Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B06c (1982) 11 pp.
[Formerly : Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1982, 191/S–05, p. 114–128.]

COMBINATOIRE DES IDENTITÉS SUR LES POLYNÔMES DE MEIXNER

PAR

DOMINIQUE FOATA (*)

RÉSUMÉ. — Une identité bilinéaire prolongeant la formule du noyau de Poisson pour les polynômes de Meixner est obtenue par des méthodes combinatoires. Ces mêmes méthodes fournissent aussi une extension multilinéaire de cette identité.

ABSTRACT. — A bilinear identity extending the formula of the Poisson kernel for the Meixner polynomials is derived by means of combinatorial methods. The same methods also provide a multilinear extention of that identity.

1. Introduction. — Les polynômes de Meixner $m_n(x;\beta,c)$ $(n \geq 0)$ peuvent être définis par leur fonction génératrice

$$\sum_{n\geq 0} m_n(x;\beta,c)\frac{u^n}{n!} = \Bigl(1-\frac{u}{c}\Bigr)^x (1-u)^{-x-\beta} \tag{1.1}$$

(*cf.* Erdélyi et al. [6, vol. 2, pp. 225–226 et vol. 3, pp. 273–274] ou Chihara [4, pp. 175-177].) Notons $(a)_n$ les factorielles montantes

$$(a)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) \quad (n \geq 1)$$

et

$${}_2F_1(a_1,a_2;b_1;x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n\,(a_2)_n}{(b_1)_n}\frac{x^n}{n!}$$

la série hypergéométrique usuelle. Les polynômes de Meixner ont encore une représentation naturelle comme série ${}_2F_1$. On a, en effet, (*cf.* [6, vol. 2, p. 225])

$$\begin{aligned} m_n(x;\beta,c) &= (\beta)_n\,{}_2F_1(-n,x;\beta;1-c^{-1}) \\ &= (\beta+x)_n\,{}_2F_1(-n,x;1-\beta-n-x;c^{-1}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

(*) Publié grâce à une subvention du Fonds PCAC pour l'aide et le soutien à la recherche, Centre de Recherche de Mathématiques Appliquées, Université de Montréal, Montréal, P.Q., Canada H3C 3J7.

Askey [1, p. 14 et 2] utilise la notation $M_n(x;\beta,c) = {}_2F_1(-n,x;\beta;1-c^{-1})$. Dans le présent article, seule la version $m_n(x;\beta,c)$ sera utilisée et les formules seront donc transcrites dans cette seule notation. En particulier, la formule dite du *noyau de Poisson* [1, p. 15 (3.40W)] s'écrit

$$(1.3)\quad \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{(\beta)_n\, n!}\, m_n(x;\beta,c) m_n(y;\beta,c) \\ = \Bigl(1-\frac{u}{c}\Bigr)^{x+y} (1-u)^{-x-y-\beta}\, {}_2F_1\Bigl(-x,-y;\beta;\frac{u(c^{-1}-1)}{(1-u/c)^2}\Bigr).$$

Le but de cet article et de sommer une série bilinéaire plus générale que celle donnée en (1.3) en s'inspirant du modèle fourni par Erdélyi [5] pour les polynômes de Laguerre. On obtient

$$(1.4)\quad \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{n!} (\beta)_n\, {}_2F_1(-n,-x;\gamma;a)\, {}_2F_1(-n,-y;\delta;b) \\ = (1-u)^{-\beta} \sum_{r\ge 0} \frac{(\beta)_r\,(-x)_r\,(-y)_r}{(\gamma)_r\,(\delta)_r\, r!} \Bigl(\frac{abu}{(1-u)^2}\Bigr)^r \\ \times {}_2F_1\Bigl(\beta{+}r;-x{+}r;\gamma{+}r;-\frac{au}{1-u}\Bigr)\, {}_2F_1\Bigl(\beta{+}r;-y{+}r;\delta{+}r;-\frac{bu}{1-u}\Bigr).$$

Lorsque $\beta=\gamma=\delta$ et $a=b=1-c^{-1}$, le premier membre de (1.4) se réduit, moyennant (1.2), au premier membre de (1.3). Quant aux deux fonctions ${}_2F_1$ du second membre, elle se réduisent, par le théorème binomial à $((1-u/c)(1-u)^{-1})^{x+r}$ et $((1-u/c)(1-u)^{-1})^{y+r}$, respectivement. On retrouve alors le second membre de (1.3). Ainsi (1.4) $\Rightarrow$ (1.3).

Enfin, lorsque $y=0$ et $a=b=1-c^{-1}$, la formule (1.4) donne la fonction génératrice suivante

$$(1.5)\quad \sum_{n\ge 0} \frac{u^n}{(\gamma)_n n!}\, (\beta)_n\, m_n(x;\gamma,c) = (1-u)^{-\beta}\, {}_2F_1\Bigl(\beta,-x;\gamma;\frac{u(c^{-1}-1)}{1-u}\Bigr),$$

qui implique à son tour (1.1) lorsque $\gamma=\beta$.

On peut enfin appliquer le modèle multilinéaire développé pour les polynômes d'Hermite [7, 8, 12] et de Laguerre [10, 11] pour prolonger (1.4) au cas du produit de plusieurs polynômes de Meixner. La troisième fonction hypergéométrique d'Appell à k variables, qui s'écrit [3, p. 73]

$$F_3^{(k)}(a_1,\dots,a_k;b_1,\dots,b_k;c;u_1,\dots,u_k) \\ = \sum_{n_1\ge 0,\dots,n_k\ge 0} \frac{(a_1)_{n_1}\dots(a_k)_{n_k}(b_1)_{n_1}\dots(b_k)_{n_k}}{(c)_{n_1+\dots+n_k}} \frac{u_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{u_k^{n_k}}{n_k!}$$

est le principal ingrédient de la formule ainsi prolongée. Dans celle-ci (voir (1.6) ci-dessous), les symboles $\sum\limits_{(n_{ij})}$ (resp. $\sum\limits_{(r_{ij})}$) indiquent des sommations sur toutes les suites (n_{ij}) (resp. (r_{ij}) $(1 \le i < j \le k)$ de $k(k-1)$ entiers positifs. Pour $1 \le i < j \le k$, on pose $n_{ji} = n_{ij}$, $r_{ji} = r_{ij}$ et pour $i = 1, 2, \ldots, k$ on adopte la notation

$$n_{i\star} = \sum_j n_{ij}, \quad r_{i\star} = \sum_j r_{ij} \quad (1 \le j \le k;\, j \neq i).$$

Enfin, a_i, γ_i, y_i $(1 \le i \le k)$ et u_{ij}, β_{ij} $(1 \le i < j \le k)$ sont des variables, avec de nouveau la convention $u_{ji} = u_{ij}$, $\beta_{ji} = \beta_{ij}$ pour $1 \le i < j \le k$.

La formule multilinéaire prolongeant (1.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad &\sum_{(n_{ij})} \prod_{i<j} \frac{u_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} (\beta_{ij})_{n_{ij}} \prod_i {}_2F_1(-n_{i\star}, -y_i; \gamma_i; a_i)\\ &= \prod_{i<j} (1-u_{ij})^{-\beta_{ij}} \sum_{(r_{ij})} \prod_{i<j} \frac{(\beta_{ij})_{r_{ij}} (-y_i)_{r_{ij}} (-y_j)_{r_{ij}}}{r_{ij}!} \Big(\frac{a_i a_j u_{ij}}{(1-u_{ij})^2}\Big)^{r_{ij}}\\ &\times \prod_i \frac{1}{(\gamma_i)_{r_{i\star}}} F_3^{(k-1)}\Big(\beta_{i1} + r_{i1}, \ldots, \beta_{ik} + r_{ik}; -y_i + r_{i1}, \ldots, -y_i + r_{ik};\\ &\qquad\qquad \gamma_i + r_{i\star}; -\frac{a_i u_{i1}}{1-u_{i1}}, \ldots, -\frac{a_i u_{ik}}{1-u_{ik}}\Big).\end{aligned}$$

Les termes diagonaux n_{ii}, r_{ii}, u_{ii}, β_{ii} n'existent pas et les fonctions d'Appell ci-dessus sont bien à $(k-1)$ variables. Lorsque $k = 2$, on retrouve immédiatement (1.4). On a ainsi

$$(1.7)\qquad (1.6) \Rightarrow (1.4) \Rightarrow (1.5) \Rightarrow (1.1) \quad \text{et} \quad (1.4) \Rightarrow (1.3) \Rightarrow (1.1).$$

Naturellement, l'utilisation d'une formule comme (1.6) reste subordonnée aux propriétés analytiques des fonctions hypergéométriques à plusieurs variables. Le présent article mettra donc l'accent sur la *façon* de démontrer ces formules et cette façon est de nature *combinatoire*. On se propose ici de démontrer l'identité (1.4). Celle-ci implique, d'après (1.7), toutes les autres formules sur les polynômes de Meixner, à l'exclusion de (1.6). La méthode de preuve utilisée est essentiellement celle qui nous avait permis d'obtenir combinatoirement la formule de Hille-Hardy-Erdélyi pour les polynômes de Laguerre [11]. On se reportera donc constamment à ce dernier mémoire ainsi qu'au second article sur les polynômes de Meixner [9]. On fait apparaitre le premier membre de (1.4) comme la fonction génératrice de certains triplets (σ, φ, ψ) ou σ est une permutation, et φ, ψ

deux modèles introduits dans [9] et appelés *endofonctions de Meixner* (*cf.* section 2). Il s'agit ensuite de calculer cette même fonction génératrice en utilisant les propriétés géométriques de ces endofonctions et d'obtenir ainsi le second membre de (1.4). Pour ce faire, on fait appel à des lemmes combinatoires de [11], rappelés en section 3 et on construit (dans la section 4) une bijection entre les triplets (σ, φ, ψ) et des suites finies de modèles combinatoires dont la fonction génératrice est précisement le second membre de (1.4).

La démonstration de (1.6) n'est pas reproduite. Elle peut être calquée sur celle de la formule multilinéaire concernant les polynômes de Laguerre [11].

2. Endofonctions de Meixner. — Comme dans [9], on appelle *endofonction de Meixner* sur un ensemble fini S tout couple $\varphi = ((A, B), f)$ où (A, B) est une partition ordonnée de S et f une application de S dans S dont la restriction f_A de f à la partie A est injective et la restriction f_B à B est une permutation de B.

On identifie toute endofonction de Meixner $\varphi = ((A, B), f)$ avec son graphe associé dont les sommets sont les éléments de S et dans lequel un arc va de v à v' si et seulement si $f(v) = v'$. On dessine en trait continu (resp. pointillé) les arcs issus de sommets appartenant à A (resp. B).

Une *endofonction de Meixner* est alors une collection de cycles dont tous les arcs sont en trait continu et de cycles en trait pointillé, dont chaque sommet est l'extrémité d'au plus un chemin en trait continu (voir Fig. 1).

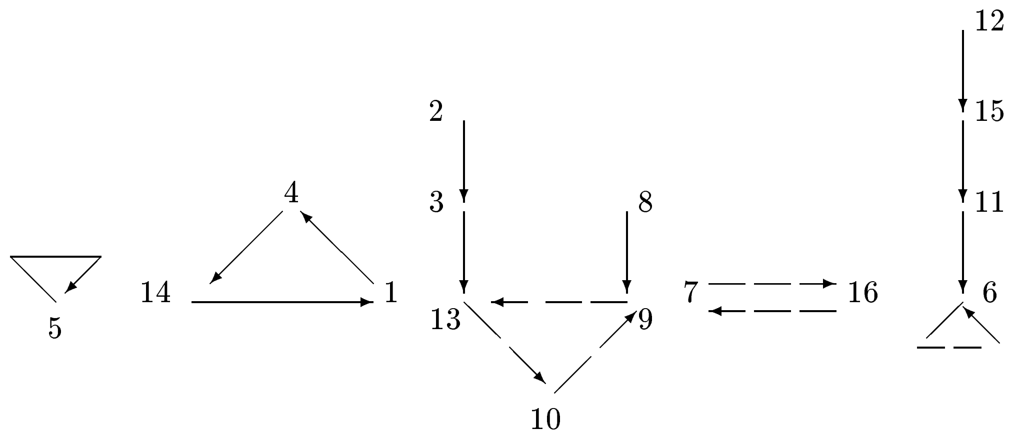

Fig. 1

Soit cont(φ) (resp. point(φ)) le nombre de cycles de φ en trait continu (resp. pointillé). Le poids de $\varphi = ((A, B), f)$ est défini par

$$w(\gamma, -x, -a; \varphi) = \gamma^{\mathrm{cont}(\varphi)}(-x)^{\mathrm{point}(\varphi)}(-a)^{|B|}. \tag{2.1}$$

Comme démontré dans [9] l'expression $(\gamma)_n\,{}_2F_1(-n,-x;\gamma;a)$, égale à $\sum\binom{n}{i}(-x)_i(\gamma+i)_{n-i}(-a)^i$ $(0\le i\le n)$, est le polynôme générateur des endofonctions de Meixner sur $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ par le poids $w(\gamma,-x,-a;.)$. En d'autres termes, on a :

$$(\gamma)_n\,{}_2F_1(-n,-x;\gamma;a)=\sum_{\varphi} w(\gamma,-x,-a;\varphi), \tag{2.2}$$

où φ varie dans l'ensemble des endofonctions de Meixner sur $[n]$. Par ailleurs, si $\mathrm{cyc}(\sigma)$ désigne le nombre de cycles d'une permutation σ, on pose $w_\beta(\sigma)=\beta^{\mathrm{cyc}(\sigma)}$. L'identité

$$(\beta)_n=\sum_{\sigma} w_\beta(\sigma), \tag{2.3}$$

où la sommation est sur l'ensemble des permutations σ de $[n]$, est bien connue (*cf.* [13, p. 71]). Il résulte alors de (2.2) et (2.3) que l'on a

$$\begin{aligned}(\beta)_n\,(\gamma)_n\,{}_2F_1(-n,-x;\gamma;a)\,(\delta)_n\,{}_2F_1(-n,-y;\delta;b)\\ =\sum_{(\sigma,\varphi,\psi)} w_\beta(\sigma)\,w(\gamma,-x,-a;\varphi)\,w(\delta,-y,-b;\psi),\end{aligned} \tag{2.4}$$

où la sommation s'étend à tous les triplets (σ,φ,ψ) avec σ une permutation de $[n]$ et φ, ψ deux endofonctions de Meixner sur $[n]$. Le premier membre de (1.4) peut donc s'écrire

$$\sum_n \frac{u^n}{n!\,(\gamma)_n\,(\delta)_n}\sum_{(\sigma,\varphi,\psi)} w_\beta(\sigma)\,w(\gamma,-x,-a;\varphi)\,w(\delta,-y,-b;\psi). \tag{2.5}$$

D'autre part, le second membre de (1.4) peut se développer

$$\begin{aligned}&\sum_q(\beta)_q\,\frac{u^q}{q!}\sum_r\frac{(\beta)_r\,(-x)_r\,(-y)_r}{(\gamma)_r\,(\delta)_r\,r!}\\ &\qquad\sum_{i,j}\frac{(\beta+r)_i\,(-x+r)_i}{(\gamma+r)_i\,i!}\,\frac{(\delta+r)_i\,(-y+r)_j}{(\delta+r)_j\,j!}\,\frac{(-au)^{r+i}(-bu)^{r+j}}{(1-u)^{2r+i+j}},\end{aligned}$$

ou encore par le théorème binomial appliqué à $(1-u)^{-2r-i-j}$ comme

$$\begin{aligned}&\sum_n\frac{u^n}{n!\,(\gamma)_n\,(\delta)_n}\sum\binom{n}{q,r,s,i,j}(\beta)_q\,(\beta)_r\,(\beta+r)_i\,(\beta+r)_j\,(\gamma+r+i)_{n-r-i}\\ &\qquad\times(\delta+r+j)_{n-r-j}\,(-x)_{r+i}\,(-y)_{r+j}\,(2r+i+j)_s\,(-a)^{r+i}\,(-b)^{r+j},\end{aligned}$$

où $q+r+s+i+j=n$. Pour établir l'identité (1.4), qui dit simplement que les deux expressions (2.5) et (2.6) sont égales, il suffit de démontrer l'identité *polynômiale*

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad &\sum_{(\sigma,\varphi,\psi)} w_\beta(\sigma)\, w(\gamma,-x,-a;\varphi)\, w(\delta,-y,-b;\psi)\\ &\quad=\sum \binom{n}{q,r,s,i,j}(\beta)_q\,(\beta)_r\,(\beta+r)_i\,(\beta+r)_j\\ &\qquad\quad\times(\gamma+r+i)_{n-r-i}(\delta+r+j)_{n-r-j}\,(-x)_{r+i}\,(-y)_{r+j}\\ &\qquad\quad\times(2r+i+j)_s\,(-a)^{r+i}\,(-b)^{r+j}\quad(q+r+s+i+j=n).\end{aligned}$$

3. Les sommations. — Rappelons quelques définitions et résultats du précédent article sur les polynômes de Laguerre [11].

Soient (A,B) une partition ordonnée de $[n]$ et h une injection de A dans $[n]=A+B$. Si $\mathrm{cyc}(h)$ désigne le nombre de cycles de h, on pose

$$(3.1)\qquad w_\beta(h)=\beta^{\mathrm{cyc}(h)}$$

Lemme 3.1 (voir [11]). — *Si $|A|=i$, $|B|=j$ et $i+j=n$, alors*

$$\sum_h w_\beta(h)=(\beta+j)_i,$$

la sommation étant sur toutes les injections h de A dans $A+B$.

Lemme 3.2 (voir [11]). — *Soit (I,J,R) une partition ordonnée d'un ensemble telle que $|I|=i$, $|J|=j$, $|R|=r$. Alors*

$$(3.3)\qquad \sum_\theta w_\beta(\theta)=(\beta)_r\,(\beta+r)_i\,(\beta+r)_j,$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des permutations θ de $I+J+R$ satisfaisant à $\theta(J)\cap I=\emptyset$.

Soit (I,J,R,S) une partition ordonnée d'un ensemble telle que $|I|=i$, $|J|=j$, $|R|=r$, $|S|=s$. Trois sortes de chemins dont les sommets sont pris dans $I+J+R+S$ sont maintenant introduits, les *a-chemins*, les *b-chemins* et les *ab-chemins*. Les a-chemins (resp. b-chemins) ont tous leurs sommets dans S à l'exception de l'extremité qui est dans I (resp. J). Un ab-chemin a aussi tous ses sommets dans S, à l'exception d'un seul, qui appartient à R et ne se trouve pas nécessairement à l'extrémité (voir Fig. 2).

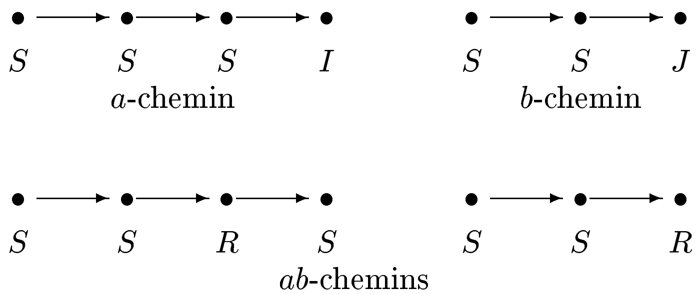

Fig. 2

Un graphe G dont les sommets sont les éléments de $I+J+R+S$ est dit *Erdélyien* sur (I,J,R,S) si ses parties connexes ne sont composées que de a-chemins, b-chemins et ab-chemins.

Lemme 3.3 (voir [11]). — *Si $|I|=i$, $|J|=j$, $|R|=r$, $|S|=s$, le nombre de graphes Erdélyiens sur (I,J,R,S) est égal à $(i+j+2r)_s$.*

La démonstration de l'identité (2.7) consiste alors à associer de façon bijective à chaque triplet (σ,φ,ψ) de la sommation du premier membre, une partition ordonnée (Q,R,S,I,J) de $[n]$ et une suite $(\sigma',\theta,G,h,h',\xi,\xi')$ ayant les propriétés suivantes :

(i) σ' est une permutation de Q ;

(ii) θ est une permutation de $R+I+J$ satisfaisant à $\theta(J)\cap I=\emptyset$;

(iii) G est un graphe Erdélyien sur (I,J,R,S) ;

(iv) (resp. (v)) h (resp. h') est une injection de $Q+R+J$ (resp. $Q+R+I$) dans $[n]$;

(vi) (resp. (vii)) ξ (resp. ξ') est une permutation de $R+I$ (resp. $R+J$).

L'identité suivante doit, de plus, être vérifiée

$$\begin{aligned}(3.4)\quad & w_\beta(\sigma)\, w(\gamma,-x,-a;\varphi)\, w(\delta,-y,-b;\psi)\\ &\quad =(-a)^{|R+I|}(-b)^{|R+J|}w_\beta(\sigma')w_\beta(\theta)w_\gamma(h)w_\delta(h')w_{-x}(\xi)w_{-y}(\xi').\end{aligned}$$

Si une telle bijection est établie, on obtient bien (2.7) pour les raisons suivantes : d'abord le multinomial $\binom{n}{q,r,s,i,j}$ est le nombre de partitions ordonnées (Q,R,S,I,J) de $[n]$ telles que $|Q|=q$, $|R|=r$, $|S|=s$, $|I|=i$, $|J|=j$. Ensuite, si (Q,R,S,I,J) est une telle partition, on a

$$\sum_{\sigma'} w_\beta(\sigma')=(\beta)_q \qquad \text{[d'après (2.3)]};$$

$$\sum_{\theta} w_\beta(\theta)=(\beta)_r\,(\beta+r)_i\,(\beta+r)_j \qquad \text{[d'après (3.3)]};$$

$$\sum_{G} 1=(i+j+2r)_s \qquad \text{[d'après le Lemme 3.4]};$$

$$\sum_h w_\gamma(h) = (\gamma + r + i)_{n-r-i} \quad \text{et}$$

$$\sum_{h'} w_\delta(h') = (\delta + r + j)_{n-r-j} \qquad \text{[d'après (3.2)]};$$

$$\sum_\xi w_{-x}(\xi) = (-x)_{r+i} \quad \text{et}$$

$$\sum_{\xi'} w_{-y}(\xi') = (-y)_{r+j} \qquad \text{[d'après (2.3)]}.$$

Compte tenu de toutes ces expressions, on voit que la sommation du second membre de (3.4) donne bien le second membre de (2.7). Reste donc à établir la bijection annoncée.

4. La bijection. — Partons d'un triplet (σ, φ, ψ) avec σ une permutation de $[n]$ et $\varphi = ((A, B), f)$, $\psi = ((C, D), g)$ deux endofonctions de Meixner sur $[n]$. Quand on superpose les graphes de ces trois configurations sur un ensemble de n sommets étiquetés, on a d'abord les cycles de σ — appelons-les *β-cycles* — puis les chemins et cycles de $\varphi = ((A, B), f)$ et de $\psi = ((C, D), g)$. Les n sommets se répartissent donc en quatre classes $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$ et $B \cap D$. D'apres l'expression du poids donnée en (2.1), on peut considérer que les sommets de B (resp. D) portent la marque $(-a)$ (resp. $(-b)$). Par commodité, on dira qu'un sommet est *a-marqué*, *b-marqué* ou *ab-marqué* suivant qu'il appartient a $B \cap C$, $A \cap D$, ou $B \cap D$. Les sommets dans $A \cap C$ sont *non marqués*.

Deux sommets distincts v et v' sont dits *liés* si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) v est b-marqué et v' est a-marqué ;

(ii) v et v' sont dans le même β-cycle ;

(iii) les sommets appartenant à ce β-cycle et situés entre v et v' sont tous non marqués.

La partition ordonnée (Q, R, S, I, J) associée à (σ, φ, ψ) est ainsi définie : si les sommets d'un même β-cycle sont tous non marqués, tous ces sommets sont rangés dans la classe Q. Si un sommet est, ou bien ab-marqué, ou bien b-marqué *et* lié, il est mis dans R. Si un sommet est a-marqué (resp. b-marqué) et *non* lié, il va dans I (resp. J). Enfin, S se compose de tous les sommets restants. Notons que S englobe aussi les sommets a-marqués et liés.

Si R' désigne l'ensemble de toutes les extrémités des ab-chemins, on a

$$B = R' + I \qquad \text{et} \qquad D = R + J, \tag{4.1}$$

d'où

$$A = [n] \setminus (R' + I) \qquad \text{et} \qquad C = [n] \setminus (R + J). \tag{4.2}$$

Dans la figure 3, on a représenté les β-cycles d'un triplet $\sigma, \varphi, \psi)$ avec les sommets marqués a, b, ou ab. Les sommets non marqués apparaissent comme de simples points. L'appartenance de chaque sommet à un bloc de la partition (Q, R, S, I, J) est indiquée par la lettre correspondante. Les flèches en pointillé sont les arcs ayant pour origine les sommets qui sont, ou bien ab-marqués, ou bien a-marqués, ou encore b-marqués mais non liés.

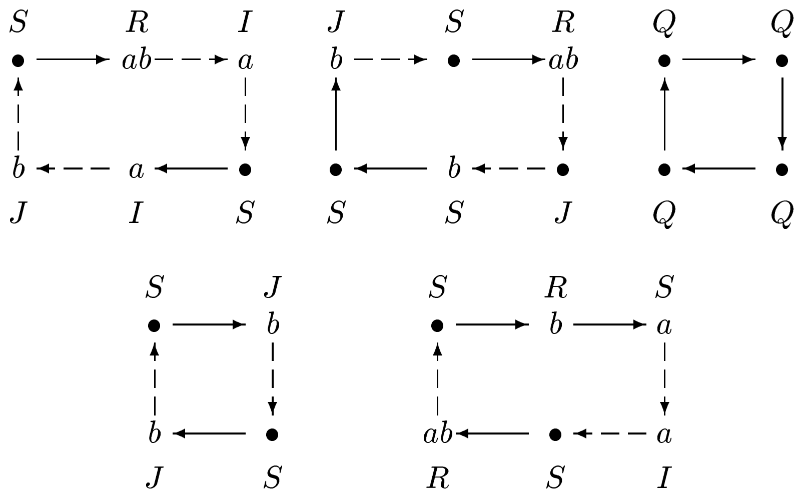

Fig. 3

Effaçons les flèches en pointillé du graphe de la figure 3. On obtient, d'une part, une collection de cycles dont tous les sommets sont dans Q — donc une *permutation* σ' de Q — d'autre part, une collection de a-chemins, b-chemins et ab-chemins, au sens de la section 3, formant un *graphe Erdélyien* G *sur* (I, J, R, S). De plus, comme chaque a-chemin (resp. b-chemin, resp. ab-chemin) contient exactement un sommet dans I (resp. J, resp. R), les arcs en pointillé sont la représentation graphique d'une *permutation* θ de $I+J+R$. Enfin, comme il n'y a pas de flèche en pointillé issue de sommet b-marqué et lié, la permutation θ satisfait à $\theta(J)\cap I = \emptyset$.

Évidemment $\operatorname{cyc}(\sigma) = \operatorname{cyc}(\sigma') + \operatorname{cyc}(\theta)$, d'où

$$w_\beta(\gamma) = w_\beta(\sigma')w_\beta(\theta). \tag{4.3}$$

Les trois premiers éléments de la suite $(\sigma', \theta, G, h, h', \xi, \xi')$ ont été définis. Les quatre derniers h, h', ξ, ξ' sont simplement $h = f_A$, $h' = g_C$, $\xi = f_B$, $\xi' = g_D$, c'est-à-dire respectivement, les restrictions de f à A, de g à C, de f à B et de g à D. D'apres (4.2) et la définition des endofonctions de Meixner, h (resp. h') est une *injection* de $[n]\setminus(R'+I)$ (resp. $[n]\setminus(R+J)$) dans $[n]$. D'après (4.1) et toujours cette définition, ξ (resp. ξ') est une *permutation* de $R'+I$ (resp. $R+J$). De plus, d'après (2.1), (3.1), (4.1) et (4.2), et compte tenu de $|R'|=|R|$, on a

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad w(\gamma,-x,-a;\varphi)&=\gamma^{\operatorname{cont}(\varphi)}(-x)^{\operatorname{point}(\varphi)}(-a)^{|B|}\\&=\gamma^{\operatorname{cyc}(h)}(-x)^{\operatorname{cyc}(\xi)}(-a)^{|R'+I|}\\&=w_\gamma(h)w_{-x}(\xi)(-a)^{|R+I|}\end{aligned}$$

et de même

$$(4.5)\qquad w(\delta,-y,-b;\psi)=w_\delta(h')w_{-y}(\xi')(-b)^{|R+J|}.$$

Prenant en compte (4.3),(4.4) et (4.5), on obtient bien (3.4).

Réciproquement, si l'on part d'une partition ordonnée (Q,R,S,I,J) de $[n]$ et d'une suite $(\sigma',\theta,G,h,h',\xi,\xi')$ ayant les propriétés (i)-(vii) de la section 3, il est immédiat de reconstruire le triplet (σ,φ,ψ). Les trois éléments σ',θ,G fournissent la permutation σ et les couples (h,ξ) et (h',ξ') les endofonctions de Meixner φ et ψ respectivement.

Remerciements. — Une version antérieure de cet article a été relue attentivement par Jacques Désarménien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Askey. — *Orthogonal Polynomial and Special Functions.* — Regional Conference Series in Appl. Math. 21, S.I.A.M., Philadelphia, 1975.

[2] R. Askey and J. Wilson. — Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, 79p., Memoir Amer. Math. Soc., Providence, à paraître.

[3] W. N. Bailey. — *Generalized hypergeometric series.* — Cambridge Tracts in Math. and Math .Physics 32, Cambridge Univ. Press, 1935.

[4] Th. S. Chihara. — *An introduction to Orthogonal Polynomials.* — Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] A. Erdélyi. — Transformationen einer gewissen nach Produkten konfluenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden Reihe, *Compositio Math.*, t. **6**, 1939, p. 336-347.

[6] A. Erdélyi et al. — *Higher Transcendental Functions.* — vol. 2 et 3, McGrawHill, New York, 1953.

[7] D. Foata. — Some Hermite polynomial identities and their combinatorics, *Adv. Appl. Math.*, t. **2**, 1981, p. 250-259.

[8] D. Foata and A.M. Garsia. — A combinatorial approach to the Mehler formulas for Hermite polynomials, in "Relations between Combinatorics and other parts of Mathematics [D. K. Ray-Chaudhuri, éd.]," Proc. Symposia in Pure Math. 34, pp. 163-179, Amer. Math. Soc, Providence, 1979.

[9] D. Foata et J. Labelle. — Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner, *Europ. J. Combinatorics*, t. **4**, 1983, p. 305–311.

[10] D. Foata et V. Strehl. — Une extension multilinéaire de la formule d'Erdélyi pour les produits de fonctions hypergéométriques confluentes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **293**, 1981, p. 517-520.

[11] D. Foata and V. Strehl. — Combinatorics of Laguerre polynomials, *Enumeration and Design* [Waterloo. June-July 1982; D.M. Jackson and S.A. Vanstone, eds.], p. 123–140. — Toronto, Academic Press, 1984.
[12] J. D. Louck. — Extension of Kibble-Slepian's formula for Hermite polynomials using Boson operator methods, *Advances Appl. Math*, t. **2**, 1981, p. 239-249.
[13] J. Riordan. — *An introduction to Combinatorial Analysis*. — J. Wiley, New York, 1958.

Dominique FOATA,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg, France.