

Mémoire de Master :
Réduction des singularités de champs de vecteurs
analytiques en dimension 2 et étude de l'existence de
séparatrices en dimensions 2 et 3

Amaury Bittmann
sous la direction de Daniel Panazzolo et Loïc Teyssier

6 juin 2013



Remerciements

Je tiens à remercier Loïc Teyssier et Daniel Panazzolo pour m'avoir aussi bien guidé et aidé lors de la rédaction de ce mémoire : Loïc Teyssier pour avoir su m'écouter et me conseiller lorsque je lui présentais mon travail ; Daniel Panazzolo pour avoir été présent et disponible dès que j'en avais le besoin, et pour avoir su répondre de manière extrêmement claire à chacune de mes questions. Chacun d'eux à également fait preuve d'une gentillesse exemplaire.

Je souhaite également remercier mon camarade Mohamad Maassarani pour tout le temps qu'il a passé à réfléchir avec moi sur nombre de problèmes que j'ai pu rencontrer lors de mon travail. Son aide a été plus que bénéfique.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de démontrer deux résultats fondamentaux dans la théorie des feuilletages holomorphes singuliers d'une surface complexe. Il s'agit plus précisément du théorème de réduction d'une singularité en des singularités élémentaires d'un feuilletage holomorphe en dimension 2 (dû à Bendixson, Andreev, Seidenberg, Lefschetz, Dumortier, et dont la preuve a été simplifiée par Van Essen), ainsi que du théorème de l'existence d'une séparatrice pour une singularité (dû à Camacho et Sad). Dans une première partie, après quelques rappels sur les notions de feuilletage holomorphe et de singularité, nous introduisons les principaux outils de la preuve du théorème de réduction de singularités : les éclatements et la multiplicité d'intersection. Dans une seconde partie, nous commençons par "améliorer" la réduction développée dans la première partie, puis nous étudions le principal ingrédient de la preuve du théorème de Camacho-Sad : l'indice de Camacho-Sad en un point singulier relativement à une séparatrice du feuilletage. Enfin, dans un troisième et dernière partie, nous donnerons un exemple de champ de vecteur holomorphe en dimension 3, avec une singularité isolée, mais ne possédant pas de séparatrice.

Table des matières

1	Notations	5
2	Théorème de réduction des singularités d'un feuilletage holomorphe du plan	6
2.1	Introduction au théorème de réduction des singularités	6
2.1.1	Champs de vecteurs holomorphes en dimension 2 et feuilletages holomorphes singuliers	6
2.1.2	Éclatement d'un point et théorème de réduction de singularité	10
2.1.3	Quelques compléments sur les éclatements	13
2.2	Notions de multiplicité d'intersection et de multiplicité d'une singularité	18
2.2.1	Multiplicité d'intersection	18
2.2.2	Multiplicité d'une singularité d'un feuilletage	21
2.2.3	Multiplicité et éclatement d'un point cusp	26
2.3	Preuve du théorème de réduction des singularités	29
3	Théorème d'existence d'une séparatrice en dimension 2	31
3.1	Compléments sur le théorème de réduction : vers une "forme finale" de réduction	31
3.2	Existence de séparatrice pour une singularité élémentaire irréductible	33
3.2.1	Cas où l'indice de la singularité est non-nul : la singularité n'est pas un noeud-col	33
3.2.2	Cas où l'indice de la singularité est nul : la singularité est un noeud-col	37
3.3	Indice de Camacho-Sad	38
3.4	Indice de Camacho-Sad après éclatement	42
3.5	Preuve du théorème de Camacho-Sad	44
4	Exemple de non-existence d'une séparatrice en dimension 3	50
4.1	Généralisation des notions vues en dimension 2	50
4.2	Une classe de champs de vecteurs holomorphe n'admettant pas de séparatrice en l'origine	52
4.3	Un exemple d'un champ de vecteur sans séparatrice	58
5	Annexe : prérequis et références	61

1 Notations

(M, D) : un voisinage ouvert de $D \subset M$

$f : (M, D) \longrightarrow (M', D')$: une application f d'un voisinage ouvert de D dans M vers un voisinage ouvert de D' dans M' , telle que $f(D) = D'$

$D(M)$: l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur M (si M est une variété complexe)

$\Lambda^1(M)$: l'ensemble des 1-formes holomorphes sur M (si M est une variété complexe)

$Sing(\mathcal{F})$: lieu des singularités d'un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} d'une variété complexe

$\mathcal{O}(U, p)$: l'anneau des germes de fonctions holomorphes en au voisinage de $p \in U$

$\mathbb{M} := \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$

$\mathbb{E} := \{0\} \times \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{M}$: le diviseur exceptionnel de \mathbb{M}

$\sigma : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{C}^2$: la projection canonique, appelée "blow-down"

$\pi^*\omega$: le tiré en arrière de la 1-forme holomorphe ω sur une surface complexe M' par l'application holomorphe $\pi : M \longrightarrow M'$: par définition, pour tout $(p, v) \in TM$, $(\pi^*\omega)_p(v) = \omega_{\pi(p)}(d\pi_p(v))$.

$\pi^*\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$: le feuilletage "éclaté" par π du feuilletage \mathcal{F}

$\sigma^*\gamma = \tilde{\gamma} = \overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})}$: l'éclatée de la courbe analytique γ contenant $0 \in \mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$: l'anneau des germes de fonctions holomorphes en (X_1, \dots, X_n) au voisinage de $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$: l'anneau des séries formelles en les variables (X_1, \dots, X_n)

$\tilde{\mathbb{C}}^3 = \mathbb{C} \{(z_1, z_2, z_3, [z_1 : z_2 : z_3]) \mid (z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)\} \cup (\{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{CP}^2) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{CP}^2$

$E = \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{CP}^2$

2 Théorème de réduction des singularités d'un feuilletage holomorphe du plan

2.1 Introduction au théorème de réduction des singularités

2.1.1 Champs de vecteurs holomorphes en dimension 2 et feuilletages holomorphes singuliers

Les objets locaux que nous étudierons seront sur des surfaces complexes, et quitte à utiliser des cartes, nous travaillerons en général dans $(\mathbb{C}^2, 0)$.

On considère un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$. Notons $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur U . Soit un champ de vecteur $F \in \mathcal{D}(U)$ qui définit une équation différentielle autonome $\dot{z} = F(z)$. Le théorème d'existence et d'unicité (*c.f.* [I-Y]) nous permet de définir l'application flot, définie par : $\Phi_t(z_0)$ est la "position" au "temps" t de l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = F(z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Définition 2.1. On dit que deux champs de vecteurs $F \in \mathcal{D}(U)$ et $F' \in \mathcal{D}(U')$, de flots respectifs Φ et Φ' , sont biholomorphiquement équivalents s'il existe un biholomorphisme $H : U \rightarrow U'$ tel que $H \circ \Phi_t = \Phi'_t \circ H$, pour tout t tel que les deux membres soient bien définis.

On dit qu'un point $z_0 \in U$ est une singularité de l'équation différentielle définie par F si $F(z_0) = 0$.

Définition 2.2. Une singularité z_0 de $F \in \mathcal{D}(U)$ est dite élémentaire si DF_{z_0} a au moins une valeur propre non nulle. Une singularité z_0 est appelée "point cusp" si DF_{z_0} n'est pas nulle et a deux valeurs propres nulles, autrement dit si DF_{z_0} est nilpotente.

Remarque 2.3. Étant donné un champ de vecteur holomorphe

$$F(x, y) = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{D}(U)$$

on peut lui associer une 1-forme holomorphe

$$\omega = b(x, y)dx - a(x, y)dy \in \Lambda^1(U)$$

ayant les mêmes singularités, et définissant la même équation différentielle grâce à l'équation $\omega_{z(t)} \left(\frac{dz}{dt}(t) \right) = 0$. Réciproquement, on peut définir un champ de vecteur associé à une 1-forme. On s'intéressera donc de manière équivalente à des équations différentielles définies par un champ de vecteur ou par une 1-forme.

On a le théorème important suivant :

Théorème 2.4. (*Théorème du flow-box*) [I-Y] *Un champ de vecteur holomorphe est biholomorphiquement équivalent au champ de vecteur constant $\frac{\partial}{\partial x}$ dans un voisinage suffisamment petit de tout point non singulier.*

Ce théorème a une interprétation en terme de feuilletage holomorphe. Rappelons-en la définition.

Définition 2.5. Un feuilletage holomorphe (régulier, ou non singulier) \mathcal{F} d'une surface complexe M est la donnée d'une atlas $(U_j, \phi_j)_{j \in J}$, où pour tout j , $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^2$, tel que les fonctions de transition (biholomorphes)

$$\varphi_{j,i} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

soient de la forme

$$(x, y) \in U \times V \mapsto (G_{j,i}(x, y), H_{j,i}(y))$$

où $G_{j,i}$ et $H_{j,i}$ sont holomorphes.

Une plaque du feuilletage est un ensemble du type $\phi_j^{-1}(V \times \{c\})$, où V est un ouvert de \mathbb{C} et $c \in \mathbb{C}$.

Si l'on considère deux plaques P et P' dans deux cartes (U, ϕ) et (U', ϕ') respectivement, telles que $U \cap U' \neq \emptyset$, soit P et P' coïncident, soit elles ne s'intersectent pas. On définit donc une relation d'équivalence sur M : deux points p et q de M sont équivalents s'il existe des plaques P_0, \dots, P_n telles que $p \in P_0$, $q \in P_n$ et $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, pour tout $i = 0, \dots, n - 1$.

Les classes d'équivalence sont appelées les feuilles du feuilletage.

Le théorème suivant (basé essentiellement sur le théorème d'inversion locale) nous permet d'avoir plusieurs points de vue équivalents sur la notion de feuilletage holomorphe régulier.

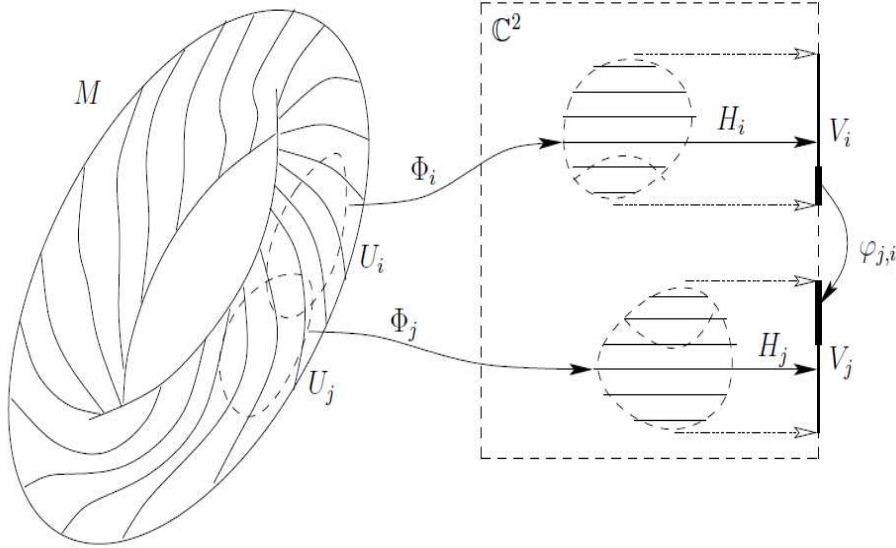


Figure 1. : feuilletage holomorphe (c.f. [Lor])

Théorème 2.6. (c.f. [Ab]) *Un feuilletage holomorphe non singulier \mathcal{F} sur une surface complexe M peut être décrit de manière équivalente par :*

1. *une famille $(U_j, F_j)_{j \in J}$, où pour tout j , F_j est un champ de vecteurs holomorphe non singulier sur l'ouvert U_j , telle que pour tout i et j avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une fonction holomorphe $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas, telle que $F_i|_{U_i \cap U_j} = f_{ij} F_j|_{U_i \cap U_j}$.*
2. *une famille $(U_j, \omega_j)_{j \in J}$, où pour tout j , ω_j est une 1-forme holomorphe non singulière sur l'ouvert U_j , telle que pour tout i et j avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une fonction holomorphe $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas, telle que $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = g_{ij} \omega_j|_{U_i \cap U_j}$.*
3. *une famille $(U_j, f_j)_{j \in J}$, où pour tout j , $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ est une submersion holomorphe, telle que pour tout i et j avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un biholomorphisme $h_{i,j} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ tel que $f_j = h_{i,j} \circ f_i$.*

Voyons maintenant que l'on pourra toujours se ramener au cas où les singularités sont des points isolés.

Théorème 2.7. (c.f. [I-Y] et [Ab]) *Soit $U \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert connexe, $0 \neq F \in \mathcal{D}(U)$ un champ de vecteur holomorphe, et $\Sigma = \{z \in U \mid F(z) = 0\}$ l'ensemble de ses singularités. Alors, il existe un sous ensemble analytique $\Sigma' \subset \Sigma$ de codimension ≥ 2 dans U (i.e. un ensemble de points isolés), et un feuilletage holomorphe \mathcal{F}' de $U \setminus \Sigma'$ dont la restriction à $U \setminus \Sigma$ coïncide avec le feuilletage associé au champ de vecteur F .*

Démonstration. Il suffit de prouver le théorème dans le cas où $\text{codim}(\Sigma) = 1$. L'ensemble des points non-réguliers de Σ est un ensemble analytique de codimension ≥ 2 . Intéressons donc nous aux points réguliers de Σ . Soit $p \in \Sigma$ tel que p soit régulier. Comme $\text{codim}(\Sigma) = 1$, il existe un ouvert $U_p \subset U$ contenant p et $h \in \mathcal{O}(U, p)$ tel que $\Sigma \cap U_p = \{h = 0\}$ et $Dh_p \neq 0$ car p est régulier. Donc, h est irréductible dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}(U_p, p)$: en effet, si $h = h_1 h_2$ avec $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(U_p, p)$, et si on suppose par l'absurde que h_1 et h_2 ne sont pas inversibles (*i.e.* $h_1(p) = h_2(p) = 0$), alors $Dh_p = (Dh_1)_p h_2(p) + h_1(p) (Dh_2)_p = 0$; contradiction.

Écrivons ensuite $F = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y}$, avec $F_1, F_2 \in \mathcal{O}(U_p, p)$. Alors, comme F_1 et F_2 s'annulent sur $\{h = 0\}$ et que h est irréductible, d'après le théorème Nullstellensatz faible, F_1 et F_2 sont divisibles par h . Soit $r = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid h^k | F_1 \text{ et } h^k | F_2\}$. Alors, $F = h^r G$, avec $G \in \mathcal{D}(U_p)$, un champ de vecteurs n'ayant que des singularités isolées. De plus, les feuilletages engendrés par les champs F et G coïncident sur $U_p \setminus \{h = 0\}$, car ils diffèrent par la fonction h qui ne s'annule pas sur cet ouvert. \square

Définition 2.8. Un feuilletage holomorphe singulier sur M est un feuilletage holomorphe régulier sur $M \setminus \Sigma$, où Σ est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 de M , appelé le lieu des singularités du feuilletage, noté aussi $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

Un feuilletage singulier est dit saturé s'il ne peut être étendu en aucun point de son lieu de singularités.

Nous considérerons donc à présent que des champs de vecteurs, ou des 1-formes holomorphes, avec des singularités isolées, et engendrant des feuilletages singuliers saturés. Les feuilletages auxquelles on s'intéressera seront donc toujours engendrés par une collection de tels champs de vecteurs, ou de tels 1-formes, comme dans le théorème 2.6. Citons néanmoins, en guise de remarque, le théorème suivant, qui permet, étant donné un feuilletage holomorphe avec singularités isolées, d'exhiber une collection de champs de vecteurs (ou de 1-formes) ayant exactement les singularités du feuilletage considéré, et engendrant ce même feuilletage hors des singularités.

Théorème 2.9. (*c.f. [Ab]*) *Considérons un feuilletage \mathcal{F} holomorphe et singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, avec une unique singularité en l'origine. Alors, quitte à réduire U , il existe un champ de vecteurs (resp. une 1-forme) holomorphe sur U avec une unique singularité en 0, qui engendre le feuilletage \mathcal{F} .*

Donnons enfin la définition de la notion de séparatrice :

Définition 2.10. Une séparatrice S d'un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} en un point $a \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ est ensemble analytique de dimension 1 (courbe analytique) passant par a et tel que $S \setminus \{a\}$ soit une feuille de \mathcal{F} .

Une séparatrice (ou courbe invariante) globale S du feuilletage \mathcal{F} est une courbe analytique telle que $S \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ est une feuille de \mathcal{F} .

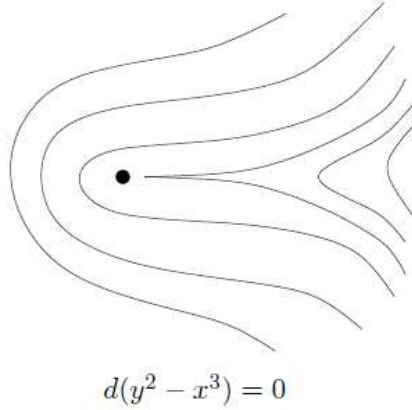


Figure 2. : exemple d'un cusp (*c.f.* [Lor])

Remarque 2.11. Si C est une courbe analytique lisse dans une surface complexe M , et si le feuilletage est donné par une 1-forme holomorphe ω , C est une courbe invariante si et seulement si $\omega|_{TC} = 0$, où TC désigne le fibré tangent de C . Si le feuilletage est donné par un champ de vecteurs F , alors C est une courbe invariante si et seulement si pour tout $p \in C$, $F(p) \in T_pC \subset T_pM$.

2.1.2 Éclatement d'un point et théorème de réduction de singularité

On considère

$$\mathbb{M} := \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$$

avec le sous ensemble

$$\mathbb{E} := \{0\} \times \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{M}$$

appelé diviseur exceptionnel, ainsi que la projection canonique $\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$, appelée “blow-down”, de sorte que $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{M}$.

Proposition 2.12. \mathbb{M} est une surface complexe fermée.

Démonstration. Considérons les deux ouverts

$$U_1 := \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{M} \mid u \neq 0\} = \{(x, xz, [1 : z]) \mid (x, z) \in \mathbb{C}^2\}$$

et

$$U_2 := \{(x, y, [u : v]) \in \mathbb{M} \mid v \neq 0\} = \{(wy, y, [w : 1]) \mid (y, w) \in \mathbb{C}^2\}$$

ainsi que les deux applications :

$$\begin{aligned} \psi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, xz, [1 : z]) &\longmapsto (x, z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (wy, y, [w : 1]) &\longmapsto (y, w)\end{aligned}$$

qui sont clairement des bijections. Clairement : $\mathbb{M} = U_1 \cup U_2$. Regardons les fonctions de transition sur $U_1 \cap U_2$:

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}(y, w) = (wy, \frac{1}{w})$$

et

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x, z) = (xz, \frac{1}{z})$$

qui sont holomorphes et inverses l'une de l'autre : ce sont des biholomorphismes. On a donc exhibé une structure de variété complexe. \square

Examinons les écritures de σ et de \mathbb{E} dans les cartes :

$$\sigma_1 := \sigma \circ \psi_1^{-1} : (x, z) \longmapsto (x, xz) = (x, y)$$

et $\mathbb{E} \cap U_1 = \{x = 0\}$

$$\sigma_2 := \sigma \circ \psi_2^{-1} : (y, w) \longmapsto (wy, y) = (x, y)$$

et $\mathbb{E} \cap U_2 = \{y = 0\}$

L'application σ est donc holomorphe. De plus, $\sigma : \mathbb{M} \setminus \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est bijective. L'application réciproque $\sigma^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ est également holomorphe, et est appelée "blow-up", ou éclatement. Enfin, on remarque avec les deux écritures ci-dessus que \mathbb{E} est une courbe analytique lisse et irréductible.

Proposition 2.13. *L'application $\sigma : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ est une application propre, c'est à dire que l'image réciproque par σ de tout compact est compacte.*

Démonstration. Par définition de le σ , pour tout compact $K \subset \mathbb{C}^2$, $\sigma^{-1}(K) \subset K \times \mathbb{CP}^1$, qui est compact en tant que produit cartésien de compacts. Or, par continuité de σ , $\sigma^{-1}(K)$ est fermé. Un fermé dans un compact étant compact, on en déduit le résultat. \square

Remarque 2.14. On peut de la même manière, définir l'éclatement de n'importe quel point de \mathbb{C}^2 , ou plus généralement d'une surface complexe. On a alors le fait suivant :

Proposition 2.15. *Soit M une surface complexe et $\Sigma \subset M$ un sous-ensemble fini. Il existe alors une surface complexe \tilde{M} et une application holomorphe propre $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ telle que :*

1. *pour tout $p \in \Sigma$, \mathbb{E}_p est une courbe irréductible, $\mathbb{E}_p := \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{CP}^1$, et les $(\mathbb{E}_p)_p$ sont disjoints.*

2. π induit une bijection entre $\tilde{M} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} \mathbb{E}_p \longrightarrow M \setminus \Sigma$

3. pour tout $p \in \Sigma$, il existe un voisinage ouvert V_p de \mathbb{E}_p dans \tilde{M} tel que $\pi|_{V_p}$ soit biholomorphiquement conjuguée à l'application σ restreinte à un voisinage de \mathbb{E} dans \mathbb{M} .

Nous dirons dans ce cas que nous avons effectué des éclatements "simultanés".

Démonstration. Considérons un atlas $(U_j, \phi_j)_{j \in J}$ de M de sorte que chacun des ouverts U_j ne contienne au plus qu'un point de Σ , et tel que pour tout $p \in \Sigma$, si $p \in U_j$, alors $\phi_j(p) = 0 \in \mathbb{C}^2$. Nous dirons que U_j est une carte exceptionnelle si U_j contient un point de Σ . Notons \sim la relation d'équivalence définie sur $\bigsqcup_{j \in J} U_j$ par :

$$x \sim y \text{ s'il existe } j \in J \text{ tel que } (x, y) \in U_j^2 \text{ et } x = y$$

On obtient ainsi une variété complexe $\bigsqcup_{j \in J} U_j / \sim$, biholomorphe à M . A présent, considérons $\tilde{U}_j := \sigma^{-1}(\phi_j(U_j))$ si la carte U_j est exceptionnelle, de sorte que \tilde{U}_j soit un voisinage de \mathbb{E} dans \mathbb{M} , et $\tilde{U}_j := U_j$ si $U_j \cap \Sigma = \emptyset$. Définissons une relation d'équivalence \sim' sur $\bigsqcup_{j \in J} \tilde{U}_j$ par : $x \sim' y$ si x et y n'appartiennent à aucune des copies de \mathbb{E} dans les différents \tilde{U}_j , et s'il existe $i \in J$ tel que $(x, y) \in \tilde{U}_i^2$ et $x = y$. On obtient ainsi une nouvelle variété complexe $\tilde{M} = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{U}_j / \sim'$, ainsi que des applications $\pi_j : \tilde{U}_j \longrightarrow U_j$ qui coïncident avec σ sur les cartes exceptionnelles, et avec l'identité sur les autres cartes. Ces applications passent au quotient avec les relations \sim et \sim' , et définissent une application holomorphe $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ qui a les propriétés voulues. \square

Définissons à présent l'éclatement d'un feuilletage holomorphe singulier.

Définition 2.16. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, définie par la 1-forme holomorphe ω , et ayant comme unique singularité l'origine. \mathcal{F} est alors un feuilletage non singulier du voisinage épointé de l'origine. Sa pré-image $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$ est un feuilletage non singulier de d'un voisinage de \mathbb{E} dans $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$, définie par la 1-forme $\sigma^*\omega$. Or, d'après le Théorème 2.7, comme \mathbb{E} est de codimension 1 dans \mathbb{M} , il existe un feuilletage holomorphe singulier $\sigma^*\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$, appelé éclatement (ou transformée stricte) de \mathcal{F} , qui prolonge $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$ et qui n'a que des singularités isolées (ou de manière équivalente, tel que $\text{codim}(\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})) \geq 2$), situées sur \mathbb{E} .

Remarque 2.17. Plus généralement, si $\pi : M \longrightarrow \mathbb{C}^2$ est une application holomorphe (M désigne une variété complexe), avec $D := \pi^{-1}(\{0\})$ une courbe analytique, telle que π soit injective sur $M \setminus D$, alors tout feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^2 ayant comme unique singularité l'origine, se tire en arrière en un feuilletage non singulier $\pi^{-1}(\mathcal{F})$ sur $M \setminus D$, qui s'étend en un feuilletage $\pi^*\mathcal{F}$ de M , ayant uniquement des singularités isolées sur D .

On peut à présent énoncer le théorème de résolution des singularités qui nous intéresse.

Théorème 2.18. (Bendixson, Andreev, Seidenberg, Lefschetz, Dumortier, Van Essen) Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec comme unique singularité l'origine. Il existe alors une surface complexe M , contenant une courbe analytique connexe D , ainsi qu'une application holomorphe propre $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que $D = \pi^{-1}(\{0\})$, injective sur $M \setminus D$, telle que le feuilletage $\pi^*\mathcal{F}$ n'ait que des singularités élémentaires. Plus précisément, l'application π peut être obtenue par un nombre fini de "blow-ups". De plus, $D = \bigcup_{j=1}^N D_j$, où pour tout j , D_j est une courbe analytique lisse irréductible, $D_j \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et les D_j s'intersectent transversalement deux à deux en au plus un point.

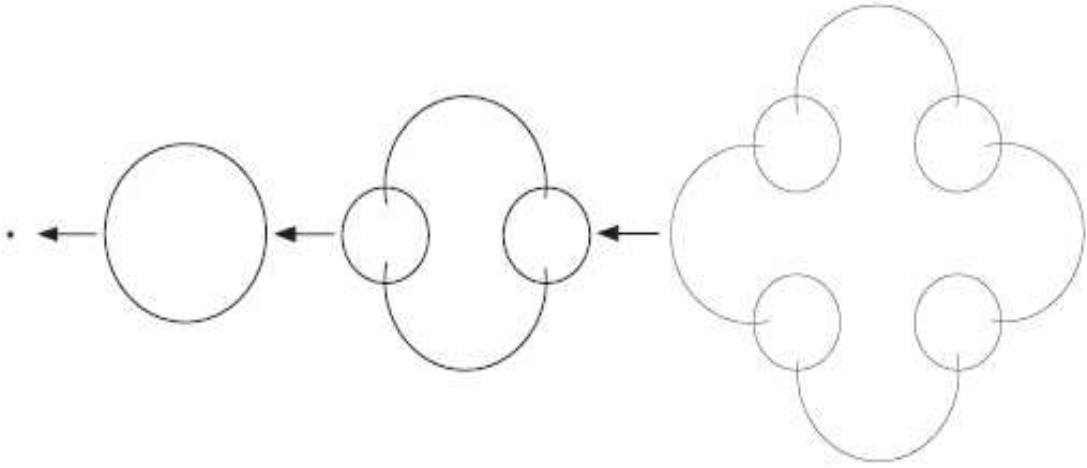


Figure 3. : Éclatements successifs (c.f. [D-L-A])

Les sections suivantes auront pour objectif d'amener à une preuve constructive de ce théorème.

2.1.3 Quelques compléments sur les éclatements

Avant de passer à la démonstration du théorème, nous allons développer plus en détails la notion d'éclatement. Nous aurons besoins de définir l'éclatement d'une courbe analytique.

Définition 2.19. Soit γ une courbe analytique contenant 0 dans \mathbb{C}^2 . Alors, on définit son éclatée (ou transformée stricte) par : $\sigma^*\gamma = \tilde{\gamma} = \overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})}$.

Proposition 2.20. Avec les même notations que ci-dessus, $\tilde{\gamma}$ est une courbe analytique dans \mathbb{M} , qui intersecte le diviseur exceptionnel \mathbb{E} seulement en des points isolés.

Démonstration. Soit f un germe de fonction holomorphe définissant localement la courbe γ par l'équation $\{f = 0\}$, et considérons son pull-back $\sigma^*f = f \circ \sigma \in \mathcal{O}(\mathbb{M})$. Pour tout $a \in \mathbb{E}$, on considère un germe irréductible $g \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ définissant localement \mathbb{E} par l'équation $\{g = 0\}$ dans un voisinage U_a de a dans \mathbb{M} . Alors, comme $\sigma^*f \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ s'annule identiquement sur \mathbb{E} , il existe une puissance maximale $\nu \geq 1$ telle que g^ν divise σ^*f dans l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ (grâce au théorème Nullstellensatz, car g est irréductible). On définit alors le germe $\tilde{f} = (g^{-\nu})(\sigma^*f) \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ ainsi que le lieu de ses zéros $\gamma_{\tilde{f}}$. Alors,

$$(\sigma^{-1}(\gamma) \cap U_a) \setminus \mathbb{E} = \{\sigma^*f = 0\} \setminus \mathbb{E} = \{\tilde{f} = 0\} \setminus \mathbb{E} = \gamma_{\tilde{f}} \setminus \mathbb{E}$$

et $\tilde{f}|_{\mathbb{E}} \neq 0$ n'a que des singularités isolées, si bien que $\mathbb{E} \cap U_a \not\subseteq \gamma_{\tilde{f}}$. Si $p \in U_a$ est tel que $\tilde{f}(p) \neq 0$, alors p n'appartient ni à $\gamma_{\tilde{f}}$ (par définition), ni à $\tilde{\gamma}$ (par continuité). Si $\tilde{f}(p) = 0$, alors $p \in \gamma_{\tilde{f}} \cap \tilde{\gamma}$. Donc $\gamma_{\tilde{f}} = \tilde{\gamma} \cap U_a$, et $\tilde{\gamma}$ est donc une courbe analytique. En particulier, si $\tilde{f}(a) = 0$, alors $\tilde{\gamma} \cap U_a = \sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\}) \cup \{a\}$. \square

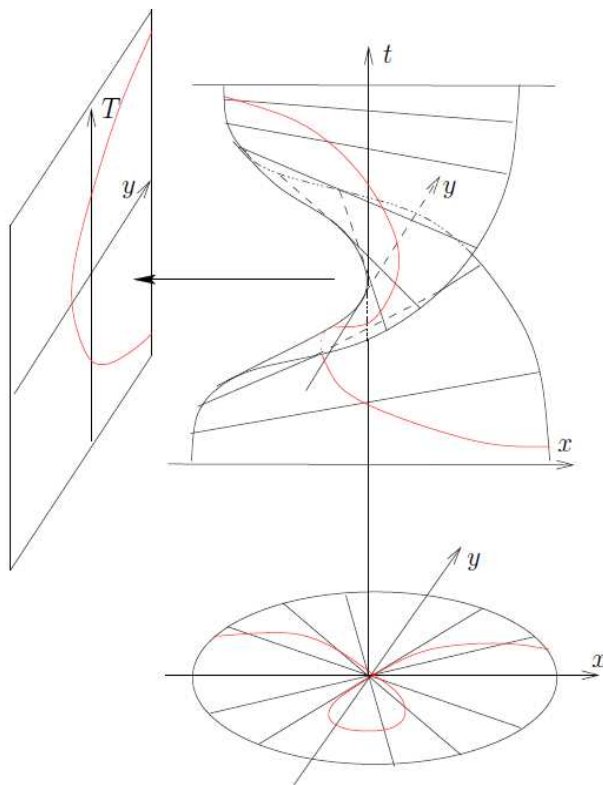


Figure 4. : Éclatement d'une courbe (dessin réel) (c.f. [Lor])

Définition 2.21. Étant donnée une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, si $n = \text{ord}_0(f)$, on définit l'éclatement (ou transformée stricte) de f dans la direction x (resp. y) par $\tilde{f}_x(x, z) = \frac{f(x, zx)}{x^n}$ (resp. $\tilde{f}_y(w, y) = \frac{f(wy, y)}{y^n}$). Plus généralement, si $a \in \mathbb{E}$, et si \mathbb{E} est défini au voisinage de a par $\{h = 0\}$, où $h \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ est irréductible, on définit un éclatement de f en a par $\tilde{f}_a = \frac{f \circ \sigma}{h^n}$. De plus, deux tels éclatements diffèrent par multiplication par un inversible de l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$.

On peut alors préciser la proposition précédente, grâce au corollaire suivant :

Corollaire 2.22. *Considérons une courbe analytique γ contenant l'origine, définie en son voisinage par l'équation $\{f = 0\}$, où $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ et $\text{ord}_0(f) = n$. Alors $\tilde{\gamma}$ est donnée dans la carte U_1 (resp. U_2) par les zéros de \tilde{f}_x (resp. \tilde{f}_y). Les points d'intersection de $\tilde{\gamma}$ avec \mathbb{E} sont les solutions dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de l'équation $f_n(x, y) = 0$: il y en a donc un nombre fini (f_n désigne le jet d'ordre n de f).*

Remarque 2.23. Si la courbe γ (et donc f) est irréductible, alors il y a exactement un point d'intersection entre $\tilde{\gamma}$ et \mathbb{E} (il suffit d'appliquer le théorème de préparation de Weierstrass pour se ramener au cas où f est un polynôme de Weierstrass, puis d'utiliser le lemme de Hensel : *c.f.* [Fisch]). De plus, si f est d'ordre 1 en l'origine, alors $\tilde{\gamma}$ et \mathbb{E} s'intersectent transversalement en ce point d'intersection. Remarquons également que si γ est de plus une séparatrice de \mathcal{F} , alors $\tilde{\gamma}$ en est une de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Distinguons à présent deux types de singularités pour un feuilletage.

Définition 2.24. Un point singulier d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F} sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ est dit non-dicritique si $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(\{0\})$ est une courbe invariante du feuilletage $\sigma^*\mathcal{F}$. Sinon, le point singulier est dit dicritique.

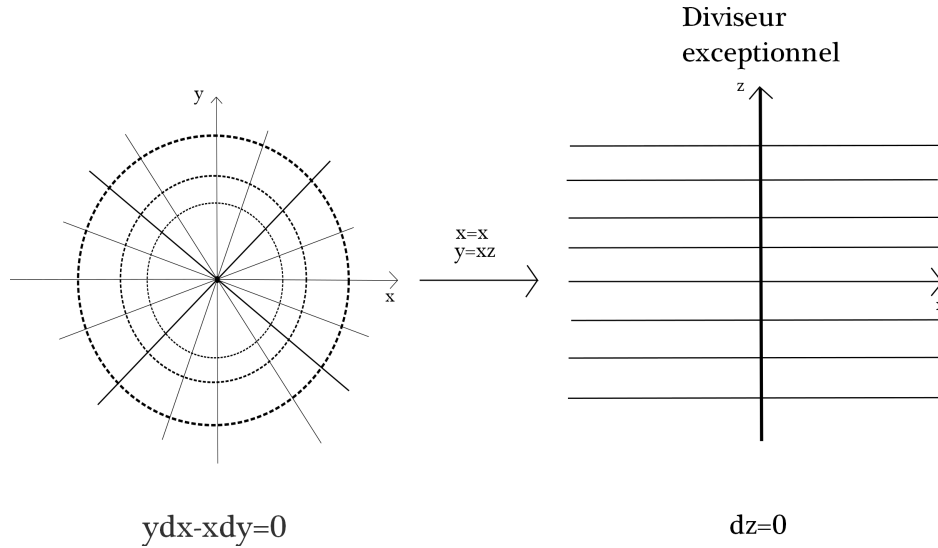


Figure 5. : éclatement du champ de vecteur radial

Étudions à présent comment se présentent les calculs, vis-à-vis de l'éclatement, en coordonnées.

Soit $\omega = fdx + gdy \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp. $F = -g\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$) une 1-forme holomorphe (resp. un champ de vecteurs) qui génère un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} , tel que $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{0\}$. On notera $f = \sum_{k \geq 0} f_k$ et $g = \sum_{k \geq 0} g_k$ les développements de Taylor de f et g , dans lesquels f_k et g_k désignent des polynômes homogènes de degré k .

Définition 2.25. On définit l'ordre de ω , et de F en 0 par

$$\text{ord}_0(\omega) = \text{ord}_0(F) = \min\{\text{ord}_0(f), \text{ord}_0(g)\}$$

Plus généralement, si \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, avec singularité isolé en l'origine, $\text{ord}_0(\mathcal{F}) = \text{ord}_0(\omega) = \text{ord}_0(F)$, pour tout $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$ et tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ définissant \mathcal{F} au voisinage de l'origine.

Remarque 2.26. La définition de l'ordre d'un feuilletage en une singularité ne dépend ni du choix du système de coordonnées (car les changements de cartes sont des bi-holomorphismes), ni de la 1-forme ou du champ de vecteurs définissant localement le feuilletage (car deux champs de vecteurs, *resp.* deux 1-formes, définissant localement le feuilletage, diffèrent par multiplication par une fonction holomorphe qui ne s'annule pas, et ont donc le même ordre).

Définition 2.27. Supposons que $\text{ord}_0(\omega) = n \geq 1$. Écrivons le pull-back $\sigma^*\omega$ de la 1-forme ω dans la carte U_1 :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sigma_1^* \omega \\ &= [f(x, xz) + zg(x, xz)] dx + xg(x, xz) dz \\ &= \frac{1}{x} [(\sigma_1^* h) dx + (\sigma_1^* g') dz] \end{aligned}$$

où $h = xf + yg$ et $g' = x^2g$. Le jet d'ordre $n + 1$ de h est $h_{n+1} = xf_n + yg_n$, et est appelé forme tangente de ω .

Remarque 2.28. Nous utiliserons souvent la notations “TOS” dans les calculs, pour désigner des “termes d'ordre supérieur” dépendant des différentes variables mises en jeu.

Proposition 2.29. *La singularité est non-dicritique si $\text{ord}_0(h) = 1 + \text{ord}_0(\omega)$, i.e. si $h_{n+1} \neq 0$, et dicritique si $\text{ord}_0(h) > 1 + \text{ord}_0(\omega)$, i.e. si $h_{n+1} = 0$.*

Démonstration. Distinguons les deux cas.

1. Supposons que $\text{ord}_0(h) = 1 + \text{ord}_0(\omega)$. Le feuilletage $\sigma^*\mathcal{F}$ est alors donné, dans la carte U_1 , par l'équation $\tilde{\omega}_1 = 0$, où

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= x^{-n} \omega_1 \\ &= [h_{n+1}(1, z) + x\alpha(x, z)] dx + x [g_n(1, z) + x\beta(x, z)] dz \end{aligned}$$

où α et β sont deux fonctions holomorphes. On voit alors que la courbe $\mathbb{E} \cap U_1 = \{x = 0\}$ est une courbe intégrale de l'équation $\tilde{\omega}_1 = 0$, il s'agit donc d'une plaque

du feuilletage associé. Or, les singularités de $\tilde{\omega}_1$ sont données par $\begin{cases} x = 0 \\ z = z_j \end{cases}$, les z_j étant les racines de $h_{n+1}(1, z)$. \mathbb{E} est donc une séparatrice de $\sigma^*\mathcal{F}$ au voisinage de chacune des singularités dans U_1 , car il s'agit d'une courbe analytique. Si $h_{n+1}(1, z)$ a $n + 1$ racines comptées avec multiplicités, *i.e.* si x ne divise pas h_{n+1} , toutes les singularités de $\sigma^*\mathcal{F}$ sont dans U_1 , et on est dans le cas non-dicritique. Sinon, on se place dans la carte U_2 , et on montre de même que $\mathbb{E} \cap U_2 = \{y = 0\}$ est une séparatrice au voisinage de la singularité $(0, 0, [0 : 1])$. On conclut que \mathbb{E} est une courbe invariante du feuilletage, et qu'on est donc encore dans le cas non-dicritique.

Remarque 2.30. En fait, on voit que $Sing(\sigma^*\mathcal{F}) = \{(0, 0, [x : y] \mid h_{n+1}(x, y) = 0\} \subset \mathbb{E}$.

2. Supposons que $ord_0(h) > 1 + ord_0(\omega) = n + 1$. On voit alors que $h_{n+1} = 0$, et donc

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= x^{-(n+1)}\omega_1 \\ &= [h_{n+2}(1, z) + x\alpha'(x, z)] dx + [g_n(1, z) + x\beta'(x, z)] dz \end{aligned}$$

où α' et β' sont deux fonctions holomorphes. On voit donc que $Sing(\tilde{\omega}_1) \subset \{g_n(1, z) = 0\}$, et qu'en dehors de $\{g_n(1, z) = 0\}$, les feuilles intersectent \mathbb{E} transversalement. De plus, $g_n \neq 0$ (car sinon, comme $h_{n+1} = 0$, on aurait aussi $f_n = 0$, et donc $ord_0(\omega) > n$, ce qui est absurde). Donc \mathbb{E} n'est pas une courbe invariante du feuilletage, et on est dans le cas dicritique. □

Voyons maintenant un premier résultat qui nous montre comment peuvent apparaître des singularités élémentaires par éclatement :

Proposition 2.31. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, pour chaque facteur simple de degré 1, noté $ax + by$, de $h_{n+1} = xf_n + yg_n$, le feuilletage $\sigma^*\mathcal{F}$ a une singularité élémentaire, donnée par $z = -\frac{a}{b}$ (resp. $w = -\frac{b}{a}$) dans la carte U_1 (resp. U_2).*

Démonstration. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que le facteur d'ordre 1 en question est simplement y . D'où,

$$h_{n+1}(1, z) = f_n(1, z) + zg_n(1, z) = zu(z)$$

avec $u(0) \neq 0$. De plus, comme $h_{n+1} \neq 0$, la singularité est non-dicritique, et donc, le champ de vecteur déterminant le feuilletage s'écrit dans la carte U_1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -g_n(1, 0)x + r(x, z) \\ \dot{z} = u(0)z + \alpha x + s(x, z) \end{cases}$$

avec r et s d'ordre ≥ 2 . Donc la différentielle de ce champ de vecteur a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} -g_n(1,0) & \alpha \\ 0 & u(0) \end{pmatrix}$, avec $u(0) \neq 0$. La singularité $(0,0)$ est donc élémentaire. \square

2.2 Notions de multiplicité d'intersection et de multiplicité d'une singularité

2.2.1 Multiplicité d'intersection

Nous allons à présent étudier le principal outil de la preuve du théorème de réduction des singularités que nous allons présenter : la multiplicité d'intersection.

Nous allons commencer par rappeler un théorème fondamental dans tout ce qui suivra : le théorème de paramétrisation de Puiseux.

Théorème 2.32. (*Théorème de Puiseux, c.f. [Fisch]*) Soit γ le germe d'une courbe analytique irréductible contenant l'origine et défini en son voisinage par l'équation $f = 0$, où f est irréductible dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine. Soit $n := \text{ord}_0(f)$. Alors, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, il existe une application holomorphe injective $\tau = (\tau_1, \tau_2) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $f \circ \tau = 0$, $\tau_1 = t^n$, et $\text{ord}_0(\tau_2) > n$. De plus, τ est unique à biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ dans lui-même près. τ est appelée paramétrisation primitive de γ .

Définition 2.33. Soient f, g deux germes de fonctions holomorphes dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. On définit alors la multiplicité d'intersection $\mu_0(f, g)$ par :

- $\mu_0(f, g) = \text{ord}_0(f \circ \tau)$, si g est irréductible et τ est une paramétrisation locale injective de la courbe $\{g = 0\}$
- $\mu_0(f, g) = \sum_i m_i \mu_0(f, g_i)$, si $g = \prod_i g_i^{m_i}$ est la décomposition de g en produit de facteurs irréductibles.

Remarque 2.34. On peut définir plus généralement la multiplicité d'intersection de $f, g \in \mathcal{O}(M, a)$, notée $\mu_a(f, g)$ pour deux germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point a dans une surface complexe M , en considérant des cartes. L'objet ainsi introduit sera bien défini, car les changements de cartes sont biholomorphes, et ne modifient donc pas l'ordre par composition.

Énonçons des propriétés élémentaires, mais néanmoins importantes, de la multiplicité d'intersection :

Proposition 2.35. Soient f, g, h des germes de fonctions holomorphes dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. Alors :

1. $\mu_0(f, g) = \mu_0(g, f)$.
2. $\mu_0(f, g) = +\infty$ si et seulement si f et g ont un facteur irréductible en commun.

3. $\mu_0(f, g) = 0$ si et seulement si $f(0, 0) \neq 0$ ou $g(0, 0) \neq 0$.
4. $\mu_0(f, g) = 1$ si et seulement si courbes définies par $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ s'intersectent transversalement en $(0, 0)$.
5. $\mu_0(fh, g) = \mu_0(f, g) + \mu_0(h, g)$.
6. Si $M : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ est holomorphe, alors $\mu_0(M.(f, g)) = \mu_0(f, g)$.

Démonstration. Les points 2. à 6. découlent de la définition et des propriétés élémentaires de l'ordre d'une fonction holomorphe. Démontrons le point 1. qui est le moins élémentaire. Il suffit de démontrer le résultat pour f et g irréductibles. Notons $k = ord_0(f)$ et $n = ord_0(g)$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, et d'après la propriété 5 (dans le cas où h est un inversible de l'anneau, *i.e.* $h(0) \neq 0$), il suffit de démontrer le cas où f et g sont des polynômes de Weierstrass : quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, d'après la propriété 6, on peut supposer que f (*resp.* g) est de la forme $f(X, Y) = \sum_{j=0}^k f_j(X)Y^j \in \mathbb{C}\{X\}[Y]$ (*resp.* $g(X, Y) = \sum_{l=0}^n g_l(X)Y^l$) où les f_j (*resp.* g_l) sont des fonctions holomorphes telles que $f_j(0) = 0$ (*resp.* $g_l(0) = 0$) pour tout $j = 0, \dots, k-1$ (*resp.* $l = 0, \dots, n-1$) et $f_k = 1$ (*resp.* $g_n = 1$). Notons $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{k}}$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et considérons des paramétrisations de Puiseux primitives $\Phi : S \mapsto (S^k, \phi(S))$ et $\Psi : T \mapsto (T^n, \psi(T))$ de $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ respectivement. Notons alors pour tout $j = 1, \dots, k$ (*resp.* $l = 1, \dots, n$), $\phi_j(S) = \phi(\zeta^j S)$ (*resp.* $\psi_l(T) = \psi(\xi^l T)$). Par injectivité de Φ (*resp.* Ψ), on voit que les $\phi_j(S)$ (*resp.* $\psi_l(T)$) sont deux à deux distincts, dans l'anneau intègre $\mathbb{C}\{S\}$ (*resp.* $\mathbb{C}\{T\}$). Alors, les polynômes $f(S^k, Y) \in \mathbb{C}\{S\}[Y]$ et $\prod_{j=1}^k (Y - \phi_j(S)) \in \mathbb{C}\{S\}[Y]$ (*resp.* $g(T^n, Y) \in \mathbb{C}\{T\}[Y]$ et $\prod_{l=1}^n (Y - \psi_l(T)) \in \mathbb{C}\{T\}[Y]$) sont unitaires, de même degré, et ont les mêmes racines, à savoir les $(\phi_j(S))_{j=1, \dots, k}$ (*resp.* $(\psi_l(T))_{l=1, \dots, n}$). Ils sont donc égaux :

$$f(S^k, Y) = \prod_{j=1}^k (Y - \phi_j(S))$$

$$g(T^n, Y) = \prod_{l=1}^n (Y - \psi_l(T))$$

ou encore, en dans l'anneau des séries de Puiseux :

$$f(X, Y) = \prod_{j=1}^k \left(Y - \phi_j(X^{\frac{1}{k}}) \right)$$

$$g(X, Y) = \prod_{l=1}^n \left(Y - \psi_l(X^{\frac{1}{n}}) \right)$$

Considérons alors

$$h(T) := f(T^n, \psi(T)) = aT^p + Q(T)$$

avec $a \neq 0$ et $\text{ord}(Q) > p$, de sorte que $p = \text{ord}_T(h) = \mu_0(f, g)$. Pour tout $l = 1, \dots, n$, soit

$$h_l(T) = f(T^n, \psi(\xi^l T)) = a\xi^{lp}T^p + \tilde{Q}(T)$$

On a alors, $h_1(T) \dots h_n(T) = bT^{pl} + R(T) = bX^p + \dots$, avec $b \neq 0$ et $\text{ord}_T(R) > pl$, de sorte que $\text{ord}_X(h_1 \dots h_n) = \mu_0(f, g)$. D'où :

$$\begin{aligned} \mu_0(f, g) &= \text{ord}_X(h_1 \dots h_n) \\ &= \text{ord}_X \left(\prod_{l=1}^n f(X, \psi(\xi^l X^{\frac{1}{n}})) \right) \\ &= \text{ord}_X \left(\prod_{l=1}^n \prod_{j=1}^k \left(\psi(\xi^l X^{\frac{1}{n}}) - \phi(\zeta^j X^{\frac{1}{k}}) \right) \right) \\ &= \text{ord}_X \left(\pm \prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^n \left(\phi(\zeta^j X^{\frac{1}{k}}) - \psi(\xi^l X^{\frac{1}{n}}) \right) \right) \\ &= \mu_0(g, f), \text{ par des calculs similaires.} \end{aligned}$$

□

Voyons à présent comment se comporte la multiplicité d'intersection par éclatement :

Proposition 2.36. *Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$. Avec les notations de la définition 2.21, on a :*

$$\mu_0(f, g) = \text{ord}_0(f)\text{ord}_0(g) + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{f}_a, \tilde{g}_a)$$

Démonstration. En utilisant le point 5 de la proposition 2.35, on voit qu'il suffit de prouver la proposition dans le cas où g est irréductible. Supposons donc g irréductible. Notons $n = \text{ord}_0(f)$ et $m = \text{ord}_0(g)$. Quitte à effectuer un changement linéaire inversible de coordonnées, qui ne modifiera pas la multiplicité d'intersection d'après la proposition 2.35, on peut supposer que x ne divise ni f_n , ni g_m , et que donc les seuls points $a \in \mathbb{E}$ tels que $\mu_a(\tilde{f}_a, \tilde{g}_a) > 0$ sont dans $\mathbb{E} \cap U_1 = \mathbb{E} \setminus \{0, 0, [0 : 1]\}$ (il y en a un nombre fini d'après la proposition 2.22). Rappelons que nous avons noté ψ_1 l'application coordonnées associée

à U_1 , de sorte que $\sigma \circ \psi_1^{-1}(x, z) = (x, xz)$. Comme g est irréductible, on a vu dans la remarque 2.23 que si γ désigne la courbe définie par $\{g = 0\}$, alors $\tilde{\gamma} \cap \mathbb{E} = \{a\}$. Considérons l'éclatement de g défini par $\tilde{g}(\psi_1^{-1}(x, z)) = \frac{g(x, xz)}{x^m}$, et celui de f défini par $\tilde{f}(\psi_1^{-1}(x, z)) = \frac{f(x, xz)}{x^n}$.

On considère à présent une paramétrisation primitive $\tau : t \mapsto (t^m, \phi(t))$ de la courbe γ d'équation $\{g = 0\}$ au voisinage de l'origine, avec $\text{ord}_0(\phi) > m$. Définissons alors $\tilde{\tau} = \sigma^{-1} \circ \tau : (\mathbb{C}, 0) \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \setminus \mathbb{E}$, qui est holomorphe et injective. D'après ce qui précède, on peut prolonger $\tilde{\tau}$ en une fonction holomorphe injective $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{M}, a)$, en posant $\tilde{\tau}(0) = a$. D'où, en coordonnées, dans la carte U_1 , on a : $\psi_1 \circ \tilde{\tau}(t) = \left(t^m, \frac{\phi(t)}{t^m}\right)$, et $\psi_1 \circ \tilde{\tau}$. En particulier, $\tilde{\tau}$ est une paramétrisation locale de $\tilde{\gamma}$.

Rappelons enfin que dans les coordonnées de la carte U_1 , on a : $x^n \tilde{f} \circ \psi_1^{-1}(x, z) = f(x, xz) = f \circ \sigma \circ \psi_1^{-1}$. D'où,

$$\begin{aligned} f \circ \sigma \circ \tilde{\tau}(t) &= f \circ \sigma \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ \tilde{\tau}(t) \\ &= t^{nm} \tilde{f} \circ \psi_1^{-1} \left(t^m, \frac{\phi(t)}{t^m} \right) \\ &= t^{nm} \tilde{f} \circ \tilde{\tau}(t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mu_0(f, g) &= \text{ord}_0(f \circ \tau) = \text{ord}_0(f \circ \sigma \circ \tilde{\tau}) \\ &= nm + \text{ord}_0(\tilde{f} \circ \tilde{\tau}) \\ &= \text{ord}_0(f) \text{ord}_0(g) + \mu_a(\tilde{f}, \tilde{g}) \end{aligned}$$

□

Remarque 2.37. En particulier, si f et g sont d'ordre 1 en l'origine, alors la multiplicité d'intersection diminue de 1 après éclatement.

Corollaire 2.38. *Soient γ et γ' deux courbes analytiques contenant l'origine dans $(\mathbb{C}^2, 0)$, définies localement par $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ respectivement. Si $\mu_0(f, g) = 1$, i.e. si γ et γ' s'intersectent transversalement, alors $\tilde{\gamma} \cap \tilde{\gamma}' = \emptyset$.*

2.2.2 Multiplicité d'une singularité d'un feuilletage

Considérons un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} ayant une singularité isolée en l'origine, et définie par l'équation $\{\omega = 0\}$, où $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$, au voisinage de l'origine. Supposons que $\text{ord}_0 \omega = n$, de sorte que

$$\omega = f dx + g dy = (f_n + f_{n+1} + \dots) dx + (g_n + g_{n+1} + \dots) dy$$

avec $f_n dx + g_n dy \neq 0$. Dire que l'origine est une singularité isolée revient à dire que $\mu_0(f, g) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 2.39. La multiplicité de la singularité 0 du feuilletage est par définition $\mu_0(\mathcal{F}) = \mu_0(\omega) = \mu_0(f, g)$.

Remarque 2.40. La définition ne dépend ni du choix de système de coordonnées, ni de la 1-forme holomorphe définissant le feuilletage, d'après la proposition et 2.35 (en effet, si la feuilletage est défini par $u\omega$, avec u une fonction holomorphe ne s'annulant pas, $\mu_0(u\omega) = \mu_0(\omega)$). De plus, on peut évidemment étendre cette définition en n'importe quelle singularité isolée d'un feuilletage singulier sur une surface complexe, en considérant des cartes locales centrées en la singularité en question, et le résultat de ne dépendra pas du choix des cartes car les changements de cartes sont des biholomorphismes.

Exemple 2.41. D'après la proposition 2.36, on voit que si la multiplicité de la singularité est 1, alors elle est élémentaire, car alors, avec les notations ci-dessus, $ord_0(f) = ord_0(g) = 1$.

Voici le résultat centrale dans la démonstration du théorème de réduction des singularités : il explique comment se comporte la multiplicité d'une singularité d'un feuilletage par éclatement.

Théorème 2.42. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, avec une singularité isolée en l'origine, et $\tilde{\mathcal{F}}$ son éclatement. Notons $n = ord_0(\mathcal{F})$. Alors :

1. Si l'origine est une singularité non-dicritique, on a :

$$\mu_0(\mathcal{F}) = n^2 - n - 1 + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}})$$

2. Si l'origine est une singularité dicritique, on a :

$$\mu_0(\mathcal{F}) = n^2 + n - 1 + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}})$$

Démonstration. Supposons que le feuilletage soit défini par

$$\omega = f dx + g dy = (f_n + f_{n+1} + \dots) dx + (g_n + g_{n+1} + \dots) dy \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2, 0)$$

avec $f_n dx + g_n dy \neq 0$. On rappelle que $h = xf + yg$ et que $h_{n+1} = xf_n + yg_n$.

1. On commence par le cas non-dicritique. D'après la proposition 2.29, cela correspond au fait que $h_{n+1} \neq 0$. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaires, on peut supposer que $ord_0(f) = ord_0(g) = n$: en effet, comme $(f_n, g_n) \neq (0, 0)$, supposons par exemple que $f_n \neq 0$. Si $g_n = 0$, on effectue le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = y' \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, la 1-forme s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega'_{(x',y')} &= \omega_{(x'+y',y')} = f(x'+y',y')dx' + (g(x'+y',y') + f(x'+y',y'))dy' \\ &= f'dx' + g'dy'\end{aligned}$$

dont le jet d'ordre n est :

$$\begin{aligned}f'_n dx' + g'_n dy' &= f_n(x'+y',y')dx' + (g_n(x'+y',y') + f_n(x'+y',y'))dy' \\ &= f'_n(x',y')dx' + g'_n(x',y')dy'\end{aligned}$$

avec $f'_n \neq 0$ et $g'_n = f'_n \neq 0$, car $g_n = 0$ et $f_n \neq 0$. C'est ce que l'on a annoncé. De plus, on peut supposer que $(0,0, [0:1])$ n'est pas singulier pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, ce qui équivaut à dire que x ne divise pas h_{n+1} . En effet, $\tilde{\mathcal{F}}$ n'a qu'un nombre fini de singularités, et dans le cas non-dicritique, ce sont les solutions dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de $h_{n+1}(x,y) = 0$. Si $h_{n+1}(0,1) = g_n(0,1) = 0$, on effectue le changement de variable

$$\begin{cases} x = x'' + \epsilon y'' \\ y = y'' \end{cases}$$

avec $0 < \epsilon \ll 1$. Dans ces nouvelles coordonnées, la 1-forme s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega''_{(x'',y'')} &= \omega_{(x''+\epsilon y'',y'')} \\ &= f(x''+\epsilon y'',y'')dx'' + (g(x''+\epsilon y'',y'') + \epsilon f(x''+\epsilon y'',y''))dy'' \\ &= f''(x'',y'')dx'' + g''(x'',y'')dy''\end{aligned}$$

dont le jet d'ordre n est $f''_n dx'' + g''_n dy''$. On remarque que pour ϵ assez petit, $f''_n \neq 0$ et $g''_n \neq 0$. De plus,

$$h''_{n+1}(0,1) = g''_n(0,1) = g_n(\epsilon,1) + \epsilon f_n(\epsilon,1) \neq 0$$

pour une choix générique de ϵ .

On peut donc désormais effectuer les calculs dans la carte (U_1, ψ_1) . Considérons $\tilde{f} = \tilde{f}_x \circ \psi_1$ et $\tilde{g} = \tilde{g}_x \circ \psi_1$ comme des germes \tilde{f}_a et \tilde{g}_a en $a \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \subset \mathbb{E} \cap U_1$, de sorte que, d'après la proposition 2.36 :

$$\begin{aligned}\mu_0(\mathcal{F}) &= \mu_0(f,g) \\ &= \text{ord}_0(f)\text{ord}_0(g) + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{f}_a, \tilde{g}_a) \\ &= n^2 + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{f}_a, \tilde{g}_a)\end{aligned}$$

Or, dans la carte U_1 , l'éclatement de ω s'écrit :

$$\tilde{\omega}_1 = (\tilde{f}_x(x, z) + z\tilde{g}_x(x, z))dx + x\tilde{g}_x(x, z)dz$$

de sorte que pour tout $a \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$,

$$\begin{aligned} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) &= \mu_{\psi_1(a)}(\tilde{f}_x + z\tilde{g}_x, x\tilde{g}_x) \\ &= \mu_{\psi_1(a)}(\tilde{f}_x + z\tilde{g}_x, \tilde{g}_x) + \mu_{\psi_1(a)}(\tilde{f}_x + z\tilde{g}_x, x) \\ &= \mu_a(\tilde{f}, \tilde{g}) + \text{ord}_{\psi_1(a)}(\tilde{f}_x(0, z) + z\tilde{g}_x(0, z)) \\ &= \mu_a(\tilde{f}, \tilde{g}) + \text{ord}_{\psi_1(a)}(f(1, z) + zg(1, z)), \text{ car } f_n \neq 0 \text{ et } g_n \neq 0 \\ &= \mu_a(\tilde{f}, \tilde{g}) + \text{ord}_{\psi_1(a)}(h(1, z)) \end{aligned}$$

Or, $\sum_{a \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})} \text{ord}_{\psi_1(a)}(h(1, z)) = n + 1$, car $h_{n+1}(1, z)$ est de degré $n + 1$: en effet, x ne divise pas h_{n+1} .

D'où,

$$\mu_0(\mathcal{F}) = n^2 - n - 1 + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}})$$

2. Supposons à présent que la singularité à l'origine soit dicritique, c'est à dire $h_{n+1} = xf_n + yg_n = 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $f_n \neq 0$ et $g_n \neq 0$, car si l'un est nul, l'autre l'est alors également, et $\text{ord}(\omega)$ serait $> n$, ce qui est absurde. Nous allons voir que l'on peut toujours se ramener au cas où $\text{ord}_0(h) = n + 2$, à un changement biholomorphe de coordonnées près.

Démonstration. Réécrivons : $xf_n = -yg_n$. En décomposant f_n et g_n en produit d'irréductibles, on voit qu'il existe un polynôme Q_{n-1} homogène de degré $n - 1$ tel que

$$\begin{cases} f_n = yQ_{n-1} \\ g_n = -xQ_{n-1} \end{cases}$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x = X + \lambda Y \\ y = Y \end{cases}$$

Dans les nouvelles coordonnées (X, Y) , la 1-forme s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega_{(X, Y)} &= \omega_{(X + \lambda Y, Y)} = f(X + \lambda Y, Y)dX + (\lambda f(X + \lambda Y, Y) + g(X + \lambda Y, Y))dY \\ &= FdX + GdY \end{aligned}$$

dont le jet d'ordre n est :

$$\begin{aligned}
& F_n(X, Y)dX + G_n(X, Y)dY \\
&= f_n(X + \lambda Y, Y)dX + (\lambda f_n(X + \lambda Y, Y) + g_n(X + \lambda Y, Y)) dY \\
&= YQ_{n-1}(X + \lambda Y, Y)dX + (\lambda YQ_{n-1}(X + \lambda Y, Y) - (X + \lambda Y)Q_{n-1}(X + \lambda Y, Y)) dY \\
&= YQ_{n-1}(X + \lambda Y, Y)dX - XQ_{n-1}(X + \lambda Y, Y)dY
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} F_n = YR_{n-1} \\ G_n = -XR_{n-1} \end{cases}$$

et $R_{n-1}(X, Y) = Q_{n-1}(X + \lambda Y, Y)$ homogène de degré $n - 1$. Prenons alors λ tel que $Q_{n-1}(\lambda, 1) = c \neq 0$. On a donc : $R(0, Y) = cY^{n-1}$, avec $c \neq 0$. Effectuons à présent le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} X = X' + (Y')^2 \\ Y = Y' \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, notre 1- forme s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Omega'_{(X', Y')} &= \Omega_{(X' + (Y')^2, Y')} \\
&= F(X' + (Y')^2, Y') (dX' + 2Y'dY') + G(X' + (Y')^2, Y')dY' \\
&= F(X' + (Y')^2, Y')dX' + (2Y'F(X' + (Y')^2, Y') + G(X' + (Y')^2, Y')) dY' \\
&= F'dX' + G'dY'
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} F' = Y'R_{n-1}(X' + (Y')^2, Y') + TOS \\ G' = 2(Y')^2R_{n-1}(X' + (Y')^2, Y') - (X' + (Y')^2)R_{n-1}(X' + (Y')^2, Y') + TOS \\ \quad = ((Y')^2 - X')R_{n-1}(X' + (Y')^2, Y') + TOS \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
G'(0, Y') &= (Y')^2R_{n-1}((Y')^2, Y') = (Y')^2 (R(0, Y') + TOS) \\
&= (Y')^2 (c(Y')^{n-1} + TOS) \\
&= c(Y')^{n+1} + TOS
\end{aligned}$$

avec $c \neq 0$. Donc, $H'(X', Y') = X'F'(X', Y') + Y'G'(X', Y')$ vérifie $H'(0, Y') = c(Y')^{n+2} + TOS$, donc $ord_0(H') = n + 2$. \square

On revient à la preuve de la proposition. On suppose que nous sommes dans le cas où $h = xf + yg$, avec $\text{ord}_0(h) = n + 2$, et $g(0, y) = cy^{n+1}$, avec $c \neq 0$. On suppose de plus, comme dans le cas 1., que l'on peut se ramener au cas où $(0, 0, [0, 1])$ n'est pas une singularité pour le feuilletage éclatée, de sorte qu'en travaillant uniquement dans la carte U_1 , on voit que pour toute singularité $a \in \mathbb{E}$, $\mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu_a(\tilde{h}, \tilde{g})$, où les éclatements \tilde{h} et \tilde{g} sont définis dans la carte U_1 . D'où, en utilisant la proposition 2.35 :

$$\begin{aligned}
\mu_0(h, g) &= \mu_0(xf + yg, g) \\
&= \mu_0(xf, g) \\
&= \mu_0(x, g) + \mu_0(f, g) \\
&= \mu_0(g, x) + \mu_0(f, g) \\
&= n + 1 + \mu_0(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

Mais d'après la proposition 2.36, on a

$$\begin{aligned}
\mu_0(h, g) &= \text{ord}_0(h)\text{ord}_0(g) + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{h}, \tilde{g}) = (n + 2)n + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) \\
\implies & n + 1 + \mu_0(\mathcal{F}) = (n + 2)n + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) \\
\implies & \mu_0(\mathcal{F}) = n^2 + n - 1 + \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}})
\end{aligned}$$

□

Nous avons donc le corollaire suivant :

Corollaire 2.43. *Avec les mêmes notations que dans le théorème précédent, on voit que si la singularité est dicritique, alors pour toute singularité a de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) < \mu_0(\mathcal{F})$. De même, si la singularité est non-dicritique, et si $n = \text{ord}_0(\mathcal{F}) > 1$, alors pour toute singularité a de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) < \mu_0(\mathcal{F})$.*

2.2.3 Multiplicité et éclatement d'un point cusp

On voit que donc que la multiplicité d'une singularité diminue strictement après éclatement, sauf dans le cas d'une singularité non-dicritique d'ordre 1. Étudions ce qu'il en est pour les singularités non-élémentaires d'ordre 1. Il s'agit des points "cusps", autrement dit, le champ de vecteur définissant le feuilletage au voisinage de la singularité a une différentielle nilpotente non nulle en ce point. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que la différentielle champ de vecteur en $(0, 0)$

s'écrit dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= -g(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (g_2(x, y) + TOS)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2(x, y) + TOS)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -(y + g_2(x, y) + TOS)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2(x, y) + TOS)\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Dons la 1-forme holomorphe associée s'écrit :

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, y)dx + g(x, y)dy \\ &= (f_2(x, y) + TOS)dx + (y + g_2(x, y) + TOS)dy \\ &= a(x, y)dx + (y + b(x, y))dy \end{aligned}$$

avec $ord_0(a) \geq 2$ et $ord_0(b) \geq 2$. La forme tangente est $h_{n+1} = h_2 = y^2 \neq 0$. En particulier, on voit que la singularité est non-dicritique, et que donc, la seule singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ est $(0, 0, [1 : 0]) \in U_1$. On peut donc se contenter de travailler dans la carte (U_1, ψ_1) . Effectuons donc un premier éclatement donné par :

$$\sigma_1 : = \sigma \circ \psi_1^{-1} : (x, z) \longmapsto (x, xz) = (x, y)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \left(\frac{a(x, xz)}{x} + z^2 + z \frac{b(x, xz)}{x} \right) dx + x \left(\frac{b(x, xz)}{x} + z \right) dz \\ &= \left(x \left[\frac{a(x, xz)}{x^2} + z \frac{b(x, xz)}{x^2} \right] + z^2 \right) dx + x \left(x \frac{b(x, xz)}{x^2} + z \right) dz \\ &= (x\alpha(x, z) + z^2) dx + x(z + x\beta(x, z)) dz \end{aligned}$$

avec $ord_0(\alpha) \geq 0$ et $ord_0(\beta) \geq 0$, et retrouve l'unique singularité de $\tilde{\omega}_1$ sur $\{x = 0\}$ qui est $(0, 0)$. D'après le théorème 2.42, $\mu_0(\tilde{\omega}_1) = \mu_0(\omega) + 1$, car on est dans le cas non-dicritique avec $n = 1$. Malheureusement, la singularité n'est toujours pas élémentaire. Nous allons à présent distinguer deux cas, selon que $ord_0(\alpha) = 0$ ou $ord_0(\alpha) \geq 1$, c'est à dire selon que $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 1$ ou $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 2$, au vue de l'écriture de $\tilde{\omega}_1$.

Proposition 2.44. *On reprend les notations et les hypothèses ci-dessus.*

1. Si $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 1$ ("cusp simple"), alors, après deux nouveaux éclatements, donc trois au total, il n'y aura que des singularités élémentaires.
2. Si $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 2$ ("cusp multiple"), alors, après un nouvel éclatement, donc deux au total, il n'y aura que des singularités avec chacune multiplicité $\leq \mu_0(\omega) - 1$.

Démonstration.

1. Supposons que $ord_0(\alpha) = 0$, c'est à dire que $\alpha(0, 0) \neq 0$, ou encore que $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 1$. La forme tangente de $\tilde{\omega}_1$ est donc $\alpha(0, 0)x^2 \neq 0$. En particulier, on voit que la singularité est non-dicritique, et que donc, la seule singularité du nouveau feuilletage éclaté est $(0, 0, [0 : 1]) \in U_2$. On va donc à présent travailler dans la carte (U_2, ψ_2) de la nouvelle surface obtenue par le second éclatement. On effectue donc un deuxième éclatement donné par

$$\sigma_2 : = \sigma \circ \psi_2^{-1} : (z, w) \longmapsto (wz, z) = (x, z)$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 &= (w^2\alpha(wz, z) + 2wz + w^2z\beta(wz, z)) dz + (zw\alpha(wz, z) + z^2) dw \\ &= (w^2A(z, w) + 2zw)dz + (z^2 + zwB(z, w))dw \end{aligned}$$

où $A(z, w) = \alpha(wz, z) + z\beta(wz, z)$ et $B(z, w) = \alpha(wz, z)$. D'où, $A(0, 0) = B(0, 0) = \alpha(0, 0) \neq 0$ et donc $ord_0(\tilde{\omega}_2) = 2$. De plus, d'après le théorème 2.42, dans le cas non-dicritique, $\mu_0(\tilde{\omega}_2) = \mu_0(\tilde{\omega}_1) + 1 = \mu_0(\omega) + 2$, car $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 1$. La forme tangente de $\tilde{\omega}_2$ est $z(w^2\alpha(0, 0) + 2zw) + w(z^2 + zw\alpha(0, 0)) = 3wz^2 + 2\alpha(0, 0)w^2z = wz(3z + 2\alpha(0, 0)w) \neq 0$. Donc la singularité est non-dicritique, et par un nouvel éclatement, on créera trois nouvelles singularités élémentaires sur le diviseur exceptionnel, à savoir $a_1 = (0, 0, [0 : 1])$, $a_2 = (0, 0, [1 : 0])$ et $a_3 = (0, 0, [2\alpha(0, 0) : -3])$, d'après la proposition 2.31. On est donc parvenu à réduire complètement la singularité après trois éclatements.

2. Supposons que $ord_0(\alpha) = 1$, c'est à dire que $\alpha(0, 0) = 0$, ou encore que $ord_0(\tilde{\omega}_1) = 2$. En notant $\alpha_1(x, z) = ux + vz$ le jet d'ordre 1 de α , la forme tangente de $\tilde{\omega}_1$ est

$$x(x\alpha_1(x, z) + z^2) + zx(z + x\beta(0, 0)) = x(ux^2 + (\beta(0, 0) + v)xz + 2z^2) \neq 0$$

qui est non nulle, donc la singularité est non-dicritique, et qui a au moins deux racines dans \mathbb{CP}^1 , correspondants aux singularités obtenues par éclatement. En écrivant \mathcal{F}_2 le feuilletage obtenu après ce deuxième éclatement, d'après le théorème 2.42, on a

$$\sum_{a \in \text{Sing}(\mathcal{F}_2)} \mu_a(\mathcal{F}_2) = \mu_0(\tilde{\omega}_1) - 4 + 2 + 1 = \mu_0(\omega)$$

Comme $\#(\text{Sing}(\mathcal{F}_2)) \geq 2$ et pour tout $a \in \text{Sing}(\mathcal{F}_2)$, $\mu_a(\mathcal{F}_2) \geq 1$, en isolant chacun de ces termes, on a forcément $\mu_a(\mathcal{F}_2) \leq \mu_0(\omega) - 1$. La multiplicité a donc diminué strictement après deux éclatements.

□

2.3 Preuve du théorème de réduction des singularités

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 2.18. Nous allons utiliser la proposition 3.17 pour réaliser les éclatements “simultanés” nécessaires et construire de nouvelles surface complexes. De plus, nous allons prouver que le nombre d’éclatements “simultanés” nécessaires pour réduire complètement la singularité est $\leq 2\mu_0(\mathcal{F})$ si on ne crée jamais de “cusp” simple dans le procédé, ou alors ce nombre est $\leq 2\mu_0(\mathcal{F}) + 1$ se on a créé un “cusp simple”.

Démonstration. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur $\mu := \mu_0(\mathcal{F}) \geq 1$, mais avant cela expliquons pourquoi les courbes D_j obtenues sont biholomorphes à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et pourquoi elles s’intersectent transversalement. Le fait que deux d’entre elles s’intersectent en au plus un point provient de la remarque 2.23. Rappelons que le diviseur exceptionnel \mathbb{E} dans \mathbb{M} est biholomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, et est un germe de courbe irréductible de d’ordre 1 en chacun de ses points. Notons $D_1 := \mathbb{E}$, $M_1 := \mathbb{E}$, et considérons un point $a \in D_1$, et considérons un éclatement de la surface M_1 centré en a . On a donc une surface M_2 , une courbe analytique $D_2 \in M_2$ biholomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, un voisinage V de D_2 dans M_2 , et une application holomorphe $\sigma_a : (M_2, D_2) \rightarrow (M_1, a)$, tel que $\sigma_a^{-1}(a) = D_2$ et $(\sigma_a)|_{M_2 \setminus D_2} : V \setminus D_2 \rightarrow M_1 \setminus \{a\}$ est biholomorphe. Alors, d’après la remarque 2.23, l’éclatement \tilde{D}_1 de D_1 par σ_a intersecte D_2 transversalement en un seul point b , et $\tilde{D}_1 = \sigma_a^{-1}(D_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$. Donc, comme $\sigma_a^{-1}(a) = D_2$ et $(\sigma_a)|_{M_2 \setminus D_2} : V \setminus D_2 \rightarrow M_1 \setminus \{a\}$ est biholomorphe, $\tilde{D}_1 \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong D_1$. Ensuite, en éclatant à nouveau le point b , comme les deux courbes \tilde{D}_1 et D_2 s’intersectent transversalement en b , d’après le corollaire 2.38, les éclatements de \tilde{D}_1 et de D_2 seront disjoints.

Passons maintenant à la récurrence.

- Cas $\mu = 1$: on a vu que cela implique que la singularité est élémentaire. Nous n’avons donc aucun éclatement à faire.
- Supposons le résultat vrai pour les singularités de multiplicité $\leq \mu$ pour $\mu \geq 1$ fixé. Considérons alors une singularité non élémentaire de multiplicité $\mu + 1$.
 - Si la singularité est non-élémentaire, et dicritique ou non-dicritique d’ordre > 1 , alors, d’après le corollaire 2.38, toutes les singularités créées par un éclatement sont d’ordre $\leq \mu$. Donc, par hypothèse de récurrence, après $2\mu + 1 + 1 = 2(\mu + 1) \leq 2(\mu + 1) + 1$, la singularité sera complètement réduite en des singularités élémentaires.
 - Si la singularité est non-élémentaire, et non-dicritique d’ordre 1, c’est un “cusp”. Si c’est un “cusp multiple”, alors, après deux éclatements, on n’aura que des singularités de multiplicités $\leq \mu$. Donc, par hypothèse de récurrence, après $2\mu + 1 + 2 = 2(\mu + 1) + 1$, on aura réduit complètement la singularité. Si un “cusp simple”, alors, après trois éclatements, la singularité est réduite. Or, $3 \leq 2(\mu + 1)$ car $\mu \geq 1$.

Ce qui achève la récurrence. □

Remarque 2.45. En fait, en reprenant les notations du théorème 2.18, la construction de la surface M par éclatements successifs montre que les différentes courbes exception-

nelles $(D_j)_j$ sont telles que pour tout $i \neq j$ tels que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, $D_i \cap D_j$ est réduit à un point. De plus, il n'y a pas de "cycle" dans la réunion connexe des D_j , c'est à dire que si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, alors, pour suite (finie) $D_{k_0} = D_i, D_{k_1}, \dots, D_{k_n}$ telle que pour tout $s = 0, \dots, n-1$, $D_{k_s} \cap D_{k_{s+1}} \neq \emptyset$, et $D_{k_s} \neq D_{k_{s+1}}$, si $D_{k_1} \neq D_j$, alors, pour tout $s \geq 1$, $D_{k_s} \cap D_j = \emptyset$. Cela provient de la remarque 2.23 et de la proposition 3.17.

3 Théorème d'existence d'une séparatrice en dimension 2

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'existence d'au moins une séparatrice en un point singulier d'une champ de vecteur holomorphe en dimension deux.

Nous commencerons par raffiner le théorème de réduction présenté dans la section précédente.

3.1 Compléments sur le théorème de réduction : vers une "forme finale" de réduction

Nous allons voir que, quitte à effectuer un éclatement de plus, on peut arriver un feuilletage ne comportant que des singularités élémentaires telles que les différentielles des champs de vecteurs définissant le feuilletage en ces points soit diagonalisable.

Proposition 3.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, donné par le champ de vecteurs F . On suppose que avec l'origine est une singularité élémentaire du champ de vecteurs. Alors, quitte à effectuer un éclatement centré en l'origine, on peut supposer que $DF_{(0,0)}$ est diagonalisable.*

Démonstration. Il suffit évidemment de traiter le cas où $DF_{(0,0)}$ n'est pas diagonalisable. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, et à remplacer le champ F par λF , où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, comme $DF_{(0,0)}$ est trigonalisable, on peut supposer que $DF_{(0,0)}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (car il doit y avoir une valeur propre double non nulle). Donc, la 1-forme holomorphe correspondante est :

$$\omega = (x + y + TOS)dx + (-x + TOS)dy$$

La forme tangente est $h_2 = x^2 \neq 0$, et donc la singularité est non-dicritique et l'éclatement $\tilde{\mathcal{F}}$ du feuilletage \mathcal{F} a une unique singularité, à savoir $(0, 0, [0 : 1]) \in \mathbb{E} \cap U_2$. Dans la carte U_2 , l'éclatement de ω s'écrit :

$$\tilde{\omega}_2 = (w^2 + y\alpha(x, y)) dy + y(1 + w + TOS) dw$$

avec comme unique singularité $(0, 0)$ (ici, $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$). Donc, la différentielle du champ de vecteur correspondant en $(0, 0)$ s'écrit : $D\tilde{F}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha(0, 0) & 0 \end{pmatrix}$, qui a pour valeurs propres 0 et -1 . Donc, l'unique singularité du champ $\tilde{\mathcal{F}}$ est élémentaire. \square

Pour résumer : quitte à faire un nombre fini d'éclatements, on peut se ramener au cas où l'on n'a que des singularités élémentaires, telles que le feuilletage soit défini au voisinage d'une telle singularité par une 1-forme du type :

$$\omega = (-\lambda_2 y + TOS)dx + (\lambda_1 x + TOS)dy$$

ou encore, si $\lambda_1 \neq 0$, par

$$\frac{1}{\lambda_1} \omega = (-\alpha y + TOS)dx + (x + TOS)dy$$

où $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{C}$. Si $\alpha \neq 0$, quitte échanger faire $(x, y) \mapsto (y, x)$, on peut remplacer α par α^{-1} .

Définition 3.2. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, déterminé par $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$. On suppose que le feuilletage a une singularité élémentaire en $(0, 0)$ et que $DF_{(0,0)}$ est diagonalisable, de valeurs propres λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 \neq 0$. Alors, $\alpha := \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ est appelé l'indice du feuilletage en $(0, 0)$ (si $\alpha \neq 0$, on identifie α et α^{-1}). L'origine est appelée :

1. un foyer si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
2. un col si $\alpha < 0$
3. un nœud si $\alpha > 0$
4. un noed-col si $\alpha = 0$.

Dans tous les cas, le point singulier est dit résonant si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Si $DF_{(0,0)}$ n'est pas diagonalisable, on pose $\alpha = 1$, et on parle de nœud de Jordan.

Proposition 3.3. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ ayant une singularité élémentaire en l'origine, et déterminé au voisinage de celle-ci par la 1-forme holomorphe $\omega = (-\alpha y + TOS)dx + (x + TOS)dy$, où $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha \neq 1$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ a deux points singuliers, dont les indices sont $\alpha - 1$ et $\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Si $\alpha = 1$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ n'a pas de point singulier.

Démonstration. La forme tangente est $h_2 = (1 - \alpha)xy$. Si $\alpha \neq 0$, la singularité est non-dicritique, et donc $\tilde{\mathcal{F}}$ a deux singularités, à savoir $(0, 0, [1 : 0]) \in \mathbb{E} \cap U_1$ et $(0, 0, [0 : 1]) \in \mathbb{E} \cap U_2$. Dans la carte U_1 , on a :

$$\tilde{\omega}_1 = ((1 - \alpha)z + x\beta(x, z))dx + (x + TOS)dz$$

et donc l'indice en la singularité $(0, 0, [1 : 0])$ est $\alpha - 1$. Dans la carte U_2 , on a :

$$\tilde{\omega}_2 = ((1 - \alpha)w + y + TOS)dy + (-\alpha y + TOS)dw$$

et donc l'indice en la singularité $(0, 0, [0 : 1])$ est $\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, alors $h_2 = 0$ et la singularité est dicritique. Or, comme dans ce cas $\omega = fdx + gdy$, avec $f = y + TOS$ et $g = -x + TOS$, on a $g_1(1, z) = -1$ et $f_1(w, 1) = 1$. Donc, d'après les calculs faits dans la preuve de la proposition 2.29, $\tilde{\mathcal{F}}$ n'a pas de singularité. \square

Proposition 3.4. *Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, déterminé par $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$, ayant une singularité élémentaire en l'origine. Alors, après un nombre fini d'éclatements, pour toute singularité a d'indice α du nouveau feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, $\alpha \notin (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \left(\frac{1}{\mathbb{N} \setminus \{0\}}\right)$.*

Démonstration. Comme on peut échanger α et α^{-1} avec un changement linéaire de coordonnées, et que $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (resp. $\alpha \in \frac{1}{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$) si et seulement si $\alpha^{-1} \in \frac{1}{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ (resp. $\alpha^{-1} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), il suffit de démontrer qu'on se peut ramener au cas où $\alpha \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons procéder par récurrence sur l'indice $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de la singularité d'origine.

Si $\alpha = 1$, et si $DF_{(0,0)}$ est (resp. n'est pas) diagonalisable, d'après la proposition 3.3 (resp. la proposition 3.1), après éclatement, il n'a aura plus de singularité (resp. il y aura une singularités d'indice 0).

Supposons que le résultat soit vraie pour toute singularité d'indice $\leq \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $(0, 0)$ soit une singularité d'indice $\alpha + 1$. Alors, d'après la proposition 3.3, après un éclatement, on aura deux singularités, d'indices α et $-\frac{1+\alpha}{\alpha} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il ne reste donc plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à la singularité d'indice α . \square

Définition 3.5. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, ayant une singularité élémentaire en l'origine. Notons α l'indice de \mathcal{F} en l'origine. On dit que la singularité $(0, 0)$ est irréductible si $\alpha \notin (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \left(\frac{1}{\mathbb{N} \setminus \{0\}}\right)$.

Pour résumer, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 3.6. *Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$, ayant une singularité isolée en l'origine. Alors, après un nombre fini d'éclatements, on aura un feuilletage n'ayant que des singularités élémentaires irréductibles.*

3.2 Existence de séparatrice pour une singularité élémentaire irréductible

Nous allons à présent montrer que dans le cas particulier des singularités élémentaires irréductibles, on peut toujours trouver un changement de coordonnées analytique qui nous révélera l'existence d'une ou deux (selon les cas) séparatrices lisses, ayant une équation particulièrement simple au voisinage de la singularité.

3.2.1 Cas où l'indice de la singularité est non-nul : la singularité n'est pas un noeud-col

Par commodité, nous allons travailler en termes de champ de vecteurs. On suppose que l'on a un champ de vecteurs holomorphe X sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, avec singularité isolée en $(0, 0)$, et tel que DX_0 soit diagonalisable, avec des valeurs propres λ_1 et λ_2 non-nulles, et tels que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{N}$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{N}$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on suppose que le champ de vecteur s'écrit dans les coordonnées $x = (x_1, x_2)$:

$$X(x) = (\lambda_1 x_1 + \phi_1(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + \phi_2(x)) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec ϕ_1 et ϕ_2 analytiques au voisinage de l'origine, et d'ordre ≥ 2 .

Théorème 3.7. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un changement de coordonnées analytique $x = (x_1, x_2) \xrightarrow{H} (y_1, y_2)$ tel que dans ces nouvelles coordonnées, le champ de vecteurs s'écrit :*

$$\tilde{X}(y) = \tilde{X}(H(x)) = DH_x(X(x)) = y_1(\lambda_1 + TOS) \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2(\lambda_2 + TOS) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

et les courbes d'équations $\{y_1 = 0\}$ et $\{y_2 = 0\}$ définissent des séparatrices lisses au voisinage de l'origine.

Démonstration. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, nous noterons $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Écrivons $\phi_i(x) = \sum_{|\alpha| \geq 2} \phi_{i,\alpha} x^\alpha$, où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, pour $i = 1, 2$. Nous allons commencer par effectuer un changement de variables formel, puis montrer qu'il est convergent. Écrivons :

$x = H(y)$, où $H = Id + \eta$, où $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ est d'ordre ≥ 2 . Notons $\eta_i(y) = \sum_{|\alpha| \geq 2} \eta_{i,\alpha} y^\alpha$ pour

$i = 1, 2$. Notons alors \tilde{X} le champ de vecteur défini par : $\tilde{X}(y) = D(H^{-1})_{H(y)}(X(H(y)))$, de sorte que $X(H(y)) = DH_y(\tilde{X}(y))$. Comme $DH_0 = Id$, on voit que la partie linéaire de \tilde{X} est $\lambda_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$. D'où, \tilde{X} s'écrit :

$$\tilde{X}(y) = (\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

avec $\psi_i(y) = \sum_{|\alpha| \geq 2} \psi_{i,\alpha} y^\alpha$, pour $i = 1, 2$. Ré-écrivons alors l'égalité $X(H(y)) = DH_y(\tilde{X}(y))$:

$$\begin{aligned} X(H(y)) &= (\lambda_1(y_1 + \eta_1(y)) + \phi_1(y + \eta(y))) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\lambda_2(y_2 + \eta_2(y)) + \phi_2(y + \eta(y))) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ DH_y(\tilde{X}(y)) &= DH_y \left((\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) \frac{\partial}{\partial y_1} + (\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= (\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) DH_y \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) + (\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) DH_y \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ &= (\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) \left(\left(1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + (\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= \left((\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) \left(1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} \right) + (\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) \frac{\partial \eta_1}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\quad + \left((\lambda_2 y_2 + \psi_2(y)) \left(1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial y_2} \right) + (\lambda_1 y_1 + \psi_1(y)) \frac{\partial \eta_2}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

D'où, en identifiant les coefficients de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i = 1, 2$, on voit que $X(H(y)) = DH_y(\tilde{X}(y))$ si et seulement si pour $i = 1, 2$:

$$(\star) \quad \sum_{|\alpha| \geq 2} (\delta_{i,\alpha} \eta_{i,\alpha} + \psi_{i,\alpha}) y^\alpha = \phi_i(y + \eta(y)) - \frac{\partial \eta_i(y)}{\partial y_1} \psi_1(y) - \frac{\partial \eta_i(y)}{\partial y_2} \psi_2(y)$$

où l'on a noté $\delta_{i,\alpha} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 - \lambda_i$, pour $i = 1, 2$. En écrivant le membre de droite l'égalité ci-dessus comme $\sum_{|\alpha| \geq 2} \mu_{i,\alpha} y^\alpha$, on remarque que pour tout $|\alpha| \geq 2$, $\mu_{i,\alpha}$ s'exprime

(de façon polynomiale) en les inconnues $\eta_{i,\beta}$, $\psi_{i,\beta}$, avec $|\beta| < |\alpha|$. En particulier, les coefficients $\mu_{i,\alpha}$ avec $|\alpha| = 2$, s'expriment uniquement en fonction des $\phi_{i,\beta}$. On peut donc définir les $\eta_{i,\alpha}$ et $\psi_{i,\alpha}$ par récurrence sur $|\alpha|$.

Étant donné que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ne sont pas dans \mathbb{N} , on voit que si $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, c'est à dire si $(y_1 y_2)$ ne divise pas y^α , alors $\delta_{i,\alpha} \neq 0$ pour $i = 1, 2$. On pose alors dans ce cas :

$$\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = 0 \\ \eta_{i,\alpha} = \frac{\mu_{i,\alpha}}{\delta_{i,\alpha}} \end{cases}$$

Si au contraire $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, c'est à dire si $(y_1 y_2)$ divise y^α , on pose :

$$\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = \mu_{i,\alpha} \\ \eta_{i,\alpha} = 0 \end{cases}$$

Le problème donné par (\star) est alors formellement résolu. Reste à voir que la série définissant η est convergente. On en déduira alors également la convergence de ψ (ou de manière équivalente, de \tilde{X}), car $H = Id + \eta$ sera alors un biholomorphisme et car X est holomorphe. Convenons de quelques notations pour la suite. Si $\xi = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} y^{\alpha} \in \mathbb{C}[[y_1, y_2]]$, on notera $\bar{\xi} = \sum_{\alpha} |\xi_{\alpha}| y^{\alpha} \in \mathbb{C}[[y_1, y_2]]$ et $\bar{\bar{\xi}} = \sum_{\alpha} |\xi_{\alpha}| z^{|\alpha|} \in \mathbb{C}[[z]]$. De plus, si $\omega = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} y^{\alpha} \in \mathbb{C}[[y_1, y_2]]$, on écrira $\omega \prec \xi$ si pour tout multi-indice α , $|\omega_{\alpha}| \leq |\xi_{\alpha}|$.

Commençons par remarquer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $i = 1, 2$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tel que $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$ et $|\alpha| \geq 2$, $|\delta_{i,\alpha}| > \delta$. En effet, comme $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{N}$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{N}$,

$$\delta = \min \left\{ \left| \lambda_2 \left(E \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) + 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right|, \left| \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - E \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right) \right|, \left| \lambda_1 \left(E \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right|, \left| \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - E \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right) \right| \right\}$$

convient (distinguer les cas $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$). Pour $i = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned} \delta \bar{\eta}_i &= \sum_{|\alpha| \geq 2} \delta |\eta_{i,\alpha}| y^\alpha \\ &\prec \sum_{|\alpha| \geq 2} |\delta_{i,\alpha}| |\eta_{i,\alpha}| y^\alpha \\ &\prec \sum_{|\alpha| \geq 2} (|\delta_{i,\alpha}| |\eta_{i,\alpha}| + |\psi_{i,\alpha}|) y^\alpha \end{aligned}$$

Or, comme pour chaque $|\alpha| \geq 2$, soit $\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = 0 \\ \eta_{i,\alpha} = \frac{\mu_{i,\alpha}}{\delta_{i,\alpha}} \end{cases}$, soit $\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = \mu_{i,\alpha} \\ \eta_{i,\alpha} = 0 \end{cases}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \delta \overline{\eta}_i &< \sum_{|\alpha| \geq 2} |\mu_{i,\alpha}| y^\alpha \\ &< \overline{\phi}_i(y_1 + \overline{\eta}_1, y_2 + \overline{\eta}_2) + \frac{\overline{\partial \eta}_i}{\partial y_1} \overline{\psi}_1 + \frac{\overline{\partial \eta}_i}{\partial y_2} \overline{\psi}_2 \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Or, $\eta_{i,\alpha} = 0$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ tel que $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, autrement dit, η_j n'a que des termes nuls dans l'idéal $(y_1 y_2)$, alors que $\frac{\overline{\partial \eta}_i}{\partial y_1} \overline{\psi}_1 + \frac{\overline{\partial \eta}_i}{\partial y_2} \overline{\psi}_2$ est dans l'idéal $(y_1 y_2)$. On en déduit donc que pour $i = 1, 2$:

$$\delta \overline{\eta}_i < \overline{\phi}_i(y_1 + \overline{\eta}_1, y_2 + \overline{\eta}_2) < \overline{\phi}_i(y_1 + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2, y_2 + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2)$$

et donc :

$$\delta \overline{\eta}_i < \overline{\phi}_i(z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2, z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2 &< \frac{1}{\delta} \left(\overline{\phi}_1(z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2, z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2) + \overline{\phi}_2(z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2, z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2) \right) \\ &< \frac{1}{\delta} \left(\overline{\phi}_1(z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2) + \overline{\phi}_2(z + \overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2) \right) \end{aligned}$$

Or, les séries $\overline{\phi}_i$ sont convergentes pour $0 < |z|$ assez petit. Donc, en notant $\rho > 0$ le rayon de convergence de

$$\frac{\overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2}{\delta} = \sum_{|\alpha| \geq 2} \left(\frac{|\phi_{1,\alpha}| + |\phi_{2,\alpha}|}{\delta} \right) z^{|\alpha|} = \sum_{k \geq 2} b_k z^k$$

avec les $b_k > 0$, en notant M un majorant de la suite $(b_k \rho^k)_{k \geq 2}$, on a pour tout $k \geq 2$, $b_k \leq M \frac{1}{\rho^k}$. D'où, en écrivant $a = \frac{1}{\rho}$,

$$\frac{\overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2}{\delta} < \frac{M z^2}{1 - a z}$$

Notons alors $u = \sum_{k \geq 1} u_k z^k = \frac{\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2}{z}$. Alors, d'après ce qui précède, u vérifie :

$$\begin{aligned} u &< \frac{\overline{\phi}_1(z(1+u)) + \overline{\phi}_2(z(1+u))}{\delta z} \\ u &< \frac{M z (1+u)^2}{1 - a z (1+u)} \end{aligned}$$

En développant le membre de droite, c'est à dire $\frac{Mz(1+u)^2}{1-az(1+u)}$, on constate que pour tout k , son coefficient correspondant au terme de d'indice $k \geq 2$ est un polynôme à coefficients positifs en les (u_1, \dots, u_{k-1}) , noté $P_k(u_1, \dots, u_{k-1})$. En particulier, les u_k étant tous positifs, on a pour tout $k \geq 2$, $u_k \leq P_k(u_1, \dots, u_{k-1})$.

Considérons la série entière $v = \sum_{k \geq 0} v_k z^k$ définie de la façon suivante : si l'on note

$\sqrt{1+u} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)2^{2k}} u^k$ la détermination de la racine carrée valant 1 en $u = 0$, et de rayon de convergence égale à 1, on définit :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1 - (2M + a) - \sqrt{1 - 2(a + 2M)z + a^2 z^2}}{2(M + a)z} \\ &= Mz + \sum_{k \geq 2} v_k z^k \end{aligned}$$

et on constate que v est l'unique solution développable en série de l'équation

$$v = \frac{Mz(1+v)^2}{1-az(1+v)}$$

On constate que $v_0 = 0, v_1 = M$ et que pour tout $k \geq 2$, $v_k = P_k(v_1, \dots, v_{k-1})$. Choisissons alors M assez grand pour que $M = v_1 > u_1$. Alors, $u \prec v$. En effet, on raisonne par récurrence sur $k \geq 0$. $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 < v_1$. Si $k \geq 2$ et tel que $u_l \leq v_l$ pour tout $l \leq k-1$, alors

$$u_k \leq P_k(u_1, \dots, u_{k-1}) \leq P_k(v_1, \dots, v_{k-1}) = v_k$$

car P_k est à coefficients positifs. En conclusion de tout ceci, comme v est convergente pour $|z| < \rho = \frac{1}{a}$, u l'est aussi, et il en est alors de même de $\overline{\eta_1}$ et $\overline{\eta_2}$. Comme expliqué plus haut, $\overline{\psi_1}$ et $\overline{\psi_2}$ sont alors également convergentes. \square

3.2.2 Cas où l'indice de la singularité est nul : la singularité est un noeud-col

Avec les mêmes notations que précédemment, on suppose désormais que $\lambda_2 = 0$ (et $\lambda_1 \neq 0$), et que le champ de vecteur s'écrit :

$$X(x) = (\lambda_1 x_1 + \phi_1(x)) \frac{\partial}{\partial x_1} + \phi_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec ϕ_1 et ϕ_2 analytiques au voisinage de l'origine, et d'ordres ≥ 2 .

Théorème 3.8. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un changement de coordonnées analytique $x = (x_1, x_2) \xrightarrow{H} (y_1, y_2)$ tel que dans ces nouvelles coordonnées, le champ de vecteurs s'écrit :*

$$\tilde{X}(y) = \tilde{X}(H(x)) = DH_x(X(x)) = (\lambda_1 y_1 + y_2 g(y_1, y_2)) \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 f(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

où f et g sont holomorphes au voisinage de l'origine, avec $\text{ord}_0(f) \geq 1$, et la courbe d'équation $\{y_2 = 0\}$ définit alors une séparatrice lisse au voisinage de l'origine, appelée séparatrice forte du noeud-col.

Démonstration. En reprenant le même schéma et les mêmes notations que pour la preuve du théorème précédent, on voit que $\delta_{1,\alpha} = \lambda_1(\alpha_1 - 1)$ et $\delta_{2,\alpha} = \lambda_1\alpha_1$, et donc qu'on peut définir un changement de variables formel résolvant notre problème en posant

$$\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = 0 \\ \eta_{i,\alpha} = \frac{\mu_{i,\alpha}}{\delta_{i,\alpha}} \end{cases}$$

si $\alpha_2 = 0$, c'est à dire si y_2 ne divise pas y^α et

$$\begin{cases} \psi_{i,\alpha} = \mu_{i,\alpha} \\ \eta_{i,\alpha} = 0 \end{cases}$$

si $\alpha_2 \neq 0$, c'est à dire si y_2 divise y^α . On procède alors de façon similaire à ci-dessus pour prouver la convergence de η_1 et η_2 , et donc de ψ_1 et ψ_2 . De façon plus précise, on remarque que pour $i = 1, 2$, η_i ne dépend que de y_1 , alors qu'au contraire, $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_1} \overline{\psi_1} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y_2} \overline{\psi_2}$ est dans l'idéal (y_2) . On obtient donc à nouveau que $\delta \overline{\eta}_i \prec \overline{\phi}_i(y_1 + \overline{\eta}_1, y_2 + \overline{\eta}_2)$ et la suite de la preuve est identique. \square

3.3 Indice de Camacho-Sad

Considérons une surface complexe M , munie d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F} , déterminé par une 1-forme ω . Considérons une courbe invariante irréductible et lisse C , contenant une singularité isolée p du feuilletage, et donnée par l'équation $\{h = 0\}$ dans un petit voisinage ouvert $(U, p) \cong (\mathbb{C}^2, 0)$, où h est une fonction holomorphe sur $U \subset M$, dont la différentielle ne s'annule pas sur C .

Proposition 3.9. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une fonction holomorphe g et une 1-forme méromorphe θ telles que sur un ouvert suffisamment petit (inclus dans U) on ait :*

$$\omega = g(dh + h\theta)$$

et telles que les zéros de g et les pôles de θ ne peuvent être situés qu'en les singularités de ω sur C . De plus, les restrictions de g à C et de θ à TC sont uniquement déterminés par ω et h .

Démonstration. Comme C est lisse, il existe une carte $\phi_\alpha : (U_\alpha, p) \subset (U, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que $h \circ \phi_\alpha^{-1}(x, y) = y$, et donc que $\phi_\alpha(C \cap U_\alpha) = \{y = 0\}$. Dans cette carte :

$$\omega_\alpha = (\phi_\alpha^{-1})^* \omega = f_\alpha(x, y)dx + g_\alpha(x, y)dy$$

où f_α et g_α sont holomorphes au voisinage de $(0,0)$. Par hypothèse, $\omega|_{TC} = 0$, d'où

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(x,0) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= f_\alpha(x,0)dx + g_\alpha(x,0)dy \\ 0 &= f_\alpha(x,0)\end{aligned}$$

et donc

$$\omega_\alpha(x,0) = g_\alpha(x,0)dy$$

et pour tout $m \in C \cap U_\alpha$

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(\phi_\alpha(m)) &= g_\alpha(\phi_\alpha(m)) \left(dh_m \circ (d\phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(m)} \right) \\ \Rightarrow \omega(m) &= \omega_\alpha(\phi_\alpha(m)) \circ (d\phi_\alpha)_m \\ \omega(m) &= g_\alpha(\phi_\alpha(m))dh_m\end{aligned}$$

Donc, $\omega|_C = gdh|_C$, où $g = (g_\alpha \circ \phi_\alpha)|_C$ est une fonction holomorphe sur C . Remarquons que g ne s'annule qu'en les singularités de ω sur C et que g est uniquement déterminée par ω et h . Prolongeons à présent g en une fonction holomorphe au voisinage de C ne s'annulant qu'en les singularités de ω sur C : un tel prolongement existe (par exemple $g_\alpha \circ \phi_\alpha$), mais n'est pas nécessairement unique. Notons un tel prolongement à nouveau g . Considérons alors la 1-forme holomorphe $\omega - gdh$ sur U_α . Elle s'annule sur C : il existe donc une 1-forme holomorphe η sur U_α tel que $\omega - gdh = h\eta$. Définissons $\theta = \frac{1}{g}\eta$, qui est une 1-forme méromorphe sur U_α n'ayant ses pôles qu'en des zéros de g . Alors :

$$\omega = g(dh + h\theta)$$

et on a la forme recherchée.

Regardons ce qu'il se passe si l'on considère une autre extension \tilde{g} de g . On aura alors une autre 1-forme méromorphe $\tilde{\theta}$ tel que

$$\omega = \tilde{g}(dh + h\tilde{\theta})$$

Mais $g|_C = \tilde{g}|_C$ et donc il existe une fonction holomorphe u telle que $\tilde{g} - g = uh$. D'où :

$$g(dh + h\theta) = (g + uh)(dh + h\tilde{\theta})$$

et donc :

$$hg(\theta - \tilde{\theta}) = hu(dh + h\tilde{\theta})$$

Et comme $g(\theta - \tilde{\theta})$ et $u(dh + h\tilde{\theta})$ sont des 1-formes holomorphes au voisinage de p , qui coïncident hors de C , on en déduit, par continuité, qu'au voisinage de p :

$$g(\theta - \tilde{\theta}) = u(dh + h\tilde{\theta})$$

Or, $dh|_{TC} = 0$ et $(h\tilde{\theta})|_{TC} = 0$, donc $(g\tilde{\theta})|_{TC} = (g\theta)|_{TC}$. Comme g n'a que des zéros isolés sur C , correspondants aux pôles éventuels de θ et $\tilde{\theta}$, on en déduit que $\theta|_{TC} = \tilde{\theta}|_{TC}$. \square

Remarque 3.10. On voit que θ ne change pas si l'on remplace ω par $\alpha\omega$, où α est une fonction holomorphe ne s'annulant pas.

Corollaire 3.11. *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, si la fonction h est remplacée par une fonction $h' = vh$, avec $v|_C \neq 0$, alors θ est remplacée par*

$$\theta' = \theta - \frac{dv}{v}$$

Démonstration. On a $dh' = vdh + hdv$, $g' = \frac{g}{v}$ sur C , et donc sur C :

$$\begin{aligned} g'(dh' + h'\theta') &= g(dh + h\theta) \\ \Rightarrow g'(vdh + hdv + vh\theta') &= vg'(dh + h\theta) \\ \Rightarrow hg'(dv + v\theta') &= vhg'\theta \\ \Rightarrow \theta' &= \theta - \frac{dv}{v} \end{aligned}$$

\square

Remarque 3.12. (c.f. [Mir]) Rappelons que si θ est une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann S , ayant un pôle en un point $q \in S$, alors le résidu de θ en q est par définition : $Res_q(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \theta$, où γ est un petit lacet entourant q dans S , et n'entourant que q comme pôle de θ . L'intégrale de θ le long de γ est définie en calculant l'intégrale dans des cartes locales : le théorème du changement de variables, ainsi que le fait que les changements de cartes soient biholomorphes, montrent que l'intégrale est bien définie, c'est-à-dire ne dépend pas du choix des cartes.

De plus, si dans une carte centrée en q , θ s'écrit en série de Laurent $\sum_{n \geq N} c_n z^n dz$, avec $N < 0$, alors

$$Res_q(\theta) = c_{-1}$$

Revenons-en à la proposition et au corollaire ci-dessus. En reprenant les notations introduites, on voit que $Res_p(\theta|_{TC}) = Res_p(\theta'|_{TC})$, car la forme $\frac{dv}{v}$ est holomorphe en $p \in C$. Tout ceci justifie la définition suivante :

Définition 3.13. Considérons une surface complexe M , munie d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F} , déterminé par une 1-forme ω . Considérons une courbe invariante irréductible lisse C , contenant une singularité isolée p du feuilletage, et donnée par l'équation $\{h = 0\}$ dans un petit voisinage ouvert $(U, p) \cong (\mathbb{C}^2, 0)$, où h est une fonction holomorphe sur $U \subset M$, dont la différentielle ne s'annule pas sur C . Soit alors une fonction

holomorphe g et une 1-forme méromorphe θ telles que sur un ouvert suffisamment petit (inclus dans U) on ait :

$$\omega = g(dh + h\theta)$$

et telles que les zéros de g et les pôles de θ ne peuvent être situées qu'en les singularités de ω sur C . On définit alors l'indice de Camacho-Sad de \mathcal{F} (ou de ω) en p par rapport à C comme le résidu de la 1-forme $\theta|_{TC}$:

$$CS(\omega, C, p) = CS(\mathcal{F}, C, p) = -Res_p(\theta|_{TC})$$

et celui-ci est bien défini d'après ce qui précède.

Remarque 3.14. Concrètement, si dans une carte de coordonnées (x, y) , ω est donnée par $\omega = fdx + gdy$, avec singularité isolée en $(0, 0)$, et si la courbe C d'équation locale $\{y = 0\}$ est invariante, alors $f = yf'$ et donc $\theta = \frac{f'}{g}dx$, : on a alors :

$$CS(\omega, C, 0) = -Res_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right) (x, 0) \right) = -Res_0 \left(\frac{f'(x, 0)}{g(x, 0)} \right)$$

Démonstration. En effet, ici $h = y$, et comme la courbe $\{y = 0\}$ est invariante, la fonction $f(x, y)$ est divisible par y : $f(x, y) = ya(x, y)$. D'où : $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{g} \right) (x, 0) = \frac{a(x, 0)}{g(x, 0)}$. Enfin, $\omega = g(dh + h\theta)$ avec $g = g(x, y)$ et $\theta = \frac{a(x, y)}{g(x, y)}dx$. \square

Exemple 3.15. Si $0 \in \mathbb{C}^2$ est une singularité élémentaire irréductible de

$$\omega = y(\lambda_2 + TOS)dx - x(\lambda_1 + TOS)dy$$

avec λ_1 et λ_2 non-nuls, $C_1 = \{y = 0\}$ et $C_2 = \{x = 0\}$ sont deux courbes invariantes irréductibles lisses et on a :

$$\begin{aligned} CS(\omega, C_1, 0) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ CS(\omega, C_2, 0) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Si $0 \in \mathbb{C}^2$ est une singularité élémentaire irréductible de

$$\omega = yf(x, y)dx - (\lambda_1x + yg(x, y))dy$$

où $\lambda_1 \neq 0$, et f, g sont deux fonctions holomorphes avec $ord_0(f) \geq 1$. Alors, $C = \{y = 0\}$ est une courbe invariante irréductible lisse (la séparatrice forte) et on a :

$$CS(\omega, C, 0) = 0$$

3.4 Indice de Camacho-Sad après éclatement

Nous allons à présent énoncer et prouver deux résultats fondamentaux dans la démonstration du théorème d'existence d'une séparatrice en dimension deux, qui expliquent comment se comporte l'indice de Camacho-Sad par éclatement.

Proposition 3.16. *Supposons que le diviseur exceptionnel \mathbb{E} obtenu après éclatement de la singularité $(0,0)$ d'un feuilletage \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ soit une courbe invariante du feuilletage éclaté $\tilde{\mathcal{F}}$; autrement dit, $(0,0)$ est une singularité non-dicritique. Alors :*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})} CS(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}, p) = -1$$

Démonstration. Rappelons que \mathbb{E} est une courbe irréductible. A présent, écrivons en coordonnées : $\omega = f dx + g dy$ et $h = x f + y g$. Supposons la singularité d'ordre n . Comme on est dans le cas non-dicritique, on a vu dans la proposition 2.29 que $h_{n+1} = x f_n + y g_n \neq 0$, et que les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont données par $h_{n+1}(0,0, [x : y]) = 0$. On a vu dans la preuve du théorème 2.42 que quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que $\text{ord}_0(f) = \text{ord}_0(g) = n$, et que $(0,0, [0 : 1])$ n'est pas une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire que x ne divise pas $h_{n+1}(x, y)$, ou encore que x ne divise pas g_n . Écrivons dans la carte U_1 :

$$\tilde{\omega}_1 = [h_{n+1}(1, z) + x\alpha(x, z)] dx + x [g_n(1, z) + x\beta(x, z)] dz$$

avec α et β holomorphes. Notons $p_k = (0,0, [1 : z_k])$ les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$, $k = 1, \dots, r$. Alors, pour tout k :

$$CS(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}, p_k) = -\text{Res}_{z_k} \left(\frac{g_n(1, z)}{h_{n+1}(1, z)} \right)$$

Considérons la 1-forme méromorphe θ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, définie par

$$\begin{cases} \theta_1(z) = \frac{g_n(1, z)}{h_{n+1}(1, z)} dz & , \text{ dans la carte } V_1 = \{[1 : z] \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \theta_2(w) = \frac{g_n(w, 1)}{h_{n+1}(w, 1)} \left(-\frac{1}{w}\right) dw & , \text{ dans la carte } V_2 = \{[w : 1] \mid w \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \end{cases}$$

Par hypothèse sur g_n et h_{n+1} , $\frac{g_n(w, 1)}{h_{n+1}(w, 1)}$ n'a pas de pôle ni de zéros en $w = 0$, et donc $w = 0$ est un pôle de $\frac{g_n(w, 1)}{h_{n+1}(w, 1)} \left(-\frac{1}{w}\right)$, dont le résidu est -1 . Les pôles de θ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ sont donc parmi les $[1 : z_k]$ et $[0 : 1]$ (si z_k n'est pas un pôle de $\frac{g_n(1, z)}{h_{n+1}(1, z)}$, son résidu est nul, et ne jouera aucun rôle dans ce qui suit). Or, d'après le théorème des résidus pour une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann compacte (qui découle du théorème de Stokes : *c.f.* [Mir]), la somme des résidus de la 1-forme est nulle :

$$\sum_{p \text{ pôle de } \theta} \text{Res}_p(\theta) = \sum_{k=1}^r \text{Res}_{z_k} \left(\frac{g_n(1, z)}{h_{n+1}(1, z)} \right) - 1 = 0$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^r CS(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}, p_k) = \sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})} CS(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}, p) = -1$$

□

Proposition 3.17. *Soit C une courbe invariante irréductible lisse d'un feuilletage \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, contenant la singularité $(0, 0)$. Notons \tilde{C} et $\tilde{\mathcal{F}}$ la courbe et le feuilletage obtenus par éclatement de l'origine. On sait que $\tilde{C} \cap \mathbb{E}$ est réduit à un point p et que \tilde{C} est une courbe invariante de $\tilde{\mathcal{F}}$. On a alors :*

$$CS(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{C}, p) = CS(\mathcal{F}, C, 0) - 1$$

Démonstration. Commençons par prendre des coordonnées (x, y) telle que la courbe C soit donnée par l'équation $\{y = 0\}$ au voisinage de l'origine (C est lisse). Alors, si le feuilletage est déterminé par la 1-forme ω , celle-ci s'écrit alors :

$$\omega = ya(x, y)dx + g(x, y)dy$$

avec a et g holomorphes au voisinage de 0, et $g(0, 0) = 0$. Par définition,

$$CS(\mathcal{F}, C, 0) = -\text{Res}_{x=0} \left(\frac{a(x, 0)}{g(x, 0)} \right)$$

Considérons maintenant l'éclatement \tilde{C} de C . D'après la proposition 2.22, le seul point d'intersection de \tilde{C} avec \mathbb{E} est $p = (0, 0, [1 : 0]) \in U_1$. De plus, dans la carte U_1 , l'équation de \tilde{C} est $\{z = 0\}$. Comme habituellement, notons $n = \text{ord}_0(\omega)$. Après division par une puissance convenable m (égale à n si la singularité est non-dicritique, et à $n + 1$ si la singularité est dicritique), on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{x^m} ((xza(x, xz) + zg(x, xz)) dx + xg(x, xz)dz) \\ &= z \left(\frac{xa(x, xz) + g(x, xz)}{x^m} \right) dx + \frac{xg(x, xz)}{x^m} dz \end{aligned}$$

Remarquons que dans tous les cas, $(x, z) \mapsto \frac{xa(x, xz) + g(x, xz)}{x^m}$ est holomorphe. Donc,

$$\begin{aligned} CS(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{C}, p) &= -\text{Res}_{x=0} \left(\frac{xa(x, 0) + g(x, 0)}{xg(x, 0)} \right) \\ &= -\text{Res}_0 \left(\frac{a(x, 0)}{g(x, 0)} + \frac{1}{x} \right) \\ &= CS(\mathcal{F}, C, 0) - 1 \end{aligned}$$

□

3.5 Preuve du théorème de Camacho-Sad

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème de Camacho-Sad.

Théorème 3.18. (*Théorème de Camacho-Sad*) *Tout feuilletage holomorphe d'une surface complexe ayant une singularité isolée possède une séparatrice au voisinage de cette singularité.*

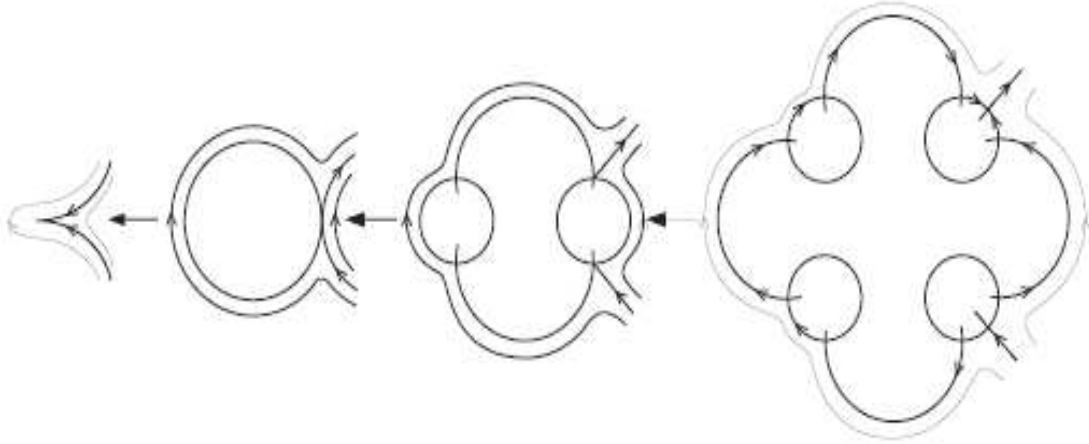


Figure 6. : Désingularisation d'un “cusp” (dessin réel) (*c.f.* [D-L-A])

Démonstration. Considérons un champ de vecteur sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, définissant un feuilletage holomorphe \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, avec singularité isolée en l’origine. Supposons pas l’absurde qu’il n’existe aucune séparatrice au voisinage de l’origine. Appliquons à présent le théorème de réduction des singularités. Il existe une surface complexe M , contenant une courbe analytique connexe D , ainsi qu’une application holomorphe propre $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, telle que $D = \pi^{-1}(\{0\})$, injective sur $M \setminus D$, telle que le feuilletage $\pi^* \mathcal{F}$ n’ait que des singularités élémentaires irréductibles. Plus précisément, l’application π peut être obtenue par un nombre fini de “blow-ups” : $\pi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N$. De plus, $D = \bigcup_{j=1}^N D_j$, où pour tout j , D_j est une courbe analytique lisse irréductible, $D_j \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et les D_j s’intersectent transversalement deux à deux en au plus un point. Supposons que D_1 corresponde à l’éclatement final du diviseur exceptionnel apparu après le premier éclatement σ_1 , et que D_N corresponde à celui apparu après le dernier éclatement d’une singularité situé sur $\sigma_N(D_{N-1})$. Nous avons vu au début de cette partie que toute singularité élémentaire irréductible possède au moins une séparatrice, donc chacune des courbes D_j doit être invariante pour le feuilletage $\pi^* \mathcal{F}$ (si ce n’était pas le cas, en prenant l’image par π d’une courbe invariante de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectant D seulement en des points isolés, on aurait une séparatrice de \mathcal{F} en l’origine).

Définissons la matrice d’intersection de D de la façon suivante :

$$A = (a_{i,j})_{i,j} \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

où pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i \neq j \text{ et } D_i \cap D_j \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \text{ et } D_i \cap D_j = \emptyset \\ \sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D_i} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, p) & , \text{ si } i = j \end{cases}$$

Lemme 3.19. *La matrice A est symétrique, à coefficients entiers, et est définie négative.*

Démonstration. Pour tout $i = 1, \dots, N$, $\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D_i} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, p) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ d'après les propositions 3.16 et 3.17. En effet, après le premier éclatement σ_1 , on a un diviseur exceptionnel \mathbb{E}_1 et

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\sigma_1^* \mathcal{F})} CS(\sigma_1^* \mathcal{F}, \mathbb{E}_1, p) = -1$$

Puis, après un second éclatement σ_2 centré par exemple en une singularité $p_1 \in \mathbb{E}_1$, on aura un nouveau diviseur exceptionnel \mathbb{E}_2 et on aura :

$$\begin{cases} \sum_{p \in \text{Sing}((\sigma_1 \circ \sigma_2)^* \mathcal{F})} CS((\sigma_1 \circ \sigma_2)^* \mathcal{F}, \sigma_2^*(\mathbb{E}_1), p) = -2 & , \text{ d'après la proposition 3.17} \\ \sum_{p \in \text{Sing}((\sigma_1 \circ \sigma_2)^* \mathcal{F})} CS((\sigma_1 \circ \sigma_2)^* \mathcal{F}, \mathbb{E}_2, p) = -1 & , \text{ d'après la proposition 3.16} \end{cases}$$

Par récurrence, on voit facilement que si $\pi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N$ et si $D_1 = (\sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_N)^*(\mathbb{E}_1)$, $D_2 = (\sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_N)^*(\mathbb{E}_2)$, etc... , alors pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D_i} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, p) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

En particulier, $A \in S_N(\mathbb{Z})$.

Montrons par récurrence sur N que la matrice A est définie négative. Pour $N = 1$, le résultat est clair car après un seul éclatement,

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})} CS(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}, p) = -1$$

Supposons le résultat vrai pour toute telle configuration avec N éclatements. Supposons que la singularité soit complètement réduite après $N + 1$ éclatements $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{N+1}$, et que D_N corresponde au diviseur exceptionnel apparu après le dernier éclatement d'une singularité notée p_N situé sur $\sigma_{N+1}(D_N)$. Soit $X = \begin{pmatrix} X' \\ x_{N+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$,

où $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ et $x_{N+1} \in \mathbb{R}$, et $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N} \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ la matrice

d'intersection après les N premiers éclatements, c'est-à-dire, celles correspondant aux courbes $\sigma_{N+1}(D_j)$, $j = 1, \dots, N$. Par hypothèse de récurrence, A' est définie négative. Montrons que ${}^tXAX < 0$. Distinguons deux cas.

- 1er cas : pour tout $i = 1, \dots, N - 1$, $p_N \notin \sigma_{N+1}(D_i)$. Dans ce cas, d'après les propositions 3.16 et 3.17, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N\}$ avec $(i, j) \neq (N, N)$, on a $a_{i,j} = a'_{i,j}$, $a_{N,N} = a'_{N,N} - 1$ et $a_{N+1,N+1} = -1$. Donc :

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX'A'X' + 2x_Nx_{N+1} - x_N^2 - x_{N+1}^2 \\ &= {}^tX'A'X' - (x_N - x_{N+1})^2 \\ &< 0, \text{ car } A' \text{ est définie négative et car } X \neq (0) \end{aligned}$$

- 2ème cas : il existe un unique $i \in \{1, \dots, N - 1\}$ tel que $p_N \in \sigma_{N+1}(D_i)$. Supposons pour simplifier et sans perdre de généralités que $i = N - 1$. Alors, pour tout $j \leq N - 2$, $p_N \notin \sigma_{N+1}(D_j)$ et donc pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N - 2\} \times \{1, \dots, N\}$, $a_{i,j} = a'_{i,j}$. De plus, $a_{N-1,N} = 0$ alors que $a'_{N-1,N} = 1$, car $D_N \cap D_{N-1} = \emptyset$ dans notre cas, pour tout $j \leq N - 2$, $a_{N-1,j} = a'_{N-1,j}$ et $a_{N-1,N-1} = a'_{N-1,N-1} - 1$. Enfin, $a_{N,N} = a'_{N,N} - 1$, pour tout $j \in N - 2$, $a_{N+1,j} = 0$, $a_{N+1,N-1} = a_{N+1,N} = 1$ et $a_{N+1,N+1} = -1$. Donc :

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX'A'X' + 2x_Nx_{N+1} + 2x_{N-1}x_{N+1} - 2x_{N-1}x_N - x_{N-1}^2 - x_N^2 - x_{N+1}^2 \\ &= {}^tX'A'X' - (x_{N-1} + x_N - x_{N+1})^2 \\ &< 0, \text{ car } A' \text{ est définie négative et car } X \neq (0) \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence. □

Le but sera à présent de montrer l'existence d'un vecteur isotrope non-nul pour la forme quadratique définie par la matrice symétrique A : la contradiction recherchée aura lieu, car A est définie négative.

Remarquons que toute singularité p de $\pi^*\mathcal{F}$ qui appartient à exactement une courbe D_j , *i.e.* qui n'est pas un point d'intersections de deux telles courbes, est nécessairement une singularité élémentaire irréductible de type noeud-col dont la séparatrice forte soit D_j (en $CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, p) = 0$). En effet : sinon, la singularité noeud-col posséderait au moins deux séparatrices transversales, et dont l'une serait transversale à D , et donc par la projection π , elle aurait pour image une séparatrice de \mathcal{F} en 0. De plus, remarquons que nécessairement $N \geq 2$: sinon on aurait un seul diviseur, et donc la somme des indices de Camacho-Sad par rapport à celui-ci en les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ serait nul. Or, cette somme doit être égale à -1 d'après la proposition 3.16 : contradiction.

Nous allons à présent considérer une sous-famille non-vide de $(D_j)_{j=1, \dots, N}$ dont la réunion D' sera connexe, telle que toute intersection de deux diviseurs D_i et D_j de D' ne soit pas du type noeud-col, et telle que pour toute autre singularité p de $\tilde{\mathcal{F}}$ appartenant à un seul diviseur D_k de D' , on ait : $CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_k, p) = 0$. Voyons comment construire D' . On a vu que $N \geq 2$. Si aucun point d'intersection de deux diviseurs n'est du type noeud-col, alors on prend $D = D'$. Sinon, considérons un point d'intersection $q_1 = D_{i_1} \cap D_{j_1}$ qui soit

du type noeud-col. Alors, l'indice de Camacho-Sad par rapport à D_{i_1} ou D_{j_1} en q_1 est nul. Supposons que $CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_{i_1}, q_1) = 0$. On écrit alors $D = D^{(i_1)} \cup D^{(j_1)}$, où $D^{(i_1)}$ et $D^{(j_1)}$ sont deux réunions des $(D_j)_{j=1, \dots, N}$, connexes, telles que $D_{i_1} \subset D^{(i_1)}$ et $D_{j_1} \subset D^{(j_1)}$, et $D^{(i_1)} \cap D^{(j_1)} = \{q_1\}$. On s'intéresse alors à $D^{(i_1)}$. A nouveau, comme $CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_{i_1}, q_1) = 0$, que $\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D_{i_1}} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_{i_1}, p) < 0$, et que toute singularité n'appartenant qu'à un seul

diviseur à un indice de Camacho-Sad nul par rapport à celui-ci, $D^{(i_1)}$ comporte au moins deux diviseurs. Si aucun point d'intersection de deux diviseurs de $D^{(i_1)}$ n'est du type noeud-col, on prend $D' = D^{(i_1)}$. Sinon, on recommence le processus. On prend un point du type noeud-col $q_2 \in D_{i_2} \cap D_{j_2}$, où D_{i_2} et D_{j_2} sont des diviseurs de $D^{(i_1)}$, et on suppose que $CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_{i_2}, q_2) = 0$. On écrit alors $D^{(i_1)} = D^{(i_2)} \cup D^{(j_2)}$ comme précédemment, et ainsi de suite. Le processus s'arrête nécessairement, car il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs, et car pour tout diviseur D_j , $\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D_j} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, p) < 0$.

Quitte à renuméroter les D_j , on suppose que $D' = \bigcup_{j=1}^r D_j$, avec $r \geq 2$, car D' contient au moins un point qui ne soit pas du type noeud-col, et donc au moins deux diviseurs. Nous allons à présent introduire une "distance" entre les courbes D_j , $2 \leq j \leq r$, et D_1 . Nous allons utiliser la remarque 2.45. Posons $\delta(D_1) = 0$, et pour tout D_j tel que $D_j \cap D_1 \neq \emptyset$, on pose $\delta(D_j) = 1$.

Ensuite, pour tout i tel qu'il existe $j_i \neq i$ avec $\delta(D_{j_i}) = 1$ et $D_{j_i} \cap D_i \neq \emptyset$, on pose $\delta(D_i) = 2$. Puis, par récurrence, et en utilisant la connexité et le fait qu'il n'y ait pas de "cycle" (*cf.* remarque 2.45), on définit $\delta(D_i)$ pour tout i (il n'y a qu'un nombre fini de D_i). Supposons qu'il existe $k \leq r - 1$ tel que l'on ait défini $\delta(D_i)$ pour tout D_i vérifiant la condition suivante : il existe j_i tel que $\delta(D_{j_i})$ soit défini, $\delta(D_{j_i}) \leq k$ et $D_{j_i} \cap D_i \neq \emptyset$. Pour tout D_i tel qu'il existe j_i tel que $\delta(D_{j_i}) = k$ et $D_{j_i} \cap D_i \neq \emptyset$, on définit alors $\delta(D_i) = k + 1$. Ceci est bien défini, car, comme expliqué plus haut, il n'y a pas de "cycle" dans D' . Le processus s'achève car il n'y a qu'un nombre fini de D_j et car D' est connexe.

On définit alors un vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ par récurrence. On pose $\xi_1 = 1$. Pour tout $i \in \{2, \dots, r\}$, tel que $D_i \cap D_1 \neq \emptyset$, on pose

$$\xi_i := -\xi_1 CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_1, D_1 \cap D_i) \neq 0$$

(car la singularité n'est pas du type noeud-col).

Ensuite, supposons construit ξ_i pour tout i tel que $\delta(D_i) \leq k$, où $k \leq r - 1$ est fixé. Soit alors j tel que $\delta(D_j) = k + 1$. Il existe alors un unique i_j tel que $\delta(D_{i_j}) = k$ et $D_j \cap D_{i_j} \neq \emptyset$. On définit alors

$$\xi_j := -\xi_{i_j} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_{i_j}, D_{i_j} \cap D_j) \neq 0$$

Par connexité de D' , on définit ainsi ξ_i pour tout $i = 1, \dots, r$. Pour tout $i \geq r + 1$, on pose $\xi_i = 0$. Enfin remarquons que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, $i \neq j$, tel que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, on a

$$CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, D_i \cap D_j) = \left(CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, D_i \cap D_j) \right)^{-1}$$

car il ne s'agit pas d'un noeud-col (voir l'exemple 3.15). Donc :

$$\frac{\xi_i}{\xi_j} = -CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, D_i \cap D_j)$$

En effet, si $\delta(D_i) = \delta(D_j) + 1$, c'est la définition de ξ_i , et si $\delta(D_i) = \delta(D_j) - 1$, on a

$$\xi_j := -\xi_i CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, D_i \cap D_j) = -\xi_i \left(CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, D_i \cap D_j) \right)^{-1}$$

et donc

$$\frac{\xi_i}{\xi_j} = -CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, D_i \cap D_j)$$

Montrons à présent que ${}^t\xi A\xi = 0$:

$$\begin{aligned} {}^t\xi A\xi &= \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j a_{i,j} \\ &= \sum_{i,j=1}^r \xi_i \xi_j a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^r \xi_j \left(\sum_{i=1}^r \xi_i a_{i,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \xi_j \left(\xi_j a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \xi_i a_{i,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \xi_j \xi_j \left(\sum_{p \in D_j} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, p) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ D_i \cap D_j \neq \emptyset}}^r \frac{\xi_i}{\xi_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \xi_j^2 \left(\sum_{p \in D_j} CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, p) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ D_i \cap D_j \neq \emptyset}}^r CS(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, D_i \cap D_j) \right) \end{aligned}$$

d'après le calcul fait ci-dessus. D'où :

$${}^t\xi A\xi = 0$$

car toute singularité de D_j n'étant pas une intersection $D_i \cap D_j$, avec $i = 1, \dots, r$, est un noeud-col dont la séparatrice forte est le diviseur D_j , donc d'indice de Camacho-Sad nul, par construction de D' .

La matrice A symétrique définie négative possède donc un vecteur isotrope non-nul : contradiction.

Conclusion : il existe une séparatrice pour le feuilletage d'origine. □

4 Exemple de non-existence d'une séparatrice en dimension 3

Dans cette partie nous allons montrer l'existence d'un champ de vecteur holomorphe en dimension 3, ayant une singularité isolée en l'origine, mais n'admettant pas de séparatrice.

4.1 Généralisation des notions vues en dimension 2

Considérons une variété complexe M de dimension 3, ainsi qu'un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} de dimension 1, défini par une famille de champs de vecteurs holomorphes $(X_i)_i$ sur les cartes de la variété, tels que deux d'entre eux définies sur deux ouverts d'intersection non-vide, diffèrent par multiplication par une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Supposons que le feuilletage soit saturé, c'est-à-dire que $Sing(\mathcal{F})$ est un ensemble analytique de codimension ≥ 2 (voir la proposition 2.7, dont la preuve se généralise en dimension supérieure), et que le feuilletage ne peut s'étendre en aucun point de $Sing(\mathcal{F})$. Si X est un champ de vecteur holomorphe au voisinage de p , en considérant une carte centrée en p , on supposera que X est un champ de vecteur sur $(\mathbb{C}^3, 0)$, et on écrira X sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(z) &= X(z_1, z_2, z_3) \\ &= X_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + X_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + X_3(z) \frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned}$$

avec $X_j \in \mathbb{C}\{z_1, z_2, z_3\}$, pour $j = 1, 2, 3$.

Définition 4.1. Si $ord_0(X) = n$, écrivons

$$X^{(n)} = X_1^{(n)}(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + X_2^{(n)}(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + X_3^{(n)}(z) \frac{\partial}{\partial z_3}$$

le terme de degré n de X , où $X_j^{(n)}$ est un polynôme homogène de degré n , pour $j = 1, 2, 3$. Nous dirons que le champ de vecteur X (ou le feuilletage associé \mathcal{F}) est non-dicritique en un point singulier p si $X^{(n)}$ n'est pas multiple du champ de vecteur radial $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$.

On définit également, de la même manière qu'en dimension 2, la notion d'éclatement d'une variété complexe M de dimension 3 au voisinage d'un point p . On construit ainsi une nouvelle variété complexe \tilde{M} de dimension 3, plongée dans $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, et dont le diviseur exceptionnel E est biholomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: on a alors trois cartes bien particulières, données par les trois cartes usuelles de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. En prenant une carte de M centrée en p , on pourra travailler dans $(\mathbb{C}^3, 0)$. Dans ce cas, la nouvelle variété est

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}^3 &= \{(z_1, z_2, z_3, [z_1 : z_2 : z_3]) \mid (z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0)\} \cup (\{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \\ &\subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \end{aligned}$$

avec $E = \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{CP}^2$. On a alors la projection

$$\begin{aligned} \sigma : \tilde{\mathbb{C}}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (z_1, z_2, z_3, [u_1 : u_2 : u_3]) &\longmapsto (z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

qui est injective sur $\tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus E$, et $E = \sigma^{-1}(0)$.

On définit alors comme précédemment la notion d'éclatement (transformée stricte) d'une courbe analytique et même d'une (hyper)surface analytique. On définit également l'éclatement d'un feuilletage de la façon suivante : supposons que l'application "blow-down" soit $\sigma : (\tilde{\mathbb{C}}^3, E) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, avec $E \simeq \mathbb{CP}^2$ le diviseur exceptionnel, et que le feuilletage \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^3, 0)$ soit donné par le champ de vecteur X . Alors, dans la carte

$$U_1 = \{(x_1, x_1x_2, x_1x_3, [1 : x_2 : x_3]) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3\} \subset \tilde{\mathbb{C}}^3$$

σ est donnée par

$$\tilde{\sigma}_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1x_2, x_1x_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^{-n} (D\tilde{\sigma}_1|_{\{x_1 \neq 0\}})^{-1} (X \circ \tilde{\sigma}_1)(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{x_1^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ -\frac{x_3}{x_1} & 0 & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_1x_2, x_1x_3) \\ X_2(x_1, x_1x_2, x_1x_3) \\ X_3(x_1, x_1x_2, x_1x_3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^n} \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_1x_2, x_1x_3) \\ -x_2 \frac{X_1(x_1, x_1x_2, x_1x_3)}{x_1} + \frac{X_2(x_1, x_1x_2, x_1x_3)}{x_1} \\ -x_3 \frac{X_1(x_1, x_1x_2, x_1x_3)}{x_1} + \frac{X_3(x_1, x_1x_2, x_1x_3)}{x_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où n est le plus grand entier tel que \tilde{X}_1 soit holomorphe et tangent à $E_1 = \tilde{\sigma}_1^{-1}(\{0\})$. On fait de même dans les autres cartes, et on définit \tilde{X}_2 et \tilde{X}_3 . Le feuilletage éclaté $\tilde{\mathcal{F}}$ est alors le feuilletage déterminé par \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 et \tilde{X}_3 .

Remarque 4.2. La singularité p est non-dicritique si et seulement si pour $j = 1, 2, 3$, \tilde{X}_j ne s'annule pas identiquement sur E : on dira aussi que le diviseur exceptionnel $E = \sigma^{-1}(p)$ est non-dicritique.

La notion de séparatrice (courbe invariante) est la même qu'en dimension 2.

On rappelle que le théorème de paramétrisation de Puiseux est également vrai en dimension ≥ 2 , en particulier en dimension trois. Nous allons l'utiliser pour définir la multiplicité d'intersection d'une courbe analytique et d'une surface analytique lisse.

Définition 4.3. Soient C une courbe analytique irréductible dans $(\mathbb{C}^3, 0)$ contenant l'origine, et $\tau : (\mathbb{C}^1, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ une paramétrisation primitive de Puiseux de C . Soit également S une surface analytique contenant l'origine, définie localement par l'équation

$\{h = 0\}$, où h est une fonction holomorphe sur $(\mathbb{C}^3, 0)$. On définit alors la multiplicité d'intersection de C et S en 0 par $\mu_0(C, S) = \text{ord}_0(h \circ \tau)$.

Si $C = \bigcup_i C_i$, où les C_i sont des courbes analytiques irréductibles, on définit $\mu_0(C, S) = \sum_i \mu_0(C_i, S)$.

Remarque 4.4. Comme en dimension deux, on voit que ceci est bien défini, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de la paramétrisation de C , ni du choix de la fonction holomorphe définissant localement S .

On a alors des propriétés similaires à celles de la proposition 2.35, sauf évidemment la symétrie entre C et S . De même, on montre comme dans la proposition 2.36 que la multiplicité d'intersection d'une courbe analytique irréductible et d'une surface analytique qui s'intersecte en un point diminue strictement après éclatement. En particulier, après un nombre fini d'éclatement, on peut se ramener au cas où l'intersection est transversale.

4.2 Une classe de champs de vecteurs holomorphe n'admettant pas de séparatrice en l'origine

Nous allons à présent montrer qu'un champ de vecteurs holomorphe de $(\mathbb{C}^3, 0)$ singulier en l'origine et vérifiant un certain nombre de propriétés, que nous allons énoncer, ne peut pas avoir de séparatrice en l'origine.

Définition 4.5. Soit \mathcal{V} l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes $\{X\}$ sur $(\mathbb{C}^3, 0)$ (définissant des feuilletages $\{\mathcal{F}\}$) satisfaisant les propriétés suivantes :

1. X ne possède que des termes de degré 2 et 3
2. X est non-dicritique en l'origine
3. $\tilde{\mathcal{F}}$ n'a que trois singularités, situées sur $E = \sigma^{-1}(0)$
4. la différentielle de \tilde{X} en ces singularités a une valeur propre double non-nulle et une valeur propre nulle, et n'est pas diagonalisable, et au voisinage de chacune de ces singularités, quitte à multiplier \tilde{X} par une constante non nulle, il existe un système de coordonnées $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ tel que localement $E = \{\zeta_1 = 0\}$ et :

$$\tilde{X}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 h_1(\zeta) \\ h_2(\zeta) \\ h_3(\zeta) \end{pmatrix}$$

avec h_1, h_2 et h_3 holomorphes, avec $\text{ord}_0(h_1) \geq 1$, $\text{ord}_0(h_2) \geq 2$ et $\text{ord}_0(h_3) \geq 2$.

Remarque 4.6. En particulier, comme le feuilletage éclaté n'a que trois singularités situées sur E , X a une singularité isolée en l'origine.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.7. *Un champ de vecteur $X \in \mathcal{V}$ d'ordre 2 n'a pas de séparatrice en l'origine.*

Pour cela, nous aurons besoin d'étudier la notion de "coin simple". Introduisons pour cela quelques notations. Considérons un feuilletage \mathcal{F}_0 de $(\mathbb{C}^3, 0)$, et une suite d'éclatements donnés par $\sigma_j : \tilde{\mathbb{C}}^3_j \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^3_{j-1}$, $j \geq 1$, centré en $p_{j-1} \in \tilde{\mathbb{C}}^3_{j-1}$, et notons $p_0 = 0$ et $\tilde{\mathbb{C}}^3_0 = \mathbb{C}^3$. On considère alors un plan $E_0 \subset \tilde{\mathbb{C}}^3_0$ tel que $p_0 \in E_0$, et pour tout $j \geq 1$, $E_j = \sigma_j^{-1}(p_{j-1})$. Pour $k \geq j + 1$, soit E_j^k la transformée stricte de E_j par $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_{j+1}$, et notons $E_j^j = E_j$. Notons $\mathcal{F}_j = \sigma_j^*(\mathcal{F}_{j-1})$ le feuilletage éclaté de \mathcal{F}_{j-1} par σ_j .

Définition 4.8. Un point singulier p de \mathcal{F}_j est appelé "coin simple", s'il existe $j_0 < j_1 \leq j$ tels que $p = E_{j_0}^{j_1} \cap E_{j_1}^{j_1}$ et une carte $z = (z_1, z_2, z_3)$ au voisinage de p dans $\tilde{\mathbb{C}}^3_j$, telle que :

1. $z(p) = 0$
2. $E_{j_0}^{j_1} \cup E_{j_1}^{j_1}$ a pour équation locale $\{z_1 z_2 = 0\}$ au voisinage de p
3. \mathcal{F}_j est décrit au voisinage de p par un champ de vecteur de la forme :

$$Y = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 (\beta + g_2(z)) \frac{\partial}{\partial z_2} + g_3(z) \frac{\partial}{\partial z_3}$$

avec $\beta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$, g_2 et g_3 des fonctions holomorphes tels que $g_2(0) = g_3(0) = 0$.

Proposition 4.9. *Avec les notations ci-dessus, si p_j est un "coin-simple" de \mathcal{F}_j , alors le diviseur exceptionnel E_{j+1} est non-dicritique pour \mathcal{F}_{j+1} et toutes les singularités de \mathcal{F}_{j+1} sur E_{j+1} sont des "coins simples".*

Démonstration. Reprenons les même notations que ce-dessus. Le fait que E_{j+1} soit non-dicritique provient du fait que $\beta \neq 1$. Écrivons l'éclatement σ_{j+1} dans la "première carte" de $\tilde{\mathbb{C}}^3_{j+1}$:

$$(\sigma_{j+1,1}) : (x_1, x_2 x_3) \longmapsto (x_1, x_1 x_2, x_1 x_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

Alors, un rapide calcul nous donne :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1 &= \left(D(\sigma_{j+1,1})|_{\{x_1 \neq 0\}} \right)^{-1} \left(X \circ (\sigma_{j+1,1})_1 \right) (x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 (\beta - 1 + g_2(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_3 + g_3(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Comme $\beta \neq 1$, $\beta - 1 \neq 0$, un point singulier de \tilde{Y}_1 sur le diviseur exceptionnel $\{x_1 = 0\}$ (représentation locale de E_{j+1}^{j+1}) est nécessairement sur $\{x_2 = 0\}$ (représentation locale de $E_{j_1}^{j+1}$). Enfin, $\beta - 1 \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$. On a donc la forme voulue : le point singulier est un "coin simple".

Regardons ce qu'il se passe dans la "deuxième carte" : on écrit

$$(\sigma_{j+1,2}) : (y_1, y_2 y_3) \longmapsto (y_2 y_1, y_2, y_2 y_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

Alors, après calcul, on obtient, dans ma base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right)$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2 &= \left(D(\sigma_{j+1,2})_{|\{y_2 \neq 0\}}\right)^{-1} \left(X \circ (\sigma_{j+1})_2\right)(y_1, y_2, y_3) \\ &= \begin{pmatrix} y_1 (1 - \beta + g_2(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3)) \\ y_2 (\beta + g_2(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3)) \\ -y_3 (\beta + g_2(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3)) + \frac{g_3(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3)}{y_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $1 - \beta \neq 0$ et $g_2(0, 0, 0) = 0$, on peut diviser \tilde{Y}_2 par $(1 - \beta + g_2(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3))$. On a alors :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{Y}_2} &= \frac{\tilde{Y}_2}{(1 - \beta + g_2(y_2 y_1, y_2, y_2 y_3))} \\ &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \left(\frac{\beta}{\beta - 1} + \tilde{g}_2(y_1, y_2, y_3)\right) \frac{\partial}{\partial y_2} + \tilde{g}_3(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial}{\partial y_3} \end{aligned}$$

Donc, un point singulier de $\overline{\tilde{Y}_2}$ sur le diviseur exceptionnel $\{y_2 = 0\}$ (représentation locale de E_{j+1}^{j+1}) est nécessairement sur $\{y_1 = 0\}$ (représentation locale de $E_{j_0}^{j+1}$). Enfin, $\beta - 1 \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$. On a donc la forme voulue : le point singulier est un "coin simple".

Étudions enfin les éventuels points singuliers de E_{j+1} dans la "troisième carte". On écrit

$$(\sigma_{j+1,3}) : (v_1, v_2, v_3) \longmapsto (v_3 v_1, v_3 v_2, v_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

Après calcul, on obtient cette fois-ci, dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3}\right)$:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_3 &= \left(D(\sigma_{j+1,3})_{|\{v_3 \neq 0\}}\right)^{-1} \left(X \circ (\sigma_{j+1})_3\right)(v_1, v_2, v_3) \\ &= \begin{pmatrix} v_1 (1 - \alpha + v_3 h_1(v_1, v_2, v_3)) \\ v_2 (\beta - \alpha + v_3 h_2(v_1, v_2, v_3)) \\ v_3 (\alpha + v_3 h_3(v_1, v_2, v_3)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où pour $j = 1, 2, 3$, h_j est holomorphe, et où α est le terme constant de $\frac{g_3(v_3 v_1, v_3 v_2, v_3)}{v_3}$.

- 1er cas : Si $\alpha = 1$, alors :

$$\tilde{Y}_3 = \begin{pmatrix} v_1 v_3 h_1(v_1, v_2, v_3) \\ v_2 (\beta - 1 + v_3 h_2(v_1, v_2, v_3)) \\ v_3 (1 + v_3 h_3(v_1, v_2, v_3)) \end{pmatrix}$$

puis on divise \tilde{Y}_3 par $(1 + v_3 h_3(v_1, v_2, v_3))$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{Y}_3} &= \frac{\tilde{Y}_3}{(1 + v_3 h_3(v_1, v_2, v_3))} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(v_1, v_2, v_3) \\ v_2 (\beta - 1 + \tilde{h}_2(v_1, v_2, v_3)) \\ v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec \tilde{h}_j holomorphe et $\tilde{h}_j(0, 0, 0) = 0$, pour $j = 1, 2, 3$. On voit que toute singularité de $\overline{\tilde{Y}_3}$ sur $\{v_3 = 0\}$ (représentation locale de E_{j+1}^{j+1}) est aussi sur $\{v_2 = 0\}$ (représentation locale de $E_{j_1}^{j+1}$). On a donc la forme attendue (quitte à échanger v_1 et v_3), car $\beta - 1 \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$.

– 2ème cas : Si $\alpha \neq 1$: on divise alors \tilde{Y}_3 par $(1 - \alpha + v_3 h_1(v_1, v_2, v_3))$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{Y}_3} &= \frac{\tilde{Y}_3}{(1 - \alpha + v_3 h_1(v_1, v_2, v_3))} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} + f_2(v_1, v_2, v_3) \right) \\ v_3 \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} + f_3(v_1, v_2, v_3) \right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec f_j holomorphe et $f_j(0, 0, 0) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. On voit que soit $\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$, soit $\frac{\alpha}{1 - \alpha} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q}_+^*)$: en effet, si $\frac{\alpha}{1 - \alpha} = r \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $\alpha = \frac{r}{1+r} \in \mathbb{Q}_+^*$ et $1 - \alpha = \frac{1}{1+r} \in \mathbb{Q}_+^*$; si on suppose par l'absurde que $\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} = s \in \mathbb{Q}_+^*$, on devrait avoir $\beta = s(1 - \alpha) + \alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, ce qui est absurde. Donc quitte à échanger v_2 et v_3 si $\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \in \mathbb{Q}_+^*$, on a la forme attendue. □

Corollaire 4.10. *Soit X le germe d'une champ de vecteur holomorphe dans $(\mathbb{C}^3, 0)$ avec une singularité isolée en 0, tel qu'il existe un système de coordonnées dans lequel le champ de vecteurs X s'écrive :*

$$X(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 h_1(\zeta) \\ h_2(\zeta) \\ h_3(\zeta) \end{pmatrix}$$

avec h_1, h_2 et h_3 holomorphes, avec $\text{ord}_0(h_2) \geq 2$ et $\text{ord}_0(h_3) \geq 2$.

Alors, toute séparatrice de X en 0 est contenue dans le plan $\{\zeta_1 = 0\}$.

Démonstration. Nous allons étudier des éclatements successifs.

1. Commençons par montrer qu'après éclatement de X en 0, on obtient exactement deux singularités, situées sur le diviseur exceptionnel, qui sont des "coins simples" par rapport au diviseur exceptionnel et au plan $E_0 = \{\zeta_1 = 0\}$. Notons, comme précédemment, \mathcal{F}_0 le feuilletage engendré par X , et \mathcal{F}_1 le feuilletage sur $\tilde{\mathbb{C}}^3_1$ obtenu à partir de \mathcal{F}_0 après un éclatement, noté σ_1 , de l'origine. Notons également $E_1^1 = E_1 = \sigma_1^{-1}(\{0\})$ le premier diviseur exceptionnel, et E_0^1 la transformée stricte de E_0 par σ_1 , et considérons $D = E_1^1 \cup E_0^1$. Montrons que les seules singularités de \mathcal{F}_1 sont $q_0 = (0, 0, 0, [0 : 0 : 1])$ et $q_1 = (0, 0, 0, [0 : 1 : 0])$. Commençons par remarquer qu'il n'y pas de singularités dans la première carte, donnée par $\zeta_1 \neq 0$: on écrit :

$$\begin{cases} \zeta_1 = x_1 \\ \zeta_2 = x_1 x_2 \\ \zeta_3 = x_1 x_3 \end{cases}$$

et on a alors dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$:

$$\tilde{X}_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 \left(1 + \frac{h_1(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)}{x_1}\right) \\ 1 - x_2 h_1(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3) + x_1 \frac{h_2(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)}{x_1^2} \\ -x_3(1 + h_1(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)) + x_1 \frac{h_3(x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)}{x_1^2} \end{pmatrix}$$

qui n'a pas de singularité dans $\{x_1 = 0\}$ (équation locale du diviseur exceptionnel).
Considérons à présent la deuxième carte, donnée par $\zeta_2 \neq 0$: on écrit :

$$\begin{cases} \zeta_1 = y_1 y_2 \\ \zeta_2 = y_2 \\ \zeta_3 = y_3 y_2 \end{cases}$$

et on a alors dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right)$:

$$\tilde{X}_2(y) = \begin{pmatrix} y_1 \left(h_1(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2) - y_1 - y_2 \frac{h_2(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2^2}\right) \\ y_2 \left(1 + y_1 + y_2 \frac{h_2(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2^2}\right) \\ -y_3 \left(1 + y_1 + y_2 \frac{h_2(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2^2}\right) + y_2 \frac{h_3(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2^2} \end{pmatrix}$$

On voit alors qu'il y a une unique singularité sur le diviseur exceptionnel dans cette carte, à savoir $(0, 0, 0)$, qui correspond au point $q_1 = (0, 0, 0, [0 : 1 : 0])$. En divisant par $\left(1 + y_1 + \frac{h_2(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{X}_2} &= \frac{\tilde{X}_2(y)}{\left(1 + y_1 + \frac{h_2(y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)}{y_2}\right)} \\ &= y_1 g_1(y) \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + g_3(y) \frac{\partial}{\partial y_3} \end{aligned}$$

avec g_1 et g_3 holomorphes d'ordre ≥ 1 . On a la forme caractéristique d'un "coin simple" (en échangeant y_1 et y_2 , et avec $\beta = 0$), associé à $D = E_1^1 \cup E_0^1$, puisque dans ces coordonnées, localement, $E_1^1 = \{y_2 = 0\}$ et $E_0^1 = \{y_1 = 0\}$.

Considérons enfin la troisième carte, associée à $\zeta_3 \neq 0$: on écrit :

$$\begin{cases} \zeta_1 = v_1 v_3 \\ \zeta_2 = v_2 v_3 \\ \zeta_3 = v_3 \end{cases}$$

et on a alors dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3}\right)$:

$$\tilde{X}_3(v) = \begin{pmatrix} v_1 \left(1 + h_1(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3) - v_3 \frac{h_3(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3^2}\right) \\ v_1 + v_2 \left(1 - v_3 \frac{h_3(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3^2}\right) + v_3 \frac{h_2(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3^2} \\ v_3 \frac{h_3(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3} \end{pmatrix}$$

On voit alors qu'il y a une unique singularité sur le diviseur exceptionnel dans cette carte, à savoir $(0, 0, 0)$, qui correspond au point $q_0 = (0, 0, 0, [0 : 0 : 1])$. En divisant par $\left(1 + h_1(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3) - v_3 \frac{h_3(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3^2}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{X}_3} &= \frac{\tilde{X}_3(y)}{\left(1 + h_1(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3) - v_3 \frac{h_3(v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)}{v_3^2}\right)} \\ &= v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + H_2(v) \frac{\partial}{\partial v_2} + v_3 H_3(v) \frac{\partial}{\partial v_3} \end{aligned}$$

avec H_2 et H_3 holomorphes d'ordre ≥ 1 . On a la forme caractéristique d'un "coin simple" (en échangeant v_2 et v_3 , avec $\beta \neq 0$), associé à $D = E_1^1 \cup E_0^1$, puisque dans ces coordonnées, localement, $E_1^1 = \{v_3 = 0\}$ et $E_0^1 = \{v_1 = 0\}$.

En conclusion, après un éclatement de la singularité isolée d'origine, on a deux singularités isolées, sur le diviseur exceptionnel E_1^1 , qui sont des "coins simples" par rapport à $D = E_1^1 \cup E_0^1$.

2. Montrons à présent que toute séparatrice de \mathcal{F}_0 en l'origine est nécessairement contenue dans le plan $\{\zeta_1 = 0\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe une séparatrice (irréductible) C_0 en 0, non contenue dans le plan $\{\zeta_1 = 0\}$. Considérons alors une suite finie d'éclatements $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Notons C_j la transformée stricte de C_{j-1} par σ_j , $p_0 = (0, 0, 0)$, $\{p_j\} = C_j \cap \sigma_j^{-1}(\{p_{j-1}\})$, $E_j = \sigma_j^{-1}(p_{j-1})$, pour tout $j \geq 1$. Pour $k \geq j + 1$, soit E_j^k la transformée stricte de E_j par $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_{j+1}$, et notons $E_j^j = E_j$. Notons $\mathcal{F}_j = \sigma_j^*(\mathcal{F}_{j-1})$ le feuilletage éclaté de \mathcal{F}_{j-1} par σ_j . On arrête le processus d'éclatement lorsque C_{n-1} n'est tangente à aucune des composantes

de $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{n-1})^{-1}(\{0\})$, de sorte que C_r intersecte $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)^{-1}(\{0\})$ en un seul point situé sur E_n^n , et lorsque $C_n \cap E_j^n = \emptyset$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$. D'après la proposition 4.9 et la première étape de la démonstration, pour tout $j = 2, \dots, n$, E_j est non-dicritique pour \mathcal{F}_j et ses singularités sont toutes des "coins simples". Le point $\{p_n\} = C_n \cap E_n$ est un point singulier de \mathcal{F}_n , car il appartient à l'intersection de l'adhérence de deux feuilles. Donc p_r est un coin simple, et doit appartenir à l'intersection de deux surfaces $E_j^n \cap E_i^n$, avec $i \neq j$. Contradiction. \square

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 4.7.

Démonstration. (du théorème 4.7) Soit $X \in \mathcal{V}$ un champ de vecteur d'ordre ≥ 2 , engendrant un feuilletage \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^3, 0)$. Par hypothèse, le feuilletage éclaté $\tilde{\mathcal{F}}$ a trois singularités, situées sur le diviseur exceptionnel et on peut appliquer le corollaire 4.10 en chacune de ses trois singularités, pour voir que toute séparatrice de $\tilde{\mathcal{F}}$ est contenue dans le diviseur exceptionnel $E = \sigma^{-1}(\{0\})$. Or, une séparatrice de \mathcal{F} en 0 serait transformée, par l'éclatement σ , en une séparatrice de $\tilde{\mathcal{F}}$, non contenue dans le diviseur exceptionnel. D'où la non-existence d'une séparatrice pour $\tilde{\mathcal{F}}$. \square

4.3 Un exemple d'un champ de vecteur sans séparatrice

Montrons à présent l'existence d'au moins un champ de vecteur vérifiant les conditions de la définition 4.5.

Considérons le champ de vecteur suivant au voisinage de l'origine dans $(\mathbb{C}^3, 0)$:

$$X(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} z_1^2 - 9z_1z_2 - 14z_1z_3 + 6z_2z_3 + z_2^3 + z_3^3 \\ -3z_2^2 - z_1z_2 + 2z_1z_3 - 10z_2z_3 + z_1^3 \\ -8z_3^2 - 3z_1z_2 + 4z_1z_3 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.11. $X \in \mathcal{V}$, et en particulier, X n'a pas de séparatrice en l'origine.

Démonstration. On vérifie, en calculant l'éclatement \tilde{X} de X dans chacune des trois cartes, que \tilde{X} n'a que trois singularité au voisinage du diviseurs exceptionnel $E = \sigma^{-1}(\{0\})$, à savoir $q_0 = (0, 0, 0, [1 : 0 : 0])$, $q_1 = (0, 0, 0, [0 : 1 : 0])$ et $q_2 = (0, 0, 0, [0 : 0 : 1])$ (vérifications faites à l'aide d'un logiciel de calcul formel). On remarque également que le diviseur exceptionnel est non-dicritique. Enfin, on vérifie sans difficultés que pour $j = 0, 1, 2$, $D\tilde{X}_{q_j}$ est comme dans la définition 4.5. En effet, voici les résultats obtenus après calculs :

1. Dans la carte donnée par $(z_1, z_2, z_3) = (x_1, x_1x_2, x_1x_3)$:

$$\tilde{X}_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1(1 - 9x_2 - 14x_3 + 6x_2x_3 + x_1x_2^3 + x_1x_3^3) \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_2x_3 + 6x_2^2 - 6x_2^2x_3 - x_1x_2^3 - x_1x_3^3 \\ -3x_2 + 3x_3 - 9x_2x_3 + 6x_3^2 - 6x_2x_3^2 - x_1x_2^3 - x_1x_3^3 \end{pmatrix}$$

et

$$D\tilde{X}_{1(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient après changement de coordonnées :

$$\overline{\tilde{X}}_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 f_1(\zeta) \\ f_2(\zeta) \\ f_3(\zeta) \end{pmatrix}$$

avec f_1, f_2 et f_3 holomorphes, avec $ord_0(f_1) \geq 1$, $ord_0(f_2) \geq 2$ et $ord_0(f_3) \geq 2$, et localement $E = \{\zeta_1 = 0\}$.

2. Dans la carte donnée par $(z_1, z_2, z_3) = (y_1 y_2, y_2, y_3 y_2)$:

$$\tilde{X}_2(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} -6y_1 + y_2 + 6y_3 + 2y_1^2 - 4y_1 y_3 - 2y_1^2 y_3 + y_2 y_3^3 - y_1^4 y_2 \\ y_2(-3 - y_1 - 10y_3 + 2y_1 y_3 + y_1^3 y_2) \\ -3y_1 + 3y_3 + 2y_3^2 + 5y_1 y_3 - 2y_1 y_3^2 - y_1^3 y_2 y_3 \end{pmatrix}$$

et

$$D\tilde{X}_{2(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient après changement

de coordonnées, et après divisions de \tilde{X}_2 par la constante (-3) :

$$\overline{\tilde{X}}_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 g_1(\zeta) \\ g_2(\zeta) \\ g_3(\zeta) \end{pmatrix}$$

avec g_1, g_2 et g_3 holomorphes, avec $ord_0(g_1) \geq 1$, $ord_0(g_2) \geq 2$ et $ord_0(g_3) \geq 2$, et localement $E = \{\zeta_1 = 0\}$.

3. Dans la carte donnée par $(z_1, z_2, z_3) = (v_1 v_3, v_2 v_3, v_3)$

$$\tilde{X}_3(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -6v_1 + 6v_2 + v_3 + -3v_1^2 - 9v_1 v_2 + 3v_1^2 v_2 + v_2^3 v_3 \\ 2v_1 - 2v_2 - 3v_2^2 - 5v_1 v_2 + 3v_1 v_2^2 + v_1^3 v_3 \\ -8v_3 + 4v_1 v_3 - 3v_1 v_2 v_3 \end{pmatrix}$$

et

$$D\tilde{X}_{3(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

qui est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient après changement

de coordonnées, et après divisions de \tilde{X}_3 par la constante (-8) :

$$\overline{\tilde{X}_3}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 h_1(\zeta) \\ h_2(\zeta) \\ h_3(\zeta) \end{pmatrix}$$

avec h_1, h_2 et h_3 holomorphes, avec $ord_0(h_1) \geq 1$, $ord_0(h_2) \geq 2$ et $ord_0(h_3) \geq 2$, et localement $E = \{\zeta_1 = 0\}$.

Conclusion, $X \in \mathcal{V}$, et donc X n'a pas de séparatrice en l'origine. □

5 Annexe : prérequis et références

Prérequis

Dans tout ce mémoire, nous avons utilisé un certain nombre de notions en analyse complexe (théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables), en particulier le théorème de préparations de Weierstrass, et en géométrie complexe (ensembles analytiques, paramétrisations de Puiseux,..). Tous ces résultats ont été étudiés au préalable à partir de [Chirk, F-G, Fisch]. Énonçons en quelques uns.

Définition 5.1. Soit $f \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$; notons $\hat{f}(X_n) := f(0, \dots, 0, X_n) \in \mathbb{C}[[X_n]]$. Nous dirons que f est “générale en X_n ”, si $\hat{f} \neq 0$, et “générale en X_n d’ordre k ”, si $\text{ord}_0(\hat{f}) = k$.

Définition 5.2. Soit $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$; écrivons $f = \sum_{0 \leq j \leq k} f_j X_n^j$, avec $f_k \neq 0$. Nous dirons que f est un polynôme de Weierstrass en X_n si $f_j(0) = 0$, pour tout $j = 0, \dots, k-1$ et si $f_k = 1$.

Théorème 5.3. (*Division de Weierstrass*) Soient $f, g \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ et supposons que g soit générale en X_n d’ordre k . Alors, il existe un unique couple

$$(q, r) \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\} \times \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$$

tel que :

$$\begin{cases} \deg_{X_n}(r) \leq k-1 \\ f = q.g + r \end{cases}$$

Théorème 5.4. (*Préparation de Weierstrass*) Soit $g \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ générale en X_n d’ordre k . Alors, g s’écrit d’une unique façon sous la forme :

$$g = \alpha.p$$

où $\alpha \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ est une unité (i.e. $\alpha(0, \dots, 0) \neq 0$), et $p \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ et un polynôme de Weierstrass en X_n de degré k . De plus, si $g \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$, il en est de même pour α .

Théorème 5.5. (*Lemme de Hensel*) Soit

$$f = \sum_{0 \leq j \leq k} f_j X_n^j \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$$

unitaire (i.e. $f_k = 1$), et

$$\hat{f}(X_n) = f(0, \dots, 0, X_n) = \prod_{1 \leq j \leq r} (X_n - c_j)^{k_j}$$

où les $c_j \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts. Alors, il existe $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$, unitaires, tels que

$$\begin{cases} f = g_1 \dots g_r \\ \deg(g_j) = k_j & , \forall j = 1, \dots, r \\ \hat{g}_j = (X_n - c_j)^{k_j} & , \forall j = 1, \dots, r \end{cases}$$

Théorème 5.6. *L'anneau $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ est factoriel.*

Références

- [Ab] M. Abate, T. Casavecchia, I. Nisoli, J. Raissy & M. Ruggiero, *Local dynamics of singular holomorphic foliations*. Marco Abate editor, ETS Pisa, 2009.
- [C-S] César Camacho & Paulo Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math. (2), 115, n°3, p.579-595, 1982.
- [Can] Felipe Cano, *Final forms for a three dimensional vector field under blowing-up*. Ann. Inst. Fourier, 37, n°2, p.151-193, 1987.
- [Chirk] E.M. Chirka, *Complex analytic sets. Mathematics and its applications* (Soviet series), volume 46. Kluwert, Dordrecht, 1989.
- [D-L-A] F. Dumortier, J. Llibre & J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*. Springer, 2006.
- [Fisch] Gerd Fischer, *Plane algebraic curves. Student Mathematical Library*, volume 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [F-G] Klaus Fritzsche & Hans Grauert, *From holomorphic functions to complex manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, volume 213. Springer-Verlag, New-York, 2002.
- [GM-Lu] Xavier Gomez-Mont & Igniacio Luengo, *Germes of holomorphic vector fields in \mathbb{C}^3 without a separatrix*. Inventiones mathematicae, volume 109, p.211-219. Springer-Verlag, 1992.
- [I-Y] Yuliv Iliashenko & Sergei Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, volume 86. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [Lor] Frank Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité d'un feuilletage holomorphe en dimension 2*. Prépublication IRMAR, 2005.
- [M-M] Jean-François Mattei & Robert Mossu, *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 13, n°4, p.469-532, 1980.
- [Mir] Rick Miranda, *Algebraic curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, volume 5. American Mathematical Society, 1995.
- [To] Matei Toma, *A short proof of a theorem of Camacho and Sad*. Enseign. Math. 45, p.311-316, 1999.