \tag{3.5}$$

soit en termes des nombres de Genocchi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} k^{2p+1}(-1)^k &= (-1)^m \frac{m^{2p+1}}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2p+1}{2k-1} (-1)^{m+k+1} \frac{G_{2k}}{4k} m^{2p-2k+2} + (-1)^{p+1} \frac{G_{2p+2}}{4(p+1)}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 0.1, originellement due à Euler.

4. Les polynômes q-Eulériens de Carlitz

Bien que l'algèbre des q-séries ait été introduite par Heine [He1846], il a fallu attendre Carlitz [Ca54] pour qu'un premier q-analogue des polynômes Eulériens soit effectivement construit. Rappelons que la *q-factorielle montante* (voir, par exemple, [GR90]) est définie pour chaque élément ω d'un anneau et chaque variable q par

$$(\omega;q)_k := \begin{cases} 1, & \text{if } k=0; \\ (1-\omega)(1-\omega q)\cdots(1-\omega q^{k-1}), & \text{if } k\geq 1; \end{cases}$$

$$(\omega;q)_\infty := \prod_{k\geq 0}(1-\omega q^k).$$

Les coefficients *q-binomiaux* sont eux définis par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}} \quad (0 \le k \le n),$$

les q-analogues des entiers et des factorielles par

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1};$$

$$[n]!_q := \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q.$$

Comme $\lim\limits_{q\to 1}(t;q)_{n+1} = (1-t)^{n+1}$ et $\lim\limits_{q\to 1}[j+1]_q = j+1$, au vu de la définition (1.10) des polynômes Eulériens, il est naturel, comme l'a fait Carlitz [Ca54], de définir les polynômes q-Eulériens $A_n(t,q)$ par

$$\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} = \sum_{j\ge 0} t^j([j+1]_q)^n \quad (n \ge 0). \tag{4.1}$$

De nouveau, par analogie avec les polynômes Eulériens, on peut remplacer la série infinie de (4.1) par une somme *finie* et chercher à l'exprimer comme combinaison linéaire de fractions $A_k(t,q)/(t;q)_{k+1}$ $(0 \le k \le n)$. A partir de (4.1) on trouve, en effet:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} t^j([j]_q)^n &= \sum_{k=0}^{m-1} t^{k+1}([k+1]_q)^n \\
&= t\sum_{j\ge 0} t^j([j+1]_q)^n - \sum_{j\ge 0} t^{m+1+j}([m+1+j]_q)^n \\
&= t\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} - t^{m+1}\sum_{j\ge 0} t^j(1+q+\cdots+q^j+q^{j+1}+\cdots+q^{j+m})^n \\
&= t\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} - t^{m+1}\sum_{j\ge 0} t^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+q+\cdots+q^j)^k(q^{j+1}+\cdots+q^{j+m})^{n-k} \\
&= t\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} - t^{m+1}\sum_{j\ge 0} t^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[j+1]_q^k\, q^{(j+1)(n-k)}[m]_q^{n-k} \\
&= t\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} - t^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}[m]_q^{n-k}\sum_{j\ge 0}(tq^{(n-k)})^j[j+1]_q^k.
\end{aligned}$$

On est ainsi conduit à l'identité

$$\sum_{j=1}^{m} t^j([j]_q)^n = t\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} - t^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}[m]_q^{n-k}\frac{A_k(tq^{n-k},q)}{(tq^{n-k};q)_{k+1}}, \tag{4.2}$$

apparemment (?) nouvelle, qui q-généralise l'identité (1.11). Naturellement, les définitions (4.1) et (4.2) des polynômes $A_n(t,q)$ sont *équivalentes*.

D'autres définitions équivalentes s'obtiennent à partir de (4.1) de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{A_n(t,q)}{(t;q)_{n+1}} &= \sum_{j\ge 0} t^j([j+1]_q)^n = \sum_{j\ge 0} t^j\Bigl(\frac{1-q^{j+1}}{1-q}\Bigr)^n\\
&= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{j\ge 0} t^j(1-q^{j+1})^n\\
&= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{j\ge 0} t^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k q^{jk+k}\\
&= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k q^k\sum_{j\ge 0}(tq^k)^j\\
&= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k q^k}{1-tq^k},
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$A_n(t,q) = \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k q^k (t;q)_k\,(tq^{k+1};q)_{n-k}. \tag{4.3}$$

L'expression $A_n(t,q)$ est un polynôme en t, de degré au plus égal à n; en fait de degré au plus égal à $(n-1)$, puisque le coefficient de t^n dans $A_n(t,q)$ est égal à

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{(1-q)^n}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(-1)^{n+1}q^{n(n+1)/2}\\
&= -\frac{(-1)^{n+1}q^{n(n+1)/2}}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0.
\end{aligned}$$

Pour voir que $A_n(t,q)$ est un polynôme *à la fois en t et en q*, on récrit (4.3) sous la forme:

$$\begin{aligned}
(1-q)A_n(t,q) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k q^k\frac{(t;q)_k}{(1-q)^{n-1}}\,(tq^{k+1};q)_{n-k};\\
(1-tq^n)A_{n-1}(t,q) &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k q^k\frac{(t;q)_k}{(1-q)^{n-1}}\,(tq^{k+1};q)_{n-k}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&(1-q)A_n(t,q)-(1-tq^n)A_{n-1}(t,q)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(-q)^k\frac{(t;q)_k}{(1-q)^{n-1}}(tq^{k+1};q)_{n-k}+(-q)^n\frac{(t;q)_n}{(1-q)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (-q)^{j+1} \frac{(1-t)(tq;q)_j}{(1-q)^{n-1}} (tqq^{j+1};q)_{n-1-j}$$
$$- q(1-t)(-q)^{n-1} \frac{(tq;q)_{n-1}}{(1-q)^{n-1}}$$
$$= -q(1-t) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-q)^j \frac{(tq;q)_j}{(1-q)^{n-1}} (tqq^{j+1};q)_{n-1-j}$$

et donc

$$(4.4) \quad (1-q)A_n(t,q) = (1-tq^n)A_{n-1}(t,q) - q(1-t)A_{n-1}(tq,q).$$

Avec $A_n(t,q) := \sum_{j=0}^{n-1} t^j\, A_{n,j}(q)$, on déduit de (4.4) que les coefficients $A_{n,j}(q)$ satisfont la recurrence

$$(4.5) \qquad A_{n,j}(q) = [j+1]_q\, A_{n-1,j}(q) + q^j [n-j]_q\, A_{n-1,j-1}(q).$$

Ceci montre que chaque $A_n(t,q)$ est un polynôme en t, q à coefficients *entiers et positifs.*

Les premières valeurs des polynômes $A_n(t,q)$ sont reproduites dans la table ci-après:

$A_0(t,q) = A_1(t,q) = 1$; $A_2(t,q) = 1 + tq$; $A_3(t,q) = 1 + 2tq(q+1) + t^2q^3$;
$A_4(t,q) = 1 + tq(3q^2 + 5q + 3) + t^2q^3(3q^2 + 5q + 3) + t^3q^6$;
$A_5(t,q) = 1 + tq(4q^3 + 9q^2 + 9q + 4) + t^2q^3(6q^4 + 16q^3 + 22q^2 + 16q + 6) + t^3q^6(4q^3 + 9q^2 + 9q + 4) + t^4q^{10}$.

Enfin, en utilisant $1/(t;q)_{n+1} = \sum_{j\ge 0} {n+j \brack n}_q t^j$, l'identité (4.1) entraîne

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i}(q) t^i \sum_{j\ge 0} {n+j \brack n}_q t^j = \sum_{k\ge 0} ([k+1]_q)^n t^k,$$

d'où pour chaque k la formule *à la Worpitzky*

$$(4.6) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i}(q) {k+n-i \brack n}_q = ([k+1]_q)^n.$$

Si Carlitz a introduit les précédents q-analogues $A_n(t,q)$ des polynômes Eulériens, il a fallu attendre encore une vingtaine d'années pour dégager une bonne interprétation combinatoire de ces polynômes, obtenue aussi par lui-même [Ca75].

5. Un usage contemporain des q-polynômes de Carlitz

Il eût été intéressant de trouver une application de l'identité nouvelle (3.2), en spécialisant le paramètre t, comme l'avait fait Euler pour la formule (1.11), qui se déduit, rappelons-le, de (3.1) en y faisant $q = 1$. Pour démontrer le théorème 0.1, il faut, de plus, prouver les formules (2.2) reliant polynômes Eulériens aux nombres tangents. Dans l'univers des q-analogues, il importe, de toute façon, de trouver un q-analogue de ces dernières formules. On y parvient de la manière suivante. On a d'abord

$$A_{2n}(-q^{-n}, q) = 0 \quad (n \geq 1), \tag{5.1}$$

une identité qui se déduit des propriétés de symétrie des coefficients $A_{n,j}(q)$ (voir (3.5)). Posons, en effet, $A_{n,j}(q) = q^{j(j+1)/2}A^*_{n,j}(q)$. On montre en premier lieu (voir [Ca54]) que $A^*_{n,j}(q) = A^*_{n,n-j-1}(q)$, d'où

$$A_{n,j}(q) = q^{-n(n-1)/2+nj}A_{n,n-j-1}(q),$$

de sorte que $A_{2n}(q^{-n}, q)$ peut s'écrire:

$$\begin{aligned} A_{2n}(-q^{-n}, q) &= \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n,j}(q)(-q^{-n})^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(A_{2n,j}(q)(-q^{-n})^j + A_{2n,2n-j-1}(q)(-q^{-n})^{2n-j-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en écrivant $A_n(t, q) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} t^j q^{j(j+1)/2}A^*_{n,j}(q)$, où chaque $A^*_{n,j}(q)$ est un polynôme, on obtient

$$q^{\binom{n}{2}}A_{2n+1}(-q^{-n}, q) = \sum_{j=0}^{2n}(-1)^j q^{\binom{n}{2}-nj+j(j+1)/2}A^*_{n,j}(q),$$

où l'exposant $\binom{n}{2}$ $-nj+j(j+1)/2$ de q, qui est un trinôme du second degré en j, est toujours positif. L'expression définie par

$$T_{2n+1}(q) := (-1)^n q^{\binom{n}{2}}A_{2n+1}(-q^{-n}, q), \tag{5.2}$$

est donc un *polynôme* à coefficients entiers. De plus,

$$T_{2n+1}(1) = (-1)^n A_{2n+1}(-1, 1) = (-1)^n A_{2n+1}(-1) = T_{2n+1}, \tag{5.3}$$

le nombre tangent, par les identités (2.2).

On trouvera dans [FH08] une démonstration *combinatoire* de (5.1) et du fait que $T_{2n+1}(q)$ est un polynôme. C'est aussi par des techniques combinatoire, en montrant que $T_{2n+1}(q)$ est la fonction génératrice d'une classe de permutations par une certaine statistique "cmaj," appelée "indice majeur comprimé," que l'on peut prouver que $T_{2n+1}(q)$ est à coefficients entiers *positifs*. On n'a pas de démonstration analytique de cette propriété à ce jour. Les premières valeurs de ces polynômes sont reproduites ci-après.

$T_1(q) = 1$; $T_3(q) = 1 + q$; $T_5(q) = 2 + 4q + 4q^2 + 4q^3 + 2q^4$;
$T_7(q) = 5 + 17q + 29q^2 + 39q^3 + 46q^4 + 46q^5 + 39q^6 + 29q^7 + 17q^8 + 5q^9$.

On dit qu'avec la positivité des coefficients de $T_{2n+1}(q)$ et les formules (5.1) et (5.3), on a obtenu un *q-analogue* des formules (2.2). Il y en a d'autres (voir [FH08a]).

Remerciements. L'auteur remercie Guo-Niu Han, qui a bien voulu relire une première version de cet article et lui faire part de plusieurs remarques judicieuses.

Bibliographie

[Be1713] Bernoulli, Jacques, *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*, Basileae: impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.

[Ca54] Carlitz, Leonard, q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), pp. 332–350.

[Ca75] Carlitz, Leonard, A combinatorial property of q-Eulerian numbers, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), pp. 51–54.

[Eul1755] Euler, Leonhard, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac Doctrina serierum*, Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, St. Petersbourg, 1755, chap. VII ("Methodus summandi superior ulterius promota").

[FH08] Foata, Dominique; Han, Guo-Niu, Doubloons and new q-tangent numbers, 2008, manuscrit, 17 pages, to appear in *Quarterly J. Math.* (`http://www-irma.u-strasbg.fr/~foata/paper/pub111.html`).

[FH08a] Foata, Dominique; Han, Guo-Niu, The q-tangent and q-secant numbers via basic Eulerian polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138** (2010), pp. 385-393.

[Ge1852] Genocchi, Angelo, Intorno all'espressione generale de'numeri Bernulliani, *Ann. Sci. Mat. Fis.*, **3** (1852), pp. 395-405.

[GR90] Gasper, George; Rahman, Mizan, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Math. and its Appl. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[He1847] Heine, Heinrich Eduard, Über die Reihe…, *J. reine angew. Math.*, **34** (1847), pp. 210-212.

[Ni23] Nielsen, Niels, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-Villars, Paris, 1923.

Dominique Foata
Institut Lothaire
1, rue Murner
F-67000 Strasbourg, France
`foata@math.u-strasbg.fr`