

# Le Théorème de Dehn-Nielsen-Baer

Joëlle Clees

Université de Strasbourg

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Un peu de géométrie différentielle</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Quelques outils algébriques</b>	<b>6</b>
3.1	Quelques résultats sur les groupes . . . . .	6
3.2	Quelques résultats sur les espaces métriques . . . . .	6
3.3	Action de groupes . . . . .	7
3.4	Automorphismes intérieurs et extérieurs . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Prérequis de topologie algébrique</b>	<b>8</b>
4.1	Homotopie et Isotopie . . . . .	8
4.2	Le groupe fondamental . . . . .	10
4.3	L'homomorphisme de groupes $F: \text{Homeo}(M) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(M))$ .	14
4.4	Les revêtements . . . . .	16
4.5	Le groupe fondamental du tore . . . . .	18
4.6	Les CW-complexes . . . . .	21
4.7	La caractéristique d'Euler d'un CW-complexe . . . . .	23
4.8	La propriété d'extension d'homotopie . . . . .	24
<b>5</b>	<b>La quasi-isométrie</b>	<b>25</b>
5.1	Le graphe de Cayley . . . . .	25
5.2	La quasi-isométrie . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Les surfaces</b>	<b>28</b>
6.1	Les courbes fermées simples sur des surfaces . . . . .	28
6.2	Coller et couper des surfaces . . . . .	29
6.3	La classification des surfaces . . . . .	31
6.4	La caractéristique d'Euler d'une surface . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Mapping Class Group étendu</b>	<b>38</b>
7.1	Le mapping class group étendu du tore . . . . .	38
7.1.1	L'homomorphisme de groupes $F: \text{Homeo}(T^2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$	39
7.1.2	Surjectivité de $F$ . . . . .	39
7.1.3	L'homomorphisme surjective $\sigma: \text{Mod}^\pm(T^2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$	41
7.1.4	Injectivité de $\sigma$ . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Géométrie hyperbolique</b>	<b>42</b>
8.1	Le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ . . . . .	42
8.1.1	Le demi-plan de Poincaré . . . . .	42

8.1.2	Le disque de Poincaré . . . . .	43
8.2	Le bord du plan hyperbolique . . . . .	45
8.3	Les isométries du plan hyperbolique . . . . .	46
8.4	Surfaces hyperboliques . . . . .	48
<b>9</b>	<b>Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer</b>	<b>62</b>
9.1	Injectivité . . . . .	63
9.2	Surjectivité . . . . .	64

# 1 Introduction

Ce texte constitue mon mémoire de Master 2 Mathématiques Fondamentales qui a été dirigé par Madame Chloé Perin. Le but de mon mémoire est de démontrer le Théorème de Dehn-Nielsen-Baer.

Je me suis surtout appuyée sur le livre de Benson Farb et Dan Margalit intitulé "A primer on mapping class groups". Mais j'ai aussi utilisé des résultats de mon travail de l'année dernière nommé "Le groupe des réflexions d'un triangle idéal du plan hyperbolique", que j'avais écrit dans le cadre de l'UE Étude de Textes. De plus, pour beaucoup de résultats de la topologie algébrique, je fais référence au livre d'Allen Hatcher intitulé "Algebraic Topology".

Voici le plan de mon mémoire.

Dans la section 2, je définis une variété à bords orientée, compacte ou même fermée.

Ensuite je donne quelques résultats algébriques importants pour la suite dans la section 3, dont la définition du groupe des automorphismes extérieurs.

Dans la section 4, j'introduis des notions du domaine de la topologie algébrique, comme la relation d'isotopie et le groupe fondamental.

La section 5 sert à définir la notion de quasi-isométrie, dont j'ai besoin pour pouvoir démontrer le théorème de Dehn-Nielsen-Baer.

A partir de la section 6, je me restreins au cas des surfaces et je les classifie. Ensuite, je définis le mapping class group étendu des surfaces d'une certaine classe dans la section 7 et je démontre que le mapping class group étendu du tore est isomorphe au groupe des automorphismes du groupe fondamental du tore. Ce résultat constitue un cas particulier du Théorème de Dehn-Nielsen-Baer.

La section 8 est consacrée à la géométrie hyperbolique. Je définis par exemple une surface hyperbolique et je donne quelques résultats sur les surfaces hyperboliques, dont je me sers pour démontrer finalement le Théorème de Dehn-Nielsen-Baer dans la section 9. Ce théorème relie le mapping class group étendu, qui est un objet topologique, au groupe des automorphismes extérieurs, qui est un objet algébrique et ceci en utilisant la géométrie hyperbolique, d'où la nécessité des sections 3, 4 et 8.

## 2 Un peu de géométrie différentielle

Commençons par définir quelques outils du domaine de la géométrie différentielle, dont nous allons nous servir dans la suite.

**Définition 2.1.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Une *variété topologique* de dimension  $m$  est un espace topologique  $M$  qui est Hausdorff, à base dénombrable et localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Une *variété à bords* de dimension  $m$  est un espace topologique  $M$  tel que  $\overset{\circ}{M}$  est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$  et tout  $x \in M \setminus \overset{\circ}{M}$  admet un voisinage dans  $M$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ .

En particulier,  $M$  admet un atlas  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  avec  $I$  un ensemble d'indices tel que pour tout  $i \in I$ ,  $U_i$  est un ouvert de  $M$ ,  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$  et  $\phi_i(U_i)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$  ou  $\mathbb{R}_+^m$ .

Si de plus les applications  $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  sont des  $C^\infty$ -difféomorphismes pour tout  $i, j \in I$ , on dit que  $M$  est une *variété lisse*.

L'ensemble  $M \setminus \overset{\circ}{M}$  est appelé *le bord de  $M$*  et est noté  $\partial M$ .

**Définition 2.3.** Soit  $M$  une variété topologique. On dit que  $M$  est *fermée* lorsqu'elle est compacte et de bord vide.

**Définition 2.4.** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $M$  une variété lisse de dimension  $m$ . On dit que  $M$  *admet une orientation*, lorsqu'il existe une application de la forme

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &\rightarrow T\overset{\circ}{M} \\ p &\mapsto (X_1(p), \dots, X_m(p)) \end{aligned}$$

tel que  $(X_1(p), \dots, X_m(p))$  forme une base de  $T_p\overset{\circ}{M}$ , avec  $X_i(p)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ .

**Définition 2.5.** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $M$  une variété lisse de dimension  $m$  qui admet une orientation. On appelle alors une *orientation* de  $M$  une classe d'équivalence formée par les applications de la forme

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &\rightarrow T\overset{\circ}{M} \\ p &\mapsto (X_1(p), \dots, X_m(p)) \end{aligned}$$

définies ci-dessus avec la relation d'équivalence {pour tout  $p \in \overset{\circ}{M}$  la matrice de changement de base a un déterminant  $> 0$ }.

**Définition 2.6.** Si  $M$  admet une orientation, on dit qu'elle est *orientable* et si  $M$  est munie d'une orientation, on dit qu'elle est *orientée*.

### 3 Quelques outils algébriques

Dans cette section nous allons maintenant introduire tous les résultats purement algébriques, dont nous avons besoin plus tard.

#### 3.1 Quelques résultats sur les groupes

**Définition 3.1.** Soit  $G$  un groupe. Un élément  $g \in G$  est *primitif* s'il n'existe pas de  $h \in G$  tel que  $g = h^k$  avec  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

*Remarque 3.2.* Soient  $G$  un groupe,  $g \in G$  un élément primitif et  $\phi \in \text{Aut}(G)$ . Alors  $\phi(g) \in G$  est aussi un élément primitif, car si on suppose par l'absurde que  $\phi(g)$  n'est pas primitif, alors il existe  $h \in G$  et  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$  tel que

$$\begin{aligned}\phi(g) &= h^k \\ \iff g &= \phi^{-1}(h^k) \\ \iff g &= (\phi^{-1}(h))^k\end{aligned}$$

et donc, comme  $\phi^{-1}(h) \in G$ ,  $g$  est primitif. D'où la contradiction.

**Définition 3.3.** Le *groupe linéaire de  $\mathbb{Z}$*  est défini par  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1 \right\}$  muni du produit matriciel.

**Définition 3.4.** Le *groupe spécial linéaire de  $\mathbb{R}$*  est défini par  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$  muni du produit matriciel.

Posons  $I$  la matrice identité.

**Proposition 3.5.**  $Z(\text{SL}_2(\mathbb{R})) = \{I, -I\}$ .

On en trouve une preuve dans [ClJo], il s'agit de la Proposition 5.6.

**Définition 3.6.** Le *groupe projectif spécial linéaire* est défini par  $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/Z(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ .

#### 3.2 Quelques résultats sur les espaces métriques

**Définition 3.7.** Soit  $X$  un espace métrique. On dit que  $X$  est *propre* si chaque boule fermée dans  $X$  est compacte.

**Définition 3.8.** Soit  $X$  un espace métrique. On dit que  $X$  est *géodésique* si pour tout couple de points dans  $X$  il existe un segment géodésique qui les relie.

### 3.3 Action de groupes

**Définition 3.9.** On dit qu'un groupe  $G$  agit *librement* sur un espace topologique  $X$  si tout élément de  $G$  différent de l'élément neutre agit sans point fixe.

**Définition 3.10.** On dit qu'un groupe  $G$  agit *proprement discontinument* sur un espace topologique  $X$  si pour tout sous-espace compact  $K \subset X$ , l'ensemble  $\{g \in G \text{ tel que } (gK \cap K) \neq \emptyset\}$  est fini.

**Définition 3.11.** Soit  $G$  un groupe qui agit sur un ensemble  $E$ . On appelle *domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur  $E$*  un sous-ensemble  $F \subset E$  tel que

$$\bigcup_{g \in G} gF = E$$

et pour tout  $g \neq g' \in G$

$$gF \cap g'F = \emptyset.$$

### 3.4 Automorphismes intérieurs et extérieurs

**Définition 3.12.** Soit  $G$  un groupe. On appelle *automorphisme intérieur* un automorphisme de la forme

$$\begin{aligned} I_h: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

pour  $h \in G$ .

On note le *groupe des automorphismes intérieurs* par  $\text{Int}(G)$ .

**Proposition 3.13.** *Si  $G$  est un groupe abélien,  $\text{Int}(G)$  est trivial.*

*Démonstration.* Soient  $g, h \in G$ . Si  $G$  est abélien, alors

$$\begin{aligned} I_h(g) &= hgh^{-1} \\ &= hh^{-1}g \\ &= g. \end{aligned}$$

Donc  $I_h = id_G$  pour tout  $h$ . □

**Proposition 3.14.**  *$\text{Int}(G)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Aut}(G)$ .*

*Démonstration.* Soient  $g, h \in G$ ,  $I_h \in \text{Int}(G)$  et  $f \in \text{Aut}(G)$ , on a

$$\begin{aligned} f \circ I_h \circ f^{-1}(g) &= f(hf^{-1}(g)h^{-1}) \\ &= f(h)f(f^{-1}(g))f(h^{-1}) \\ &= f(h)gf(h)^{-1} \\ &= I_{f(h)}(g). \end{aligned}$$

Donc  $f \circ I_h \circ f^{-1} \in \text{Int}(G)$ . □

**Définition 3.15.** Soit  $G$  un groupe. On appelle *groupe des automorphismes extérieurs*

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G).$$

Un automorphisme extérieur agit donc sur l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de  $G$ .

Soit  $\phi \in \text{Aut}(G)$ . Notons  $\{\phi\}$  la classe des automorphismes extérieurs de  $\phi$ .

**Proposition 3.16.** *Si  $G$  est un groupe abélien,  $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)$ .*

Cette Proposition est une conséquence de la Proposition 3.13.

*Remarque 3.17.* Si  $G$  est un groupe, alors l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut}(G) &\rightarrow \text{Out}(G) \\ \phi &\mapsto \{\phi\} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes, car cette application est la projection canonique.

## 4 Prérequis de topologie algébrique

L'idée de cette section est de regrouper tous les notions et résultats de la topologie algébrique. De plus nous allons construire un homomorphisme de groupes entre l'espace des homéomorphismes d'un espace topologique connexe par arcs et le groupe des automorphismes extérieurs du groupe fondamental de cet espace topologique. Cette application nous sera très utile dans la suite.

### 4.1 Homotopie et Isotopie

Soient  $M$  et  $N$  des espaces topologiques.



**Définition 4.1.** Soient  $f, g: M \rightarrow N$  des fonctions continues. On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes (librement)* s'il existe une fonction continue  $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$  tel que pour tout  $x \in M$

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x). \end{aligned}$$

Notons  $h_t(x) := H(x, t)$ , ce qui nous donne  $h_0 = f$  et  $h_1 = g$ . Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, on note  $f \simeq g$ .

**Définition 4.2.** Soient  $f, g: M \rightarrow N$  des fonctions homotopes. On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes relativement à une partie*  $A \subset M$  si pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $p \in A$ , on a

$$h_t(p) = f(p) = g(p).$$

Il est facile de voir que l'homotopie est une relation d'équivalence. On en trouve une preuve dans [AlHat], il s'agit de la Proposition 1.2. Notons  $[f]$  la classe d'homotopie de  $f$ .

**Définition 4.3.** Soit  $A$  un sous-espace de  $M$ . Une *rétraction de  $M$  sur  $A$*  est une homotopie

$$H: M \times [0, 1] \rightarrow A$$

tel que

$$H|_{A \times [0, 1]} = id_A.$$

**Définition 4.4.** On appelle un *chemin* dans  $M$  entre deux points  $x, y \in M$  une application continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

**Définition 4.5.** On appelle *l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $M$*  l'ensemble

$$\pi_0(M) = \{\gamma: \star \rightarrow M\} / \sim$$

avec  $\sim$  la relation d'homotopie.

Donc deux points de  $M$  qui peuvent être reliés par un chemin ou autrement dit qui sont dans la même composante connexe par arcs, sont identifiés dans  $\pi_0(M)$ .

**Définition 4.6.** Soient  $f, g: M \rightarrow N$  des homéomorphismes et  $h_t: M \rightarrow N$  une homotopie entre  $f$  et  $g$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont *isotopes* si pour tout  $t \in [0, 1]$  l'application  $h_t$  est un homéomorphisme.

## 4.2 Le groupe fondamental

Soient  $M$  et  $N$  des espaces topologiques.

**Définition 4.7.** Soient  $\alpha, \beta$  des chemins sur  $M$  tel que  $\alpha(1) = \beta(0)$ . On définit  $\alpha \star \beta: [0, 1] \rightarrow M$  par

$$\alpha \star \beta(t) = \alpha(2t) \text{ si } t \in [0, 1/2]$$

et

$$\alpha \star \beta(t) = \beta(2t - 1) \text{ si } t \in [1/2, 1].$$

*Remarque 4.8.* Soient  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  des chemins sur  $M$  tel que  $\alpha(1) = \beta(0)$  et  $\alpha'(1) = \beta'(0)$ . Si  $\alpha'$  est homotope à  $\alpha$  relativement à  $\{0, 1\}$  et  $\beta'$  est homotope à  $\beta$  relativement à  $\{0, 1\}$ , alors  $\alpha' \star \beta'$  est homotope à  $\alpha \star \beta$  relativement à  $\{0, 1\}$ .

**Définition 4.9.** On appelle une *courbe fermée* sur  $M$  l'image d'une application continue  $S^1 \rightarrow M$ . On dit qu'elle est *simple* lorsque cette application est injective.

D'une manière plus visuelle, une courbe fermée est un chemin qui se replie sur lui-même. Une courbe fermée est dite simple quand elle n'admet pas de point double.

**Définition 4.10.** Soit  $p \in M$ . Définissons l'ensemble

$$\pi_1(M, p) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ continue, } \gamma(0) = \gamma(1) = p\} / \sim$$

avec  $\sim$  la relation d'homotopie relativement à  $p$ .

Soit  $\gamma$  un chemin tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . On note alors  $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$  la classe d'homotopie relativement à  $p$  de  $\gamma$ .

**Définition 4.11.** Soient  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, p)$ . On définit  $[\alpha] \star [\beta] := [\alpha \star \beta]$ .

*Remarque 4.12.* Par la Remarque 4.8 cette définition ne dépend pas des représentants choisis dans  $[\alpha]$  et  $[\beta]$ . De plus, par la Définition 4.10,  $\alpha(1) = p = \beta(0)$ , donc  $\alpha \star \beta$  est bien défini et  $\alpha \star \beta(0) = \alpha(0) = p = \beta(1) = \alpha \star \beta(1)$ , donc  $[\alpha \star \beta] \in \pi_1(M, p)$ .

**Proposition 4.13.** L'ensemble  $\pi_1(M, p)$  muni de l'opération  $\star$  est un groupe. On l'appelle le groupe fondamental.

*Démonstration.* L'élément neutre du  $\pi_1(M, p)$  est la classe d'homotopie du lacet constant égal à  $p$ , qu'on note  $[c_p]$ .

Si on considère  $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(M, p)$ , alors  $[\gamma] \star [\delta] = [\gamma \star \delta] \in \pi_1(M, p)$ , d'après la Définition 4.11 et la Remarque 4.12.

Donc  $\pi_1(M, p)$  est stable pour l'opération  $\star$ .

Soit  $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ , donc

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

est un chemin et  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . Il existe alors un chemin

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}: [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(1 - t) \end{aligned}$$

qui est le même chemin parcouru en sens inverse. De plus,  $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = p$  et  $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = p$ . Donc  $\bar{\gamma} \in \pi_1(M, p)$ . On constate que

$$[\gamma \star \bar{\gamma}] = [c_{\gamma(0)}] = [c_p]$$

et

$$[\bar{\gamma} \star \gamma] = [c_{\gamma(1)}] = [c_p].$$

Donc  $\pi_1(M, p)$  est stable par passage à l'inverse.

Par conséquent,  $(\pi_1(M, p), \star)$  est bien un groupe.  $\square$

**Lemme 4.14.** Soient  $\alpha_0, \alpha_1$  deux courbes fermées sur  $M$  (librement) homotopes par  $(\alpha_t: S^1 \rightarrow M)_{t \in [0,1]}$  et  $\delta_p$  le chemin  $t \mapsto \alpha_t(p)$  décrit par le point de base  $p$  entre  $\alpha_0(p)$  et  $\alpha_1(p)$ . Alors  $\alpha_0$  est homotope relativement à  $p$  à  $\delta_p \star \alpha_1 \star \bar{\delta}_p$ .

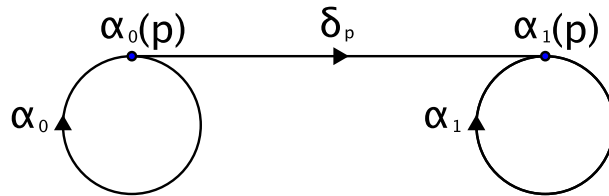


FIGURE 1 – Illustration du Lemme 4.14

**Proposition 4.15.** Soient  $p \in M, q \in N$  et

$$\begin{aligned}\phi: M &\rightarrow N \\ p &\mapsto q\end{aligned}$$

une application continue, alors l'application donnée par

$$\begin{aligned}\phi_*: \pi_1(M, p) &\rightarrow \pi_1(N, q) \\ [\alpha] &\mapsto [\phi \circ \alpha]\end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes.

Il s'agit d'un résultat qu'on trouve par exemple dans [AlHat] au début de la section *Induced Homomorphisms*.

**Définition 4.16.** Une application  $\phi: M \rightarrow N$  est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application  $\psi: N \rightarrow M$  tel que  $\phi \circ \psi \simeq id_N$  et  $\psi \circ \phi \simeq id_M$ .

**Corollaire 4.17.** Soient  $p \in M, q \in N$  et

$$\begin{aligned}\phi: M &\rightarrow N \\ p &\mapsto q\end{aligned}$$

un homéomorphisme, alors l'application donnée par

$$\begin{aligned}\phi_*: \pi_1(M, p) &\rightarrow \pi_1(N, q) \\ [\alpha] &\mapsto [\phi \circ \alpha]\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

*Démonstration.* Comme  $\phi$  est un homéomorphisme,  $\phi$  est une équivalence d'homotopie. Donc, d'après la Proposition 1.18 dans [AlHat],  $\phi_*$  est un isomorphisme.  $\square$

**Proposition 4.18.** Si  $M$  est connexe par arcs,  $p, q \in M$  et  $\gamma$  un chemin de  $q$  à  $p$ , alors l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned}\Theta_\gamma: \pi_1(M, p) &\rightarrow \pi_1(M, q) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}]\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

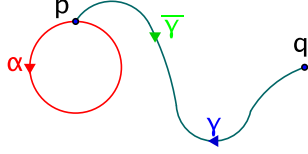


FIGURE 2 –  $\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}$

*Démonstration.* Commençons par montrer qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes. Soient  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, p)$ , on a

$$\begin{aligned}
\Theta_\gamma([\alpha] \star [\beta]) &= \Theta_\gamma([\alpha \star \beta]) && \text{par la Définition 4.11} \\
&= [\gamma \star (\alpha \star \beta) \star \bar{\gamma}] \\
&= [\gamma \star \alpha \star (\bar{\gamma} \star \gamma) \star \beta \star \bar{\gamma}] && \text{par la Remarque 4.8} \\
&= [\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}] \star [\gamma \star \beta \star \bar{\gamma}] && \text{par la Définition 4.11} \\
&= \Theta_\gamma([\alpha]) \star \Theta_\gamma([\beta]).
\end{aligned}$$

Bien entendu l'application  $\Theta_{\bar{\gamma}}$  est aussi un homomorphisme de groupes.

Pour démontrer ensuite que  $\Theta_\gamma$  est un isomorphisme, montrons que  $\Theta_{\bar{\gamma}}$  est l'application inverse de  $\Theta_\gamma$ . Soit  $[\alpha] \in \pi_1(M, p)$  et  $[\beta] \in \pi_1(M, q)$ , on a

$$\begin{aligned}
\Theta_{\bar{\gamma}} \circ \Theta_\gamma([\alpha]) &= \Theta_{\bar{\gamma}}([\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}]) \\
&= [(\bar{\gamma} \star \gamma) \star \alpha \star (\bar{\gamma} \star \gamma)] \\
&= [\alpha] && \text{par la Remarque 4.8}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Theta_\gamma \circ \Theta_{\bar{\gamma}}([\beta]) &= \Theta_\gamma([\bar{\gamma} \star \beta \star \gamma]) \\
&= [(\gamma \star \bar{\gamma}) \star \beta \star (\gamma \star \bar{\gamma})] \\
&= [\beta] && \text{par la Remarque 4.8.}
\end{aligned}$$

Donc  $\Theta_\gamma$  est bien un isomorphisme et  $\Theta_\gamma^{-1} = \Theta_{\bar{\gamma}}$ . □

Par conséquent, si  $M$  est connexe par arcs, on écrit simplement  $\pi_1(M)$ , bien que le choix de l'isomorphisme n'est pas canonique.

**Lemme 4.19.** *Si  $M$  est connexe par arcs,  $p, q \in M$  et  $\gamma, \delta$  des chemins de  $p$  à  $q$ , alors*

$$\Theta_\delta \circ \Theta_{\bar{\gamma}} = \Theta_{\delta \star \bar{\gamma}}.$$

*Démonstration.* Soit  $[\alpha] \in \pi_1(M, p)$ , on a

$$\begin{aligned}
\Theta_\delta \circ \Theta_{\bar{\gamma}}([\alpha]) &= \Theta_\delta([\bar{\gamma} \star \alpha \star \gamma]) \\
&= [\delta \star \bar{\gamma} \star \alpha \star \gamma \star \bar{\delta}] \\
&= [(\delta \star \bar{\gamma}) \star \alpha \star \overline{(\delta \star \bar{\gamma})}] \\
&= \Theta_{\delta \star \bar{\gamma}}([\alpha]).
\end{aligned}$$

□

*Remarque 4.20.* Si on considère un lacet  $\alpha$  de point de base  $p$ , alors l'application

$$\Theta_\alpha: \pi_1(M, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$$

est la conjugaison par  $[\alpha]$ .

### 4.3 L'homomorphisme de groupes $F: \text{Homeo}(M) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(M))$

Soit  $M$  un espace topologique connexe par arcs et  $p$  un point de base dans  $M$ . Notons  $\text{Homeo}(M)$  le groupe des homéomorphismes de  $M$  muni de la composition des applications.

A l'aide des résultats énoncés jusqu'ici, nous allons maintenant construire un homomorphisme de groupes entre  $\text{Homeo}(M)$  et  $\text{Out}(\pi_1(M))$ .

Soit  $\phi \in \text{Homeo}(M)$ . On veut lui associer un automorphisme de  $\pi_1(M, p)$ . Mais, d'après le Corollaire 4.17,  $\phi$  induit l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
\phi_*: \pi_1(M, p) &\rightarrow \pi_1(M, \phi(p)) \\
[\alpha] &\mapsto [\phi \circ \alpha].
\end{aligned}$$

Postcomposons  $\phi_*$  par l'isomorphisme défini dans la Proposition 4.18,

$$\begin{aligned}
\Theta_\gamma: \pi_1(M, \phi(p)) &\rightarrow \pi_1(M, p) \\
[\beta] &\mapsto [\gamma \star \beta \star \bar{\gamma}]
\end{aligned}$$

avec  $\gamma$  un chemin entre  $p$  et  $\phi(p)$ . Ainsi en composant les deux isomorphismes, on obtient l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
\Theta_\gamma \circ \phi_*: \pi_1(M, p) &\rightarrow \pi_1(M, p) \\
[\alpha] &\mapsto [\gamma \star (\phi \circ \alpha) \star \bar{\gamma}].
\end{aligned}$$

Notons  $\phi_*^\gamma := \Theta_\gamma \circ \phi_* \in \text{Aut}(\pi_1(M))$ .

Associons ensuite à cet automorphisme sa classe d'automorphismes extérieurs  $\{\phi_*^\gamma\}$ . Montrons qu'elle ne dépend pas du choix de  $\gamma$ .

Si au lieu de considérer le chemin  $\gamma$ , on prend un autre chemin  $\delta$  entre  $p$  et  $\phi(p)$ , on obtient pour tout  $[\alpha] \in \pi_1(M, p)$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_*^\delta([\alpha]) &= \Theta_\delta \circ \phi_*([\alpha]) \\
&= \Theta_\delta \circ (\Theta_{\bar{\gamma}} \circ \Theta_\gamma) \circ \phi_*([\alpha]) && \text{par la Proposition 4.18 et le Lemme 4.19} \\
&= (\Theta_\delta \circ \Theta_{\bar{\gamma}}) \circ (\Theta_\gamma \circ \phi_*([\alpha])) \\
&= \Theta_{\delta \star \bar{\gamma}} \circ \phi_*^\gamma([\alpha]) && \text{par le Lemme 4.19} \\
&= \text{Conj}([\delta \star \bar{\gamma}]) \circ \phi_*^\gamma([\alpha]) && \text{par la Remarque 4.20,}
\end{aligned}$$

car  $\delta \star \bar{\gamma}$  est un lacet dans  $M$  de point de base  $p$ .

Donc  $\{\phi_*^\delta\} = \{\phi_*^\gamma\} \in \text{Out}(\pi_1(M))$ . Ainsi on peut définir l'application

$$\begin{aligned}
F: \text{Homeo}(M) &\rightarrow \text{Out}(\pi_1(M)) \\
\phi &\mapsto \{\phi_*^\gamma\}
\end{aligned}$$

et elle ne dépend pas du choix de  $\gamma$ .

Montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes.

Soient maintenant  $\phi, \psi \in \text{Homeo}(M)$ ,  $\gamma$  un chemin entre  $p$  et  $\psi(p)$  et  $\delta$  un chemin entre  $\psi(p)$  et  $\phi \circ \psi(p)$ . Donc  $\gamma \star \delta$  est un chemin entre  $p$  et  $\phi \circ \psi(p)$ .

Donc on a

$$F(\phi \circ \psi) = \{(\phi \circ \psi)_*^{\gamma \star \delta}\}$$

Comme chemin entre  $p$  et  $\phi(p)$  on peut choisir  $\gamma \star \delta \star \phi \circ \bar{\gamma}$ . Notons-le  $\beta$ .

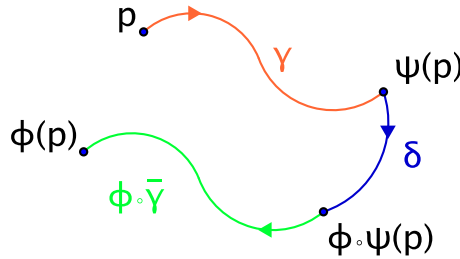


FIGURE 3 – Les chemins entre  $p, \psi(p), \phi \circ \psi(p)$  et  $\phi(p)$

Donc il faut montrer que

$$\{(\phi \circ \psi)_*^{\gamma \star \delta}\} = \{\phi_*^\beta\} \circ \{\psi_*^\gamma\}.$$

Soit  $[\alpha] \in \pi_1(M, p)$ , on a

$$\begin{aligned}
\phi_*^\beta \circ \psi_*^\gamma([\alpha]) &= \phi_*^{\gamma \star \delta \star \phi \circ \bar{\gamma}}([\gamma \star (\psi \circ \alpha) \star \bar{\gamma}]) \\
&= [\gamma \star \delta \star \phi \circ \bar{\gamma} \star \phi(\gamma \star (\psi \circ \alpha) \star \bar{\gamma}) \star \overline{\gamma \star \delta \star \phi \circ \bar{\gamma}}] \\
&= [\gamma \star \delta \star (\phi \circ \bar{\gamma} \star \phi \circ \gamma) \star (\phi \circ \psi \circ \alpha) \star (\phi \circ \bar{\gamma} \star \phi \circ \gamma) \star \bar{\delta} \star \bar{\gamma}] \\
&= [\gamma \star \delta \star (\phi \circ \psi \circ \alpha) \star \overline{\gamma \star \delta}] \text{ par la Remarque 4.8} \\
&= (\phi \circ \psi)_*^{\gamma \star \delta}([\alpha]).
\end{aligned}$$

Donc

$$\{(\phi \circ \psi)_*^{\gamma \star \delta}\} = \{\phi_*^\beta \circ \psi_*^\gamma\}.$$

D'où, d'après la Remarque 3.17, on a finalement que

$$\{(\phi \circ \psi)_*^{\gamma \star \delta}\} = \{\phi_*^\beta\} \circ \{\psi_*^\gamma\}.$$

Donc  $F$  est bien un homomorphisme de groupes.

**Lemme 4.21.** *Si  $\phi^0, \phi^1 \in \text{Homeo}(M)$  sont isotopes, alors  $F(\phi^0) = F(\phi^1)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\phi^0, \phi^1 \in \text{Homeo}(M)$  isotopes. Il existe alors une isotopie  $(t \mapsto \phi^t)_{t \in [0,1]}$  entre  $\phi^0$  et  $\phi^1$ . Donc pour tout  $[\alpha] \in \pi_1(M, p)$ ,  $\phi^0 \circ \alpha$  et  $\phi^1 \circ \alpha$  sont homotopes librement par l'homotopie  $(t \mapsto \phi^t \circ \alpha)_{t \in [0,1]}$ .

D'où, d'après le Lemme 4.14,  $\phi^0 \circ \alpha$  est homotope à  $\delta_p \star (\phi^1 \circ \alpha) \star \bar{\delta}_p$  relativement à  $p$  avec  $\delta_p$  le chemin décrit par le point de base  $p$  entre  $\phi^0 \circ \alpha(p) = \phi^0(p)$  et  $\phi^1 \circ \alpha(p) = \phi^1(p)$ .

Montrons alors que  $\{(\phi^0)_*^\gamma\} = \{(\phi^1)_*^\delta\}$  avec  $\gamma$  un chemin quelconque entre  $p$  et  $\phi^0(p)$  et  $\delta = \gamma \star \delta_p$ , qui définit bien un chemin entre  $p$  et  $\phi^1(p)$ . Cela nous donne

$$\begin{aligned}
(\phi^1)_*^\delta([\alpha]) &= (\phi^1)_*^{\gamma \star \delta_p}([\alpha]) \\
&= [\gamma \star \delta_p \star (\phi^1 \circ \alpha) \star \overline{\gamma \star \delta_p}] \\
&= [\gamma \star \delta_p \star (\phi^1 \circ \alpha) \star \bar{\delta}_p \star \bar{\gamma}] \\
&= [\gamma \star (\phi^0 \circ \alpha) \star \bar{\gamma}] && \text{par la Remarque 4.8} \\
&= (\phi^0)_*^\gamma([\alpha]).
\end{aligned}$$

Donc  $\{(\phi^1)_*^\delta\} = \{(\phi^0)_*^\gamma\}$ . □

## 4.4 Les revêtements

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques,  $x \in X$  et  $y \in Y$ .



**Définition 4.22.** L'application  $p: Y \rightarrow X$  est un *revêtement* si pour tout  $x \in X$  il existe un ouvert  $U$  avec  $x \in U$ , un ensemble d'indice  $I$  et des ouverts disjoints  $U_i \in Y$  tel que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  et  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme pour tout  $i \in I$ .

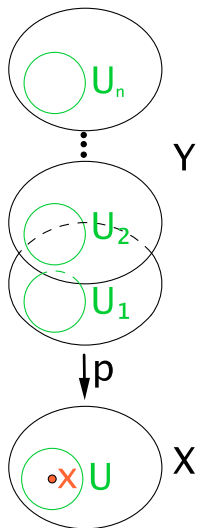


FIGURE 4 – Un revêtement

**Proposition 4.23.** Soit  $G$  un groupe. Si  $G$  agit par homéomorphismes sur  $X$  librement et proprement discontinûment, alors  $p: X \rightarrow X/G$  est un revêtement.

On trouve une preuve de cette proposition dans [AlHat], il s'agit d'une partie de la Proposition 1.40.

**Exemple 4.24.** Considérons  $\mathbb{R}$  et le groupe des translations par  $\mathbb{Z}$  donné par l'ensemble  $\{t_n: x \rightarrow x+n, n \in \mathbb{Z}\}$  muni de l'addition. Ce groupe agit sur  $\mathbb{R}$  par homéomorphismes, librement et proprement discontinûment. Donc, d'après la Proposition 4.23,  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un revêtement.

**Définition 4.25.** On définit le cercle  $S^1$  par  $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Exemple 4.26.** Considérons  $\mathbb{R}^2$  et le groupe des translations par  $\mathbb{Z}^2$  donné par l'ensemble  $\{t_n: x \rightarrow x+n, n \in \mathbb{Z}^2\}$  muni de l'addition. Ce groupe agit sur  $\mathbb{R}^2$  par homéomorphismes, librement et proprement discontinûment. Donc, d'après la Proposition 4.23,  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  est un revêtement.

**Définition 4.27.** On définit la tore  $T^2$  par  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Voici la propriété du relèvement.

**Proposition 4.28.** Soient  $Z$  un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs,  $z \in Z$ ,  $p: Y \rightarrow X$  un revêtement et  $f: Z \rightarrow X$  une fonction continue tel que  $f(z) = x = p(y)$ . Il existe alors une application

$$\begin{aligned} \tilde{f}: Z &\rightarrow Y \\ z &\mapsto y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

tel que  $p \circ \tilde{f} = f$  si et seulement si  $f_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(Y, y))$ . De plus si une telle application existe, elle est unique.

Cette propriété a été énoncée par exemple dans [CoFr]. Il s'agit du Théorème 0.17.

**Exemple 4.29.** Relèvement des chemins

Soit  $p: Y \rightarrow X$  un revêtement tel que  $p(y) = x$ . Soit  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  un chemin tel que  $\alpha(0) = x$ . Alors il existe un unique relèvement  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow Y$  tel que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  et  $\tilde{\alpha}(0) = y$ ,

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \tilde{\alpha} \nearrow & \downarrow p & \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

car  $\alpha_*(\pi_1([0, 1])) = 1 \subset p_*(\pi_1(Y, y))$ .

*Remarque 4.30.* Si  $\alpha$  est une courbe fermée, alors  $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(\{x\})$ .

**Définition 4.31.** Si  $Y$  est connexe par arcs,  $p: Y \rightarrow X$  un revêtement et  $\pi_1(Y, y) = 1$ , alors  $p$  est un *revêtement universel* de  $X$  et on note  $Y = \tilde{X}$ .

**Exemple 4.32.** Comme  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs et  $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 1$ , le revêtement  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  donné dans l'Exemple 4.26 est universel.

## 4.5 Le groupe fondamental du tore

**Théorème 4.33.** Soient  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  le revêtement donné dans l'Exemple 4.26,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow T^2$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = p((0, 0))$  et soit  $\tilde{\gamma}$  un relevé de  $\gamma$

en  $(0, 0)$ . Alors l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Theta: \pi_1(T^2, p((0, 0))) &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $\Theta$  est bien défini.

On a

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^2 \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & T^2 \end{array}$$

$\tilde{\gamma}$  existe d'après l'Exemple 4.29 avec  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  et  $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$ .

On peut remarquer que, comme  $\gamma$  est une courbe fermée, d'après la Remarque 4.30,  $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}^2$ . Donc

$$\begin{aligned} \Theta: \pi_1(T^2, p((0, 0))) &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

est bien défini.

Montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes.

Soient  $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(T^2, p((0, 0)))$  on a

$$\begin{aligned} \Theta([\gamma] \star [\delta]) &= \Theta([\gamma \star \delta]) \\ &= \widetilde{\gamma \star \delta}(1) \end{aligned}$$

où  $\widetilde{\gamma \star \delta}$  est le relevé de  $\gamma \star \delta$  en  $(0, 0)$ .

Soit  $\hat{\delta}$  le relevé de  $\delta$  en  $\tilde{\gamma}(1)$ , alors on peut remarquer que  $p \circ (\tilde{\gamma} \star \hat{\delta}) = \gamma \star \delta$ .

Donc par l'unicité dans la Proposition 4.28,

$$\tilde{\gamma} \star \hat{\delta} = \widetilde{\gamma \star \delta}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Theta([\gamma] \star [\delta]) &= \widetilde{\gamma \star \delta}(1) \\ &= \tilde{\gamma} \star \hat{\delta}(1) \\ &= \hat{\delta}(1) \quad \text{par la Définition 4.7.} \end{aligned}$$

Or, si on note par  $tr_{\tilde{\gamma}(1)}(\tilde{\delta})$  le translaté de  $\tilde{\delta}$  par le vecteur  $\tilde{\gamma}(1)$ , on peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} p(tr_{\tilde{\gamma}(1)}(\tilde{\delta})) &= p(\tilde{\delta}) & \text{car } \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}^2 \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Donc par l'unicité dans la Proposition 4.28,

$$\tilde{\delta} + \tilde{\gamma}(1) = \hat{\delta}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\Theta([\gamma] \star [\delta]) &= \hat{\delta}(1) \\ &= \tilde{\delta}(1) + \tilde{\gamma}(1) \\ &= \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\delta}(1).\end{aligned}$$

Donc  $\Theta$  est un homomorphisme de groupes.

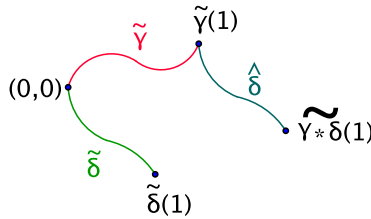


FIGURE 5 -  $\widetilde{\gamma \star \delta}(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\delta}(1)$

Montrons ensuite que  $\Theta$  est injective. Soit  $[\gamma] \in \pi_1(T^2, p((0, 0)))$  tel que

$$\begin{aligned}\Theta([\gamma]) &= (0, 0) \\ \Rightarrow \tilde{\gamma}(1) &= \tilde{\gamma}(0) \\ \Rightarrow \tilde{\gamma} \text{ homotope à } c_{(0,0)} & \qquad \text{car } \mathbb{R}^2 \text{ est contractile} \\ \Rightarrow p \circ \tilde{\gamma} \text{ homotope à } c_{p((0,0))} \\ \Rightarrow \gamma \text{ homotope à } c_{p((0,0))}.\end{aligned}$$

D'où l'injectivité.

Reste à montrer que  $\Theta$  est surjective. Posons

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, 0) \\ \text{et } \tilde{\beta}: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (0, t).\end{aligned}$$

On a alors  $\Theta([p \circ \tilde{\alpha}]) = \tilde{\alpha}(1) = (1, 0)$  et  $\Theta([p \circ \tilde{\beta}]) = \tilde{\beta}(1) = (0, 1)$ . D'où l'image de  $\Theta$  contient une base de  $\mathbb{Z}^2$  et donc  $\text{Im}(\Theta) = \mathbb{Z}^2$ . D'où la surjectivité.  $\square$

*Remarque 4.34.* Le tore  $T^2$  est connexe par arcs, donc par la Proposition 4.18, il n'est pas nécessaire de préciser un point de base.

**Corollaire 4.35.** *Une base de  $\pi_1(T^2)$  est donnée par  $([p \circ \tilde{\alpha}], [p \circ \tilde{\beta}])$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Theta$  est un isomorphisme,  $\Theta$  respectivement  $\Theta^{-1}$  envoie une base sur une base. D'où  $([p \circ \tilde{\alpha}], [p \circ \tilde{\beta}])$  est une base de  $\pi_1(T^2)$ .  $\square$

## 4.6 Les CW-complexes

**Définition 4.36.** On appelle un *CW-complexe de dimension 0* un ensemble  $X^0$  muni de la topologie discrète. Les points de  $X^0$  sont appelés des *0-cellules*. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un *CW-complexe de dimension n* est un espace topologique  $X$  obtenu à partir d'un CW-complexe  $X^{n-1}$  de dimension  $n - 1$  en attachant des *n-cellules*  $e_\alpha^n$  homéomorphes à des boules de dimension  $n$ ,  $B^n$ , le long de  $S^{n-1} = \partial B^n$  par des applications continues  $\psi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ .  $X^{n-1}$  est alors appelé le *(n - 1)-squelette* de  $X^n$ .

**Définition 4.37.** Un *CW-complexe* est une réunion  $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$  où pour tout  $n \geq 0$ ,  $X^n$  est un CW-complexe de dimension  $n$  et de  $(n - 1)$ -squelette  $X^{n-1}$ .

**Définition 4.38.** Soit  $X$  un CW-complexe. On appelle *sous-CW-complexe* de  $X$  un sous-ensemble fermé de  $X$ , constitué d'une réunion de cellules.

**Lemme 4.39.** *Soit  $X$  un CW-complexe. Une application continue  $\psi: S^{n-1} \rightarrow X$  s'étend continûment à  $B^n$  si et seulement si  $\psi$  est homotope à une application constante  $S^{n-1} \rightarrow \{x\}$  pour un certain  $x \in X$ .*

**Lemme 4.40.** *Soient  $X$  et  $Y$  des CW-complexes tels que le revêtement universel  $\tilde{Y}$  est contractile. Soit  $X'$  tel que  $X^2 \subset X' \subset X$  et  $h: X' \rightarrow Y$  une application continue. Alors il existe  $\hat{h}: X \rightarrow Y$  continu tel que  $\hat{h}|_{X'} = h$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence.

Comme  $X^2 \subset X'$ ,  $h$  est définie sur le 2-squelette de  $X$ .

Supposons qu'on a réussi à étendre  $h$  au  $(n - 1)$ -squelette de  $X$ , donc il existe  $\hat{h}: X^{n-1} \rightarrow Y$  tel que  $\hat{h}|_{X'} = h$ . Pour étendre  $h$  au  $n$ -squelette de  $X$  il suffit de considérer une  $n$ -cellule  $e_\alpha^n \in X \setminus X^{n-1}$  quelconque et de définir son image par  $\hat{h}$ . On a

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \tilde{Y} & \\
 & & & \downarrow p & \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & X^{n-1} & \xrightarrow{\hat{h}} & Y \\
 & \nearrow f_\alpha & & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

$f_\alpha$  existe par la propriété du relèvement 4.28, car comme  $n - 1 \geq 2$  on a  $\pi_1(S^{n-1}) = 1$  (d'après la Proposition 1.14 dans [AlHat]), donc

$$(\hat{h} \circ \psi_\alpha)_*(\pi_1(S^{n-1})) = 1 \subset p_*(\pi_1(\tilde{Y})).$$

Le fait que  $\tilde{Y}$  est contractile implique que  $f_\alpha(S^{n-1})$  est homotope à un point  $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ . Donc  $p \circ f_\alpha(S^{n-1}) = \hat{h} \circ \psi_\alpha(S^{n-1})$  est homotope au point  $p(\tilde{y}) \in Y$ . Par conséquent, l'application  $\hat{h} \circ \psi_\alpha$  est homotope à une application constante  $S^{n-1} \rightarrow \{p(\tilde{y})\}$ .

Ainsi, d'après le Lemme 4.39,  $\hat{h} \circ \psi_\alpha$  s'étend à  $B^n$ .

Posons alors  $\hat{h}(e_\alpha^n) = \hat{h} \circ \psi_\alpha(B^n) \subset Y$ . Comme on a choisi  $e_\alpha^n$  quelconque,  $\hat{h}$  est définie sur le  $n$ -squelette.

Par récurrence on peut ainsi étendre  $h$  à  $\hat{h}: X \rightarrow Y$  tel que  $\hat{h}|_{X'} = h$ .  $\square$

**Proposition 4.41.** *Soient  $X$  et  $Y$  des CW-complexes tel que  $X^0 = \{x\}$ ,  $Y^0 = \{y\}$  et le revêtement universel  $\tilde{Y}$  est contractile. Soit*

$$f: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$$

*un homomorphisme de groupes. Alors il existe une application continue, unique à homotopie près,*

$$\begin{aligned} \phi: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

*telle que  $\phi_* = f$ .*

Nous allons seulement démontrer l'unicité. On trouve une preuve complète dans [AlHat], il s'agit de la Proposition 1B.9.

*Démonstration.* Soient

$$\begin{aligned} \phi_0, \phi_1: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

telles que  $(\phi_0)_* = (\phi_1)_* = f$ . Montrons que  $\phi_0$  est homotope à  $\phi_1$ .

Posons

$$Z = X \times [0, 1].$$

Déterminons une homotopie  $h: Z \rightarrow Y$  entre  $\phi_0$  et  $\phi_1$ . Posons pour tout  $x \in X$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \phi_0(x) \\ h(x, 1) &= \phi_1(x) \\ h(\{x\} \times [0, 1]) &= \{y\}. \end{aligned}$$

Considérons ensuite une 1-cellule de  $X$ ,  $e_\alpha^1$ . Comme  $X^0 = \{x\}$ ,  $e_\alpha^1 := \alpha: [0, 1] \rightarrow X$  continue tel que  $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ . Comme on a supposé que  $(\phi_0)_* = (\phi_1)_*$ , on a

$$\begin{aligned} (\phi_0)_*([\alpha]) &= (\phi_1)_*([\alpha]) \\ \iff [\phi_0 \circ \alpha] &= [\phi_1 \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Donc il existe une homotopie entre  $\phi_0 \circ \alpha$  et  $\phi_1 \circ \alpha$ , c'est-à-dire une application continue  $g: e_\alpha^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que

$$\begin{aligned} g|_{e_\alpha^1 \times \{0\}} &= \phi_0|_{e_\alpha^1} := \phi_0 \circ \alpha \\ g|_{e_\alpha^1 \times \{1\}} &= \phi_1|_{e_\alpha^1} := \phi_1 \circ \alpha. \end{aligned}$$

Donc on étend  $h$  à  $e_\alpha^1 \times [0, 1]$  en posant  $h|_{e_\alpha^1 \times [0, 1]} := g$ . Ainsi on a défini  $h$  sur le 2-squelette de  $Z$ . Donc on peut appliquer le Lemme 4.40 pour étendre  $h$  sur  $Z$  tout entier. Ainsi on a construit une homotopie entre  $\phi_0$  et  $\phi_1$ .  $\square$

*Remarque 4.42.* En particulier, la Proposition 4.41 nous dit qu'un automorphisme  $f$  de  $\pi_1(X, x)$  est induit par une application continue  $\phi: X \rightarrow X$  qui fixe  $x$ , c'est-à-dire que  $\phi_* = f$ . De plus,  $f^{-1}$  est aussi un automorphisme de  $\pi_1(X, x)$  et est donc aussi induit par une application continue  $\psi: X \rightarrow X$  qui fixe  $x$ , c'est-à-dire que  $\psi_* = f^{-1}$ . D'où on a

$$\begin{aligned} \phi_* \circ \psi_* &= f \circ f^{-1} \\ \iff (\phi \circ \psi)_* &= id_X \\ \iff (\phi \circ \psi)_*([\alpha]) &= [\alpha] && \text{pour tout } [\alpha] \in \pi_1(X, x) \\ \iff [\phi \circ \psi \circ \alpha] &= [\alpha] && \text{pour tout } [\alpha] \in \pi_1(X, x) \\ \iff \phi \circ \psi &\simeq id_X. \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on a aussi que

$$\psi \circ \phi \simeq id_X.$$

Par conséquent,  $\phi$  est une équivalence d'homotopie.

Donc, la Proposition 4.41 nous dit qu'un automorphisme de  $\pi_1(X, x)$  est induit par une équivalence d'homotopie.

## 4.7 La caractéristique d'Euler d'un CW-complexe

**Définition 4.43.** Soit  $X$  un CW-complexe de dimension finie. La *caractéristique d'Euler* de  $X$  est donnée par

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n$$

avec  $b_n$  le nombre de  $n$ -cellules.

**Théorème 4.44.** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux CW-complexes homéomorphes, alors  $\chi(X) = \chi(Y)$ .*

## 4.8 La propriété d'extension d'homotopie

**Définition 4.45.** Soient  $X$  un espace topologique,  $A \subset X$  et  $\partial X \subset X$ . On dit que  $(X, A)$  a la *propriété d'extension d'homotopie (relativement à  $\partial X$ )* si pour tout espace topologique  $Y$ , pour tout  $f_0: X \rightarrow Y$  et  $f_1^A: A \rightarrow Y$ , chaque homotopie  $H$  (relative à  $\partial X$ ) entre  $f_0|_A$  et  $f_1^A$ , peut être étendue en une homotopie  $\tilde{H}$  (relative à  $\partial X$ ) entre  $f_0$  et une application  $f_1: X \rightarrow Y$  telle que  $f_1|_A = f_1^A$ .

**Proposition 4.46.** *Soient  $X$  un CW-complexe et  $A$  un sous-CW-complexe de  $X$ . Alors  $(X, A)$  a la propriété d'extension d'homotopie.*

On trouve une preuve de cette proposition dans [AlHat], il s'agit de la Proposition 0.16.

Elle nous donne aussi le résultat suivant.

**Proposition 4.47.** *Si  $A$  est une courbe fermée simple sur un CW-complexe  $X$ , alors  $(X, A)$  a la propriété d'extension d'homotopie.*

**Proposition 4.48.** *Soient  $X$  un CW-complexe,  $p, q \in X$  et  $\gamma$  un chemin de  $q$  à  $p$ . Alors il existe une application continue*

$$\begin{aligned} \psi: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto q \end{aligned}$$

homotope à l'identité tel que  $\psi_* = \Theta_\gamma$  avec

$$\begin{aligned} \Theta_\gamma: \pi_1(X, p) &\rightarrow \pi_1(X, q) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.46,  $(X, p)$  a la propriété d'extension d'homotopie.

On pose  $f_0 = id: X \rightarrow X$  et  $f_1^p = q$ . On a alors en effet une homotopie  $H$  entre  $f_0|_{\{p\}}$  et  $f_1^p$ , c'est-à-dire entre  $p$  et  $q$ . Il suffit de choisir  $H(x, t) = \bar{\gamma}(t)$ . La propriété d'extension d'homotopie nous donne alors une homotopie  $\tilde{H}$  entre l'identité et une application  $f_1: X \rightarrow X$  telle que  $f_1(p) = q$ .

Reste à montrer que  $(f_1)_* = \Theta_\gamma$ .

Soit  $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ . Comme  $f_1 \simeq id$  on a aussi  $f_1 \circ \alpha \simeq \alpha$ . Soit  $\delta_p$  le chemin décrit par le point de base  $p$  entre  $f_1 \circ \alpha(p)$  et  $\alpha(p)$ , c'est-à-dire entre  $q$  et  $p$ . Alors on a, d'après le Lemme 4.14 que  $f_1 \circ \alpha$  est homotope à  $\delta_p \star \alpha \star \bar{\delta}_p$



relativement à  $p$ .

Or  $\tilde{H}(p, t) = \bar{\gamma}(t)$  comme  $\tilde{H}$  étend  $H$ . Donc le chemin décrit par  $p$  est  $\gamma$ .

D'où  $\delta_p = \gamma$ .

Donc on a pour tout  $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$

$$\begin{aligned} (f_1)_*([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] \\ &= [\delta_p \star \alpha \star \bar{\delta}_p] \\ &= [\gamma \star \alpha \star \bar{\gamma}] && \text{par la Remarque 4.8} \\ &= \Theta_\gamma([\alpha]). \end{aligned}$$

Par conséquent  $f_1$  est l'application  $\psi$  cherchée, car

$$\begin{aligned} f_1: X &\rightarrow X \\ p &\mapsto q, \end{aligned}$$

$f_1$  est homotope à l'identité et  $(f_1)_* = \Theta_\gamma$ . □

## 5 La quasi-isométrie

### 5.1 Le graphe de Cayley

**Définition 5.1.** On appelle *un graphe* un CW-complexe de dimension 1.

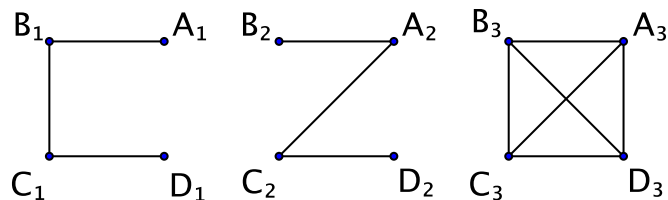


FIGURE 6 – Quelques graphes

**Définition 5.2.** Soient  $G$  un groupe et  $S$  une partie génératrice de  $G$ . Le *graphe de Cayley de  $G$  par rapport à  $S$* , noté  $\Gamma(G, S)$ , est un graphe tel que chaque point correspond à un élément  $g \in G$  et pour tout  $(g, s)$  tel que  $g \in G$ ,  $s \in S$  ou  $s^{-1} \in S$  les points  $g$  et  $gs$  sont reliés par une arête.

*Remarque 5.3.* Comme  $S$  est une partie génératrice de  $G$ , le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  est connexe.

Munissons  $\Gamma(G, S)$  d'une métrique.

**Définition 5.4.** La distance entre deux points distincts qui sont directement liés par une arête est fixée égale à 1.

Pour deux éléments quelconques de  $G$ , on cherche le chemin le plus court qui les relie en passant par des arêtes du graphe. La distance entre ces deux points sera alors égale au nombre d'arêtes empruntées.

On appelle cette métrique la *métrique des mots de  $G$  par rapport à  $S$* . On la note  $d_S$ .

*Remarque 5.5.* La métrique des mots dépend de la partie génératrice  $S$ .

## 5.2 La quasi-isométrie

**Définition 5.6.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques. On dit que  $X$  et  $Y$  sont *quasi-isométriques* si et seulement s'il existe des applications  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow X$  et des constantes  $K, C$  et  $D$  tel que pour tout  $x, x' \in X$  et  $y, y' \in Y$

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq K d_X(x, x') + C, \\ d_X(g(y), g(y')) &\leq K d_Y(y, y') + C, \\ d_X(g \circ f(x), x) &\leq D, \\ \text{et } d_Y(f \circ g(y), y) &\leq D. \end{aligned}$$

**Théorème 5.7.** Soient  $X$  un espace métrique propre et géodésique et  $G$  un groupe qui agit proprement et discontinûment sur  $X$  par isométries. Si le quotient  $X/G$  est compact, alors la partie génératrice de  $G$  est finie et  $G$  est quasi-isométrique à  $X$ .

Plus précisément, il existe une métrique des mots sur  $G$  tel que pour tout  $x_0 \in X$  l'application

$$\begin{aligned} G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \times x_0 \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

On trouve une preuve détaillée de ce Théorème dans [BFDM], il s'agit du Théorème 8.2.

*Remarque 5.8.* Soit  $G$  un groupe et  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . Définissons l'action de  $G$  sur  $\Gamma(G, S)$  comme suit : Un élément  $h \in G$  associe à un point  $g \in \Gamma(G, S)$  le point  $hg$  et l'arête qui relie  $g$  et  $gs$  est transformée en l'arête qui relie  $hg$  et  $hgs$ .

Cette action nous dit que  $d_S(g, h) = d_S(1, g^{-1}h)$  pour tout  $g, h \in G$ .

**Corollaire 5.9.** Soient  $S$  et  $S'$  deux parties génératrices finies d'un groupe  $G$  et  $d_S$  et  $d_{S'}$  deux métriques des mots sur  $G$  par rapport à  $S$  respectivement  $S'$ . Alors l'application  $id: (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$  est une quasi-isométrie.

*Démonstration.* Comme  $S$  et  $S'$  sont tous les deux des parties génératrices de  $G$ , chaque élément  $s \in S$  peut s'écrire comme un produit d'éléments de  $S'$ . Posons  $K$  la longueur maximale d'un de ces produits. Soit  $g \in G$ , on a alors

$$d_{S'}(1, g) \leq Kd_S(1, g).$$

Donc, par la Remarque 5.8 on a

$$d_{S'}(g, h) = d_{S'}(1, g^{-1}h) \leq Kd_S(1, g^{-1}h) = Kd_S(g, h).$$

En inversant les rôles de  $S$  et  $S'$  on démontre par un raisonnement analogue que

$$d_S(g, h) = d_S(1, g^{-1}h) \leq Kd_{S'}(1, g^{-1}h) = kd_{S'}(g, h).$$

De plus

$$d_S(g, g) = d_{S'}(g, g) \leq D$$

pour tout  $D \geq 0$ .

Donc  $id$  est une quasi-isométrie de constantes  $K$  définie comme ci-dessus,  $C = 0$  et  $D \geq 0$ .  $\square$

**Corollaire 5.10.** Soit  $G$  un groupe tel que la partie génératrice  $S$  est finie. Alors tout automorphisme de  $G$  est une quasi-isométrie.

*Remarque 5.11.* Grâce au Corollaire 5.9, il n'est pas nécessaire de préciser la métrique choisie sur  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \text{Aut}(G)$  avec  $G$  un groupe de partie génératrice  $S$  finie. Comme  $\phi$  est un automorphisme, l'ensemble  $\phi^{-1}(S) = \{\phi^{-1}(s), s \in S\}$  est aussi une partie génératrice finie de  $G$ . De plus

$$d_S(\phi(g), \phi(h)) = d_{\phi^{-1}(S)}(g, h)$$

pour tout  $g, h \in G$ . Donc le Corollaire 5.9, appliqué avec  $S' = \phi^{-1}(S)$  nous donne qu'il existe des constantes  $K, C$  et  $D$  tel que pour tout  $g, h \in G$

$$\begin{aligned}d_{\phi^{-1}(S)}(g, h) &\leq Kd_S(g, h) + C \\d_S(g, h) &\leq Kd_{\phi^{-1}(S)}(g, h) + C \\d_S(g, g) &\leq D \\d_{\phi^{-1}(S)}(g, g) &\leq D.\end{aligned}$$

Donc on a pour tout  $g, h \in G$

$$\begin{aligned}d_S(\phi(g), \phi(h)) &\leq Kd_S(g, h) + C \\d_S(g, h) &\leq Kd_S(\phi(g), \phi(h)) + C \\d_S(g, g) &\leq D \\d_S(\phi(g), \phi(g)) &\leq D.\end{aligned}$$

D'où  $\phi$  est une quasi-isométrie. □

## 6 Les surfaces

Cette section sert à définir les surfaces, à les classifier et à donner quelques résultats importants sur les surfaces.

**Définition 6.1.** On appelle une *surface* une variété lisse  $S$  de dimension 2.

**Exemple 6.2.** Le tore  $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  muni de la topologie quotient est une surface fermée, connexe et orientable.

**Théorème 6.3.** *Toute surface  $S$  admet une structure de CW-complexe.*

### 6.1 Les courbes fermées simples sur des surfaces

Soit  $S$  une surface orientée.

**Proposition 6.4.** *Soient  $p \in S$  un point de base et  $\alpha \in S$  une courbe fermée simple basée en  $p$ , alors  $[\alpha] \in \pi_1(S, p)$  est primitive.*

Par abus, on dit qu'une courbe fermée simple sur une surface est primitive.

On trouve une preuve de cette Proposition dans [BFDM]. Il s'agit de la Proposition 1.4.

**Définition 6.5.** Soient  $\alpha$  respectivement  $\beta$  une courbe fermée simple sur  $S$  ou un chemin dont les extrémités sont dans  $\partial S$ . Notons par  $a$  respectivement  $b$  la classe d'homotopie (relative aux extrémités de  $\alpha$  respectivement  $\beta$ ) de  $\alpha$  respectivement  $\beta$ . On appelle alors *nombre d'intersection géométrique entre  $a$  et  $b$*  le nombre minimal de points d'intersection entre les courbes fermées simples ou les chemins dont les extrémités sont dans  $\partial S$  choisies parmi tous les représentants de  $a$  et  $b$ . On le note

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta|, \alpha \in a, \beta \in b\}.$$

Par abus de notation, on écrit aussi  $i(\alpha, \beta)$  au lieu de  $i(a, b)$ .

**Définition 6.6.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des chemins orientés qui s'intersectent sur  $S$ . Alors l'*indice d'un point d'intersection* entre  $\alpha$  et  $\beta$  est  $+1$  si l'orientation de l'intersection est la même que celle de  $S$  et  $-1$  sinon.

**Définition 6.7.** Soient  $\alpha$  respectivement  $\beta$  une courbe fermée simple orientée sur  $S$  ou un chemin orientée dont les extrémités sont dans  $\partial S$  tel que  $\alpha$  et  $\beta$  s'intersectent. Le *nombre d'intersection algébrique entre  $\alpha$  et  $\beta$* , noté  $\hat{i}(\alpha, \beta)$  est la somme des indices des points d'intersection entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Définition 6.8.** On appelle une *chaîne sur  $S$*  une suite finie de courbes fermées simples orientées  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , qui vérifient pour tout  $1 \leq k \leq n-1$  que  $\hat{i}(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  ne dépend pas de  $k$ ,  $i(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1$  et  $i(\alpha_k, \alpha_j) = 0$  si  $|k-j| > 1$ .

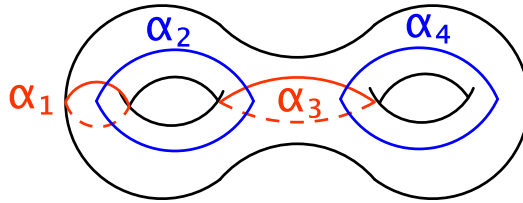


FIGURE 7 – Une chaîne de courbes fermées simples sur une surface

## 6.2 Coller et couper des surfaces

**Définition 6.9.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes, connexes,  $D_1 \subset S_1$ ,  $D_2 \subset S_2$  deux disques et  $\phi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  un difféomorphisme. Alors on appelle *somme connexe de  $S_1$  et  $S_2$*  et on note  $S_1 \#_\phi S_2$  la surface  $(S_1 \setminus D_1 \cup S_2 \setminus D_2) / \sim$

avec  $\sim$  la relation d'équivalence suivante

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x \in \partial S_1 \text{ et } y = \phi(x) \\ &\text{ou } x \in \partial S_2 \text{ et } x = \phi(y) \\ &\text{ou } x = y. \end{aligned}$$

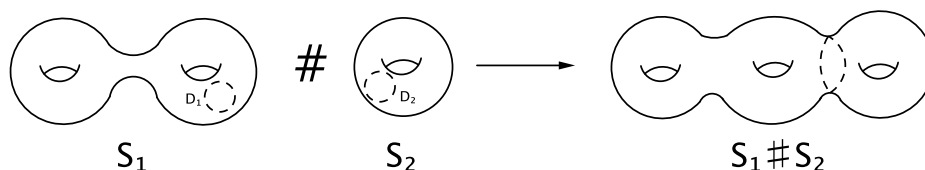


FIGURE 8 – La somme connexe de deux surfaces

La sphère est l'élément neutre pour cette opération.

**Proposition 6.10.** *Si  $\phi, \psi: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  sont des difféomorphismes, alors  $S_1 \#_\phi S_2$  est homéomorphe à  $S_1 \#_\psi S_2$*

On trouve une preuve de cette Proposition dans [WiTh] sur les pages 28 et 29.

**Définition 6.11.** Soient  $S$  une surface compacte, connexe et  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $S$  respectivement un chemin dont les extrémités sont dans  $\partial S$ . La surface obtenue en *couplant*  $S$  le long de  $\alpha$  est une surface compacte  $S_\alpha$  munie d'un homéomorphisme  $h$  entre deux composantes de bord respectivement deux intervalles  $I_1, I_2 \subset \partial S$  tel que

1.  $S_\alpha / (x \sim h(x))$  est homéomorphe à  $S$  et
2. l'application  $r_\alpha: S_\alpha \rightarrow S$  appliquée à ces deux composantes de bord respectivement ces deux intervalles donne  $\alpha$ .

*Remarque 6.12.* Soit  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $S$  respectivement un chemin dont les extrémités sont dans  $\partial S$ . Si  $\beta$  est une courbe fermée simple telle que  $i(\alpha, \beta) = 1$ , alors il existe un unique chemin sur  $S_\alpha$ , que l'on note  $\hat{\beta}$ , tel que l'image de  $r_\alpha(\hat{\beta}) = \beta$ .

**Définition 6.13.** Soient  $S$  une surface compacte, connexe et  $\alpha$  une courbe fermée simple sur  $S$  respectivement un chemin dont les extrémités sont dans  $\partial S$ . On dit que  $\alpha$  est *non-séparante* si  $S_\alpha$  est connexe.

**Lemme 6.14.** *Soient  $S$  une surface connexe et  $\alpha$  un chemin joignant deux composantes connexes distinctes du bord de  $S$ . Alors  $\alpha$  est non-séparant (i.e.  $S_\alpha$  est connexe).*

*Si  $\beta$  est une courbe fermée simple tel que  $i(\alpha, \beta) = 1$ , alors le chemin  $\widehat{\beta}$  joint une composante de bord de  $S_\alpha$  à elle-même.*

**Lemme 6.15.** *Soit  $S$  une surface connexe. Soit  $\alpha$  un chemin joignant une composante de bord à elle-même. Soit  $\beta$  une courbe fermée simple telle que  $i(\alpha, \beta) = 1$ . Alors  $\alpha$  est non-séparante et le chemin  $\widehat{\beta}$  joint deux composantes de bord distinctes de  $S_\alpha$ .*

**Proposition 6.16.** *Soient  $S$  une surface compacte, connexe et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une chaîne de courbes fermées simples sur  $S$ . Si  $n$  est pair, alors la chaîne est non-séparante.*

*Démonstration.* Supposons que  $n$  est pair, donc il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2k$ . Raisonnons par récurrence sur  $k$ .

Soit  $k = 1$ . Montrons que  $S_{\alpha_1, \alpha_2}$  est connexe et que  $\widehat{\alpha_3} \in S_{\alpha_1, \alpha_2}$  joint une composante de bord à elle-même.

Si  $\alpha_1$  est séparante, alors  $i(\alpha_1, \alpha_2)$  est pair. Or, par la Définition 6.8,  $i(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ .

Donc ce cas est à exclure. Donc  $\alpha_1$  est non-séparante. D'où  $S_{\alpha_1}$  est connexe et le chemin  $\widehat{\alpha_2} \in S_{\alpha_1}$  joint deux composantes connexes distinctes du bord de  $S_{\alpha_1}$  (ce sont les composantes, qui recollées, donnent  $\alpha_1$ ). Donc, d'après le Lemme 6.14,  $\widehat{\alpha_2}$  est non-séparant. D'où  $S_{\alpha_1, \alpha_2}$  est connexe.

De plus,  $\widehat{\alpha_3}$  joint une composante de bord de  $S_{\alpha_1, \alpha_2}$  à elle-même, d'après le Lemme 6.14.

Par hypothèse de récurrence, on peut alors supposer que  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}}$  est connexe, donc que la chaîne de courbes fermées simples  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2k})$  est non-séparante et que  $\widehat{\alpha_{2k+1}}$  joint une composante de bord de  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}}$  à elle-même. Par la Définition 6.8,  $\alpha_{2(k+1)}$  est une courbe fermée simple tel que  $i(\alpha_{2k+1}, \alpha_{2(k+1)}) = 1$ .

D'où par le Lemme 6.15,  $\widehat{\alpha_{2k+1}}$  est non-séparante, donc  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k+1}}$  est connexe et l'arc  $\widehat{\alpha_{2(k+1)}}$  joint deux composantes de bord distinctes de  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2k+1}}$ . Donc par le Lemme 6.14,  $\widehat{\alpha_{2(k+1)}}$  est non-séparante et donc  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2(k+1)}}$  est connexe.

De plus  $\widehat{\alpha_{2k+3}}$  joint une composante de bord à elle-même, d'après le Lemme 6.14.

D'où on peut conclure que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2k})$  est non-séparante pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### 6.3 La classification des surfaces

Le Théorème de la classification des surfaces est connu depuis le milieu du 19e siècle. Il est souvent attribué à Möbius, mais le cas des surfaces compactes a été démontré par Radò.

**Théorème 6.17.** *Toute surface fermée, connexe, orientable est homéomorphe à la somme connexe d'une sphère avec  $g$  tores, pour un certain  $g \in \mathbb{N}$ .*

On appelle  $g$  le *genre* de la surface et on note  $S_g$  toute surface fermée, connexe, orientable de genre  $g$ .

*Remarque 6.18.* Si  $g \geq 1$ , on peut supposer que le 0-squelette  $S_g^0$  est réduit à un point.

Grâce au Théorème 6.17 on peut aussi classer les surfaces compactes, c'est-à-dire des surfaces qui peuvent avoir un bord.

**Théorème 6.19.** *Toute surface compacte, connexe, orientable est obtenue à partir d'une surface fermée en lui retirant  $b$  disques ouverts dont les adhérences sont disjointes, pour un certain  $b \in \mathbb{N}$ .*

L'entier  $b$  est le *nombre de composantes connexes du bord* de la surface.

Finalement, nous pouvons aussi classer les surfaces non-compactes.

**Théorème 6.20.** *Toute surface connexe, orientable est obtenue à partir d'une surface compacte en lui retirant  $n$  points de son intérieur, pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .*

Ainsi toutes les surfaces connexes, orientables sont classées.

*Remarque 6.21.* Toutes les surfaces connexes sont connexes par arcs. Donc, d'après la Proposition 4.18, si on parle du groupe fondamental d'une surface connexe, il n'est pas nécessaire de préciser le point de base.

**Proposition 6.22.** *Soit  $(c_1, \dots, c_{2g})$  une chaîne de classes d'homotopie libre de courbes fermées simples sur  $S_g$ . Alors les  $c_k$  engendrent  $\pi_1(S_g)$ .*

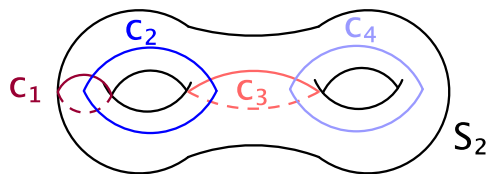


FIGURE 9 – Une chaîne de classes d'homotopie libre de courbes fermées simples sur  $S_2$



*Démonstration.* Soit  $p \in S_g$  un point de base. Considérons les courbes fermées simples  $\gamma_k$  basées en  $p$  représentées sur la figure ci-dessous. On voit bien que pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ ,  $c_k = [\gamma_k]$ .

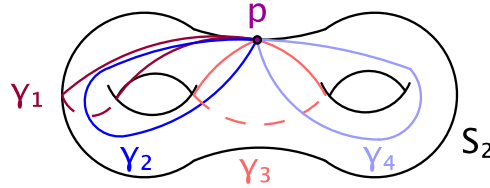


FIGURE 10 – Une chaîne de courbes fermées simples sur  $S_2$

Remarquons que le complémentaire de  $\bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k$  dans  $S_g$  est un disque. Soit  $q \in S_g$  tel que  $q \notin \bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k$ . Alors  $S_g \setminus q$  se rétracte sur  $\bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k$ , c'est-à-dire que, d'après la Définition 4.3, il existe une homotopie

$$H: S_g \setminus q \times [0, 1] \rightarrow \bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k$$

tel que

$$H|_{\bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k \times [0, 1]} = id_{\bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k}.$$

Soit  $\delta$  une courbe fermée simple sur  $S_g$  basée en  $p$ . On peut supposer que  $q \notin \delta$ . Alors  $\delta$  est homotope par  $H$  à un lacet de  $\bigcup_{k=1}^{2g} \gamma_k$ , c'est-à-dire que  $\delta$  est une concaténation de  $\gamma_k$ .

Donc  $[\delta] \in \pi_1(S_g)$  est la concaténation de  $[\gamma_k] = c_k$ , ce qui démontre que les  $c_k$  engendrent  $\pi_1(S_g)$ .  $\square$

## 6.4 La caractéristique d'Euler d'une surface

En appliquant la Définition 4.43 aux surfaces, on obtient la Définition suivante.

**Définition 6.23.** Soit  $S$  une surface, munie d'une structure de CW-complexe. La caractéristique d'Euler de  $S$  est donnée par

$$\chi(S) = b_0 - b_1 + b_2$$

avec  $b_0$  le nombre de points,  $b_1$  le nombre d'arêtes et  $b_2$  le nombre de faces de la surface  $S$ .

La caractéristique d'Euler nous permet d'énoncer le théorème de la classification des surfaces d'une autre façon.

**Théorème 6.24.** *Une surface compacte, connexe, orientable  $S$  est caractérisée, à homéomorphisme près, par sa caractéristique d'Euler et le nombre de composantes connexes de son bord.*

**Lemme 6.25.** *Soient  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert,  $p, q \in \mathbb{D}$ . Alors il existe un homéomorphisme  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  fixant le bord tel que  $\psi(p) = q$ .*

*Démonstration.* Soient  $p = re^{i\theta}$  et  $q = se^{i\phi}$  avec  $r, s \in ]0, 1[$  et  $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$ . Posons  $\Delta_{\phi-\theta}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire sur  $[0, r]$  et sur  $[r, 1]$  tel que

$$\begin{aligned}\Delta_{\phi-\theta}(0) &= 0 \\ \Delta_{\phi-\theta}(r) &= \phi - \theta \\ \Delta_{\phi-\theta}(1) &= 0\end{aligned}$$

et posons  $R_{r,s}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire par morceaux tel que

$$\begin{aligned}R_{r,s}(1) &= 1 \\ R_{r,s}(0) &= 0 \\ R_{r,s}(r) &= s.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ \rho e^{i\alpha} &\mapsto R_{r,s}(\rho) e^{i[\alpha + \Delta_{\phi-\theta}(\rho)]}\end{aligned}$$

est l'homéomorphisme cherché, car

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \psi(re^{i\theta}) \\ &= R_{r,s}(r) e^{i[\theta + \Delta_{\phi-\theta}(r)]} \\ &= s e^{i[\theta + \phi - \theta]} \\ &= s e^{i\phi} \\ &= q\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(e^{i\alpha}) &= R_{r,s}(1) e^{i[\alpha + \Delta_{\phi-\theta}(1)]} \\ &= 1 e^{i[\alpha + 0]} \\ &= e^{i\alpha}.\end{aligned}$$

Si  $p$  ou  $q$  est nulle, on considère un disque  $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$  tel que  $p$  et  $q$  ne sont pas au centre de ce disque. Ensuite on peut refaire le même raisonnement sur  $\mathbb{D}'$  et puis on étend l'homéomorphisme trouvé sur  $\mathbb{D}'$  par l'identité sur  $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}'$ .  $\square$

**Proposition 6.26.** *Soient  $S$  une surface compacte, connexe, orientable et  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes fermées simples, non-séparantes sur  $S$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h: S \rightarrow S$  tel que  $h(\alpha) = \beta$ . De plus, si  $p \in S \setminus \alpha \cap \beta$  on peut supposer que  $h$  fixe  $p$ .*

*Démonstration.* Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont non-séparantes,  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  sont connexes. De plus le nombre de composantes connexes du bord de  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  est le même, c'est celui de  $S$  augmenté de 2 et  $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta) = \chi(S)$ . Donc d'après le Théorème 6.24  $S_\alpha$  est homéomorphe à  $S_\beta$ .

Soient  $r_\alpha: S_\alpha \rightarrow S$  et  $r_\beta: S_\beta \rightarrow S$  les applications de recollement. Alors il existe un homéomorphisme  $h: S_\alpha \rightarrow S_\beta$  tel que si  $x, y \in S_\alpha$  tel que  $r_\alpha(x) = r_\alpha(y)$ , alors  $r_\beta(h(x)) = r_\beta(h(y))$ . Donc  $h$  induit un homéomorphisme  $\bar{h}: S \rightarrow S$  qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha & \xrightarrow{h} & S_\beta \\ r_\alpha \downarrow & & \downarrow r_\beta \\ S & \xrightarrow{\bar{h}} & S \end{array}$$

Par conséquent  $\bar{h}(\alpha) = \beta$ .

Si  $h$  ne fixe pas  $p$ , posons  $h(p) = q$  et soit  $U$  un ouvert de  $S \setminus \beta$  tel que  $p, q \in U$ . Identifions  $U$  au disque unité. Alors, d'après le Lemme 6.25, il existe un homéomorphisme  $\psi: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  qui envoie  $p$  sur  $q$  et qui fixe le bord de  $\bar{U}$ . Il suffit d'étendre cet homéomorphisme par l'identité sur  $S \setminus U$ . Alors l'homéomorphisme  $\psi^{-1} \circ h$  vérifient que

$$\psi^{-1} \circ h(p) = \psi^{-1}(q) = p$$

et

$$\psi^{-1} \circ h(\alpha) = \psi^{-1}(\beta) = \beta.$$

$\square$

**Proposition 6.27.** *Soient  $S$  une surface compacte, connexe, orientable et  $\alpha$  et  $\beta$  deux chemins ayant les mêmes extrémités. Alors il existe un homéomorphisme  $h: S \rightarrow S$  tel que  $h(\alpha) = \beta$  et  $h$  fixe les bords de  $S$  point par point.*

*Démonstration.* Commençons par montrer l'existence d'un tel homéomorphisme. La preuve est analogue à celle de la Proposition 6.26. Deux cas peuvent se produire. Soit les chemins joignent une composante de

bord à elle-même, soit elles joignent deux composantes de bords distinctes. Si  $\alpha$  et  $\beta$  joignent deux composantes de bord distinctes,  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  sont connexes, d'après le Lemme 6.14. De plus le nombre de composantes connexes du bord de  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  est le même, c'est celui de  $S$  diminué de 1. Et  $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta) = \chi(S) + 1$ . Donc, d'après le Théorème 6.24,  $S_\alpha$  est homéomorphe à  $S_\beta$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  joignent une composante de bord à elle-même,  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  sont connexes par le Lemme 6.15. De plus le nombre de composantes connexes du bord de  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  est le même, c'est celui de  $S$  augmenté de 1. Et  $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta) = \chi(S) - 1$ . Donc, d'après le Théorème 6.24,  $S_\alpha$  est homéomorphe à  $S_\beta$ .

Le construction de  $h \in \text{Homeo}(S)$  tel que  $h(\alpha) = \beta$  se fait ensuite exactement comme dans la preuve de la Proposition 6.26.

Reste à démontrer que  $h$  fixe les bords de  $S$  point par point.

S'il y a des composantes du bords qui n'ont aucun lien avec  $\alpha$  ou  $\beta$ , c'est clair qu'ils sont fixés par  $h$ . Concernant les composantes du bord qui sont reliées par  $\alpha$  ou  $\beta$  les seules points dont il faut se soucier sont les extrémités de  $\alpha$  et  $\beta$ , car  $f$  envoie les extrémités de  $\alpha$  sur les extrémités de  $\beta$ , mais comme on a supposé qu'ils sont identiques, ces points-là sont aussi fixés par  $f$ . Donc  $f$  fixe tous les bords de  $S$  point par point.  $\square$

**Lemme 6.28.** Soient  $\beta_0, \beta_1$  des courbes fermées simples sur une surface  $S$  orientable tel que  $i(\beta_0, \beta_1) = 1$  et  $\gamma$  tel que  $i(\beta_0, \gamma) = 1$ . Alors il existe  $h \in \text{Homeo}(S)$  tel que  $h(\beta_0) = \beta_0$ ,  $h(\beta_0) \cap h(\gamma) = \beta_0 \cap \beta_1$  et  $h$  est l'identité en dehors d'un voisinage de  $\beta_0$ .

*Démonstration.* Soit  $V$  un voisinage de  $\beta_0$  tel qu'on peut identifier  $V$  à  $S^1 \times ]-1, 1[$  et  $\beta_0$  à  $S^1 \times \{0\}$ . Alors on peut voir  $\gamma \cap V$  comme étant égale à  $\{e^{i\theta}\} \times ]-1, 1[$  et  $\beta_1 \cap \beta_0$  comme un point  $\{e^{i\psi}\} \times \{0\}$ .

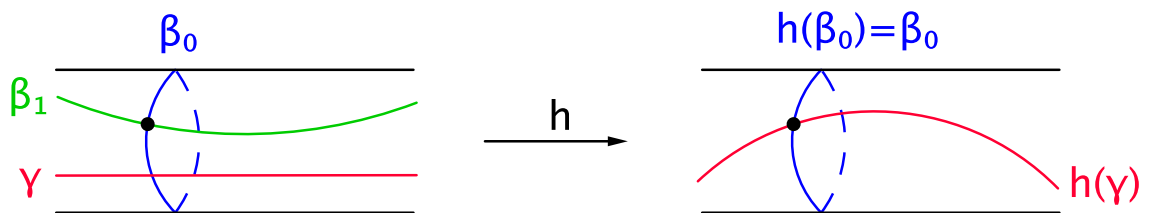


FIGURE 11 – L'homéomorphisme  $h$

L'application

$$h: S^1 \times ]-1, 1[ \rightarrow S^1 \times ]-1, 1[ \\ (e^{ix}, s) \mapsto (e^{i[(1-|s|)(\psi-\theta)+x]}, s)$$

est un homéomorphisme sur le voisinage  $V$ . Il suffit de l'étendre par l'identité sur  $S \setminus V$  pour obtenir l'homéomorphisme cherché. On a alors en effet

$$\begin{aligned} h(\beta_0) \cap h(\gamma) &:= h(e^{ix}, 0) \cap h(e^{i\theta}, s) && \text{avec } x \in S^1 \text{ et } s \in ]-1, 1[ \\ &= (e^{i[(\psi-\theta)+x]}, 0) \cap (e^{i[(1-|s|)(\psi-\theta)+\theta]}, s) \\ &= (e^{i[(\psi-\theta)+\theta]}, 0) && x = \theta \text{ et } s = 0 \text{ sont dans l'intersection} \\ &= (e^{i\psi}, 0) \\ &=: \beta_0 \cap \beta_1. \end{aligned}$$

□

**Théorème 6.29.** *Soient  $S$  une surface compacte, connexe,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  deux chaînes de courbes fermées simples, non-séparantes sur  $S$ . Alors il existe  $h \in \text{Homeo}(S)$  tel que  $h(\alpha_i) = \beta_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et on peut supposer que  $h$  fixe  $p \in S \setminus (\bigcup \alpha_i \cup \bigcup \beta_i)$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , il s'agit de la Proposition 6.26. Donc c'est démontré.

Par hypothèse de récurrence, il existe  $h \in \text{Homeo}(S)$  tel que  $h(\alpha_i) = \beta_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ . Notons  $\alpha'_n = h(\alpha_n)$ .

Comme  $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha'_n) = (h(\alpha_1), \dots, h(\alpha_{n-1}), h(\alpha_n))$  sont des chaînes, par le Lemme 6.28, on peut supposer que  $\beta_n$  et  $\alpha'_n$  intersectent  $\widehat{\beta_{n-1}}$  au même point. Comme ce sont des chaînes non-séparantes, les chemins  $\widehat{\beta_n}$  et  $\widehat{\alpha'_n}$  sont non-séparants sur la surface  $S_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$  et ont les mêmes extrémités. D'où, par la Proposition 6.27, il existe un homéomorphisme  $f: S_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}} \rightarrow S_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$  tel que  $f(\widehat{\alpha'_n}) = \widehat{\beta_n}$  qui fixe les bords de  $S_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$  point par point. Par conséquent,  $f$  induit un homéomorphisme  $\bar{f}: S \rightarrow S$  qui fixe  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  et tel que  $\bar{f}(\alpha'_n) = \beta_n$ . D'où pour tout  $1 \leq i \leq n$

$$\bar{f} \circ h(\alpha_i) = \beta_i.$$

Si  $\bar{f} \circ h$  ne fixe pas  $p$ , posons  $\bar{f} \circ h(p) = q$  et soit  $U$  un ouvert de  $S \setminus \bigcup \beta_i$  tel que  $p, q \in U$ . Identifions  $U$  au disque unité. Alors, d'après le Lemme 6.25, il existe un homéomorphisme  $\psi: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  qui envoie  $p$  sur  $q$  et qui fixe le bord de  $\bar{U}$ . Il suffit d'étendre cet homéomorphisme par l'identité sur  $S \setminus U$ . Alors l'homéomorphisme  $\psi^{-1} \circ \bar{f} \circ h$  vérifient que

$$\psi^{-1} \circ \bar{f} \circ h(p) = \psi^{-1}(q) = p$$

et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\psi^{-1} \circ \bar{f} \circ h(\alpha_i) = \psi^{-1}(\beta_i) = \beta_i.$$

□

## 7 Mapping Class Group étendu

Nous allons maintenant définir le *mapping class group étendu* et démontrer un cas particulier du Théorème de Dehn-Nielsen Baer.

Soit  $S$  une surface compacte, connexe, orientée. Considérons le groupe des homéomorphismes de  $S$  qui valent l'identité sur  $\partial S$  si  $\partial S \neq \emptyset$ , muni de la composition des applications. Notons-le  $\text{Homeo}(S)$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $S$  une surface compacte qui n'est ni un disque fermé, ni une couronne fermée. Soient  $f, g \in \text{Homeo}(S)$  homotopes, alors  $f$  et  $g$  sont isotopes.*

On trouve ce résultat dans [BFDM], il s'agit du Théorème 1.12.

**Définition 7.2.** Soit  $S$  une surface compacte, connexe, orientée, alors le *mapping class group étendu* de  $S$  est le groupe défini par

$$\begin{aligned} \text{Mod}^\pm(S) &= \pi_0(\text{Homeo}(S)) \\ &= (\text{Homeo}(S)) / \sim \end{aligned}$$

avec  $\sim$  la relation d'isotopie, muni de la composition des applications.

Donc deux éléments de  $\text{Homeo}(S)$  qui sont isotopes sont identifiés dans  $\text{Mod}^\pm(S)$ .

### 7.1 Le mapping class group étendu du tore

**Théorème 7.3.** *Le mapping class group étendu du tore, noté  $\text{Mod}^\pm(T^2)$  est isomorphe à  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .*

Démontrons ce théorème en plusieurs étapes.

### 7.1.1 L'homomorphisme de groupes $F: \text{Homeo}(T^2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$

Considérons l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} F: \text{Homeo}(M) &\rightarrow \text{Out}(\pi_1(M, p)) \\ \phi &\mapsto \{\phi_*^\gamma\} \end{aligned}$$

qu'on a défini dans la sous-section 4.3 pour tout espace topologique connexe pas arcs. On peut donc supposer que  $M = T^2$ , ce qui nous donne d'après la Remarque 4.34,

$$\begin{aligned} F: \text{Homeo}(T^2) &\rightarrow \text{Out}(\pi_1(T^2)) \\ \phi &\mapsto \{\phi_*^\gamma\}. \end{aligned}$$

Or, d'après le Théorème 4.33, on peut identifier  $\pi_1(T^2)$  à  $\mathbb{Z}^2$  par l'isomorphisme  $\Theta$  et comme  $\mathbb{Z}^2$  est abélien, par la Proposition 3.16,  $\text{Out}(\mathbb{Z}^2) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ . De plus, par le Corollaire 4.35, on peut munir  $\pi_1(T^2)$  de la base  $([p \circ \tilde{\alpha}], [p \circ \tilde{\beta}])$  qui sera identifiée à la base  $((1, 0), (0, 1))$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Ainsi on peut finalement identifier  $\text{Out}(\pi_1(T^2))$  à  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

Ainsi nous avons défini une application

$$\begin{aligned} F: \text{Homeo}(T^2) &\rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \phi &\mapsto \phi_*^\gamma. \end{aligned}$$

### 7.1.2 Surjectivité de $F$

Soit  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , donc  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1$ .

Posons

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto A \times u. \end{aligned}$$

Alors  $f_A \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ . Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2$  et  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  le revêtement donné dans l'Exemple 4.26. On remarque que si  $p(u) = p(v)$ , alors  $p(f_A(u)) = p(f_A(v))$ , car si  $p(u) = p(v)$ , alors il existe  $k \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $u = v + k$  et on a alors

$$\begin{aligned} f_A(u) &= A \times u \\ &= A \times (v + k) \\ &= A \times v + A \times k \\ &= A \times v + k' && \text{avec } k' \in \mathbb{Z}^2 \\ &= f_A(v) + k'. \end{aligned}$$

Donc  $p(f_A(u)) = p(f_A(v))$ . Par conséquent, il existe  $\overline{f_A}: T^2 \rightarrow T^2$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{R}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ T^2 & \xrightarrow{\overline{f_A}} & T^2 \end{array}$$

De plus  $f_A$  est inversible et son inverse est défini par

$$\begin{aligned} f_A^{-1}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto A^{-1} \times u. \end{aligned}$$

Donc  $f_A^{-1} \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  et par un raisonnement analogue on peut montrer qu'il existe  $\overline{f_A^{-1}}: T^2 \rightarrow T^2$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_A^{-1}} & \mathbb{R}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ T^2 & \xrightarrow{\overline{f_A^{-1}}} & T^2 \end{array}$$

Donc  $\overline{f_A}$  est inversible et donc bijective.

De plus  $f_A$  et  $p$  sont des homéomorphismes locaux, donc  $\overline{f_A}$  aussi. Comme  $\overline{f_A}$  est de plus bijective, il s'agit d'un homéomorphisme global. Donc  $\overline{f_A} \in \text{Homeo}(T^2)$ .

Reste à montrer que  $F(\overline{f_A}) := A$ .

D'après le Corollaire 4.35, on a à isomorphisme près

$$\begin{aligned} F(\overline{f_A})(1, 0) &= (\overline{f_A})_*(1, 0) \\ &= [\overline{f_A} \circ p \circ \tilde{\alpha}] \\ &= [p \circ f_A \circ \tilde{\alpha}] \\ &= f_A \circ \tilde{\alpha}(1) && \text{par le Théorème 4.33} \\ &= f_A(1, 0) \\ &= A \times (1, 0) \end{aligned}$$

et de même on trouve  $F(\overline{f_A})(0, 1) = A \times (0, 1)$ . Donc  $F(\overline{f_A}) := A$ . D'où  $F$  est surjective.



### 7.1.3 L'homomorphisme surjectif $\sigma: \text{Mod}^\pm(T^2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$

Considérons  $\phi, \phi' \in \text{Homeo}(T^2)$  isotopes. Alors, d'après ce qu'on a démontré dans la sous-section 4.3,  $F(\phi) = F(\phi')$ . Par conséquent,  $F$  induit l'application

$$\begin{aligned} \sigma: \text{Mod}^\pm(T^2) &\rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ [\phi] &\mapsto \phi_*^\gamma. \end{aligned}$$

Montrons que  $\sigma$  est aussi un homomorphisme de groupes. Soient  $[\phi], [\psi] \in \text{Mod}^\pm(T^2)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sigma([\phi] \circ [\psi]) &= \sigma([\phi \circ \psi]) \\ &= F(\phi \circ \psi) \\ &= F(\phi) \circ F(\psi) \quad \text{car } F \text{ est un homomorphisme de groupes} \\ &= \sigma([\phi]) \circ \sigma([\psi]). \end{aligned}$$

Comme  $F$  est surjective,  $\sigma$  l'est aussi.

### 7.1.4 Injectivité de $\sigma$

Reste à montrer que  $\sigma$  est injective. Soit  $\phi \in \text{Homeo}(T^2)$  tel que  $\sigma([\phi]) = id_{\text{GL}_2(\mathbb{Z})}$ . Montrons que  $[\phi] = [id_{T^2}]$ . Comme  $F(\phi) = \sigma([\phi])$ , on a

$$\begin{aligned} \phi_*^\gamma &= id_{\text{GL}_2(\mathbb{Z})} \\ \iff \Theta_\gamma \circ \phi_* &= id_{\text{GL}_2(\mathbb{Z})} \\ \iff \phi_* &= \Theta_{\bar{\gamma}} \quad \text{avec } \gamma \text{ un chemin entre } p \text{ et } \phi(p). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.48, il existe une application continue

$$\begin{aligned} \psi: T^2 &\rightarrow T^2 \\ p &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

homotope à l'identité tel que

$$\psi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}.$$

Donc

$$\psi_* = \phi_*.$$

D'après la Remarque 6.18, on peut supposer que  $(T^2)^0$  est réduit à un point et d'après le Théorème 6.3,  $T^2$  admet une structure de CW-complexe. De

plus, par l'Exemple 4.32,  $\mathbb{R}^2$  est le revêtement universel de  $T^2$  et comme  $\mathbb{R}^2$  est contractile, on peut appliquer la Proposition 4.41 qui nous donne que  $\phi \simeq \psi$ . Or  $\psi \simeq id$ , donc  $\phi \simeq id_{T^2}$ . D'où, par la Proposition 7.1,  $[\phi] = [id_{T^2}] \in \text{Mod}^\pm(T^2)$ .  
D'où l'injectivité.

Ainsi on a finalement montré que  $\sigma$  définit un isomorphisme de groupes entre  $\text{Mod}^\pm(T^2)$  et  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

## 8 Géométrie hyperbolique

Dans cette section nous allons introduire le plan hyperbolique avec son bord et ses isométries, nous allons définir les surfaces hyperboliques et énoncer beaucoup de résultats importants sur les surfaces hyperboliques, qu'il nous faut pour démontrer finalement dans la prochaine section le Théorème de Dehn-Nielsen-Baer.

### 8.1 Le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$

Il existe plusieurs modèles de représentations du plan hyperbolique.

#### 8.1.1 Le demi-plan de Poincaré

Dans ce modèle  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Munissons-le d'une métrique.

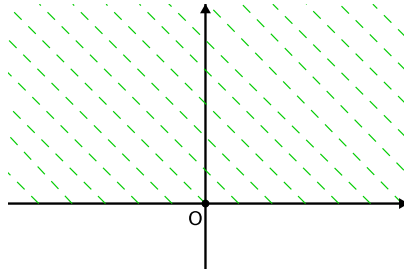


FIGURE 12 – Le demi-plan de Poincaré

**Définition 8.1.** Considérons dans  $\mathbb{H}^2$  la courbe paramétrée, de classe  $C^1$  par morceaux, donnée par l'application

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Alors on définit la *longueur hyperbolique* de  $\gamma$  dans le demi-plan de Poincaré par

$$\ell_{d-p}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt.$$

**Définition 8.2.** Soient  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ .

On pose

$$d_{d-p}(P, Q) = \inf_{\gamma} \ell_{d-p}(\gamma),$$

où  $\gamma$  décrit l'ensemble des courbes paramétrées,  $C^1$  par morceaux, reliant  $P$  à  $Q$  dans  $\mathbb{H}^2$ .

**Proposition 8.3.** L'application  $d_{d-p} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une métrique.

On en trouve une démonstration dans [CIJo].

L'espace métrique  $(\mathbb{H}^2, d_{d-p})$  s'appelle le *demi-plan de Poincaré*.

Dans ce modèle les géodésiques complètes sont les demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses et délimités par deux points de l'axe des abscisses (ce qui inclut des demi-droites verticales délimitées par l'axe des abscisses). On trouve un développement détaillé qui explique comment on aboutit à ce résultat dans [CIJo].

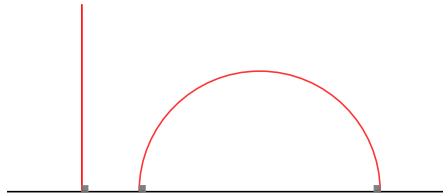


FIGURE 13 – Les géodésiques du demi-plan de Poincaré

### 8.1.2 Le disque de Poincaré

On construit ce modèle à partir du demi-plan de Poincaré, à l'aide de l'application

$$J: \{z \in \mathbb{C}: \text{Im}(z) > 0\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

$$z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}$$

On peut facilement vérifier que  $J$  est bien définie. De plus  $J$  est une bijection, dont l'application réciproque est donné par

$$J^{-1}: \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}: \text{Im}(z) > 0\}$$

$$z \mapsto \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

Dans ce modèle, en bijection avec le demi-plan de Poincaré,  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ .

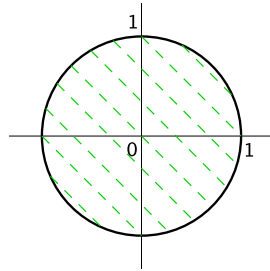


FIGURE 14 – Le disque de Poincaré

Pour le munir d'une métrique, on munit tout simplement le disque unité de la métrique induite par  $J$ , c'est-à-dire que pour tout  $P, Q \in \mathbb{H}^2$

$$d_{disc}(P, Q) = d_{d-p}(J^{-1}(P), J^{-1}(Q)).$$

L'espace métrique  $(\mathbb{H}^2, d_{disc})$  s'appelle le *disque de Poincaré*.

Dans ce modèle les géodésiques complètes sont les arcs de cercles qui rencontrent le disque unité perpendiculairement (ce qui inclut les diamètres du disque).

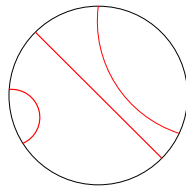


FIGURE 15 – Les géodésiques du disque de Poincaré

## 8.2 Le bord du plan hyperbolique

Notons  $d$  la distance hyperbolique lorsque ce n'est pas nécessaire de préciser le modèle de représentation.

**Définition 8.4.** Un *rayon géodésique* est l'image d'une isométrie  $\gamma: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{H}^2$ .

**Définition 8.5.** Le *bord du plan hyperbolique* est défini par

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{\text{rayons géodésiques}\} / \sim$$

avec  $\sim$  la relation d'équivalence suivante

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists D > 0 \text{ tel que } d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq D \forall t \geq 0.$$

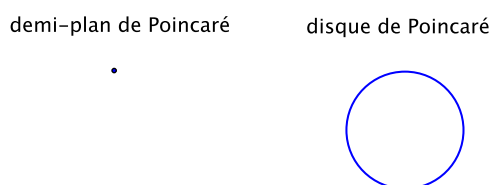


FIGURE 16 – Le bord du plan hyperbolique dans les différents modèles

Notons  $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ .

**Définition 8.6.** On appelle *demi-plan de  $\mathbb{H}^2$*  une composante connexe de  $\mathbb{H}^2 \setminus \gamma$  avec  $\gamma$  une géodésique dans  $\mathbb{H}^2$ .

**Définition 8.7.** Soit  $P \subset \mathbb{H}^2$  un demi-plan. On définit alors

$$U_P = \{[\gamma] \in \partial\mathbb{H}^2 \mid \exists T \geq 0 \text{ tel que } \gamma(t) \in P \forall t \geq T\}.$$

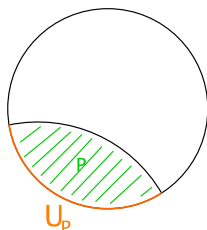


FIGURE 17 –  $U_P$  dans le modèle du disque de Poincaré

Un point de  $\partial\mathbb{H}^2$  est dans  $U_P$  si pour chaque rayon géodésique  $\gamma$  qui le représente il existe  $T \geq 0$  tel que  $\gamma(t) \in P$  pour tout  $t \geq T$ .

On munit  $\overline{\mathbb{H}^2}$  de la topologie induite par les ouverts de  $\mathbb{H}^2$  et les ensembles  $P \cup U_P$  avec  $P$  des demi-plans.

*Remarque 8.8.* Si  $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ , on peut remarquer que  $f$  envoie un rayon géodésique sur un rayon géodésique et que  $f$  préserve  $\sim$ . Ainsi on peut l'étendre à  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ .

Comme 2 points distincts de  $\partial\mathbb{H}^2$  définissent une unique géodésique dans  $\mathbb{H}^2$ ,  $\bar{f}$  envoie donc 2 points distincts sur 2 points distincts. Donc  $\bar{f}$  est injective.

**Proposition 8.9.**  $\bar{f}$  est un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

Il s'agit d'un résultat donné sur la page 20 de [BFDM].

### 8.3 Les isométries du plan hyperbolique

Notons par  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^2$  qui préservent l'orientation du plan hyperbolique muni de la composition des applications.

Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, on a le résultat suivant.

**Proposition 8.10.** *L'application*

$$\begin{aligned} \text{PSL}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left( z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

On trouve une démonstration de la Proposition 8.10 dans [CIJo], il s'agit de la Proposition 5.8.

Soient  $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  et l'application continue  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$  l'extension de  $f$ . Si on se place dans le modèle du disque de Poincaré,  $\bar{f}$  admet au moins un point fixe dans  $\overline{\mathbb{H}^2}$  par le théorème de Brouwer dans le plan :

**Théorème 8.11.** *Toute application  $f$  continue d'un disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

On en trouve une preuve dans [AlHat], il s'agit du Théorème 1.9.

On a alors la classification suivante :

1. Si  $\bar{f}$  a un seul point fixe et que ce point fixe est dans  $\mathbb{H}^2$ , on dit que  $f$  est *elliptique*. Dans ce cas, on montre facilement que  $f$  est représentée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $|a + d| < 2$ .
2. Si  $\bar{f}$  a un seul point fixe et que ce point fixe est dans  $\partial\mathbb{H}^2$ , on dit que  $f$  est *parabolique*. Dans ce cas, on montre facilement que  $f$  est représentée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $|a + d| = 2$ .
3. Si  $\bar{f}$  a deux points fixes et que ces deux points fixes sont dans  $\partial\mathbb{H}^2$ , on dit que  $f$  est *hyperbolique*. Dans ce cas, on montre facilement que  $f$  est représentée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $|a + d| > 2$ .

Il est facile de démontrer que chaque matrice  $A \neq I \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  représente selon sa trace une des fonctions  $\bar{f}$  cité ci-dessus. Ainsi, si  $\bar{f}$  a plus que deux points fixes dans  $\overline{\mathbb{H}^2}$ ,  $f = id_{\mathbb{H}^2}$ .

Si  $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  est hyperbolique, on note par  $(\mathrm{Ax}(f)(-\infty), \mathrm{Ax}(f)(+\infty)) \in \partial\mathbb{H}^2$  les 2 points fixes de  $\bar{f}$ .

**Définition 8.12.** Soit  $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  hyperbolique. On appelle l'*axe de  $f$*  et on note  $\mathrm{Ax}(f)$ , l'unique géodésique de  $\mathbb{H}^2$  qui joint les deux points  $\mathrm{Ax}(f)(-\infty)$  et  $\mathrm{Ax}(f)(+\infty)$ .

*Remarque 8.13.* L'isométrie  $f$  préserve  $\mathrm{Ax}(f)$  et l'application  $f|_{\mathrm{Ax}(f)}$  est une translation.

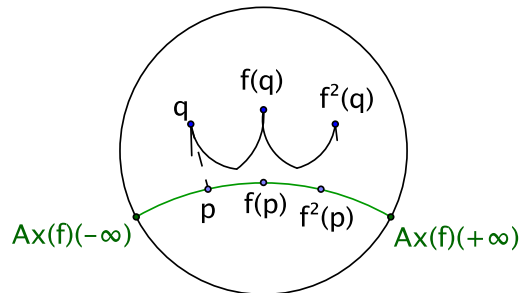


FIGURE 18 – Représentation de  $f^k(q)$

**Lemme 8.14.** Soit  $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  hyperbolique. Considérons  $\text{Ax}(f)$ . Alors pour tout  $q \in \mathbb{H}^2$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} f^k(q) = \text{Ax}(f)(\pm\infty).$$

*Démonstration.* Faisons le raisonnement pour  $+\infty$ . L'autre cas s'explique par un raisonnement analogue.

Soit  $\gamma$  une géodésique distincte de  $\text{Ax}(f)$ . Soit  $P$  le demi-plan défini par  $\gamma$  qui vérifie que l'ouvert  $P \cup U_P \subset \overline{\mathbb{H}^2}$  contient  $\text{Ax}(f)(+\infty)$ .

Si  $q \in \text{Ax}(f)$ , comme  $f$  agit par translation sur  $\text{Ax}(f)$ , il existe  $k_0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ ,  $f^k(q) \in P$ . De plus, pour tout  $R > 0$  il existe  $k_1 \geq k_0$  tel que pour tout  $k \geq k_1$   $d(f^k(q), \gamma) > R$ . D'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(q) = \text{Ax}(f)(+\infty).$$

Si  $q \notin \text{Ax}(f)$ , soit  $q' \in \text{Ax}(f)$ . Alors il existe à nouveau  $k_0$  et  $k_1 \geq k_0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ ,  $f^k(q') \in P$  et pour tout  $k \geq k_1$   $d(f^k(q'), \gamma) > d(q, q')$ . Donc pour tout  $k \geq k_1$   $d(f^k(q), f^k(q')) < d(f^k(q'), \gamma)$  et  $f^k(q) \in P$ . De plus, pour tout  $R > 0$  il existe  $k_2 \geq k_1$  tel que pour tout  $k \geq k_2$   $d(f^k(q), \gamma) > R$ . D'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(q) = \text{Ax}(f)(+\infty).$$

□

*Remarque 8.15.* La convergence se fait par rapport à la topologie définie sur  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

## 8.4 Surfaces hyperboliques

**Définition 8.16.** Une *surface hyperbolique* est un espace métrique  $(X, d)$ , connexe, muni d'un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  avec  $I$  un ensemble d'indice tel que pour tout  $i, j \in I$ ,  $U_i$  est un ouvert de  $X$ ,  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ , il existe  $V_i \subset \mathbb{H}^2$  ouvert tel que  $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$  est une isométrie et  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ .

**Théorème 8.17.** Soit  $S$  une surface connexe, orientée, caractérisée par  $g, b, n \in \mathbb{N}$ . Si  $g \geq 2$ , alors  $S$  peut être munie d'une métrique  $d$  telle que  $(S, d)$  est une surface hyperbolique.

Voici le théorème de Killing-Hopf.

**Théorème 8.18.** Si  $S$  est une surface hyperbolique, alors il existe une action du  $\pi_1(S)$  sur  $\mathbb{H}^2$  par isométrie, libre et proprement discontinue, telle que  $\mathbb{H}^2/\pi_1(S)$  est isométrique à  $S$ .



**Proposition 8.19.** *Si  $S$  est une surface hyperbolique, alors  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  est un revêtement universel.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 8.18 et la Proposition 4.23  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  est un revêtement. Comme de plus  $\mathbb{H}^2$  est connexe par arcs et  $\pi_1(\mathbb{H}^2) = 1$ ,  $\mathbb{H}^2$  est le revêtement universel de  $S$ .  $\square$

*Remarque 8.20.* La théorie des revêtements nous permet d'explicitier l'action du  $\pi_1(S_g)$  sur son revêtement universel :

Soient  $g \geq 2$ ,  $q$  un point de base dans  $S_g$  et  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement fixé. Soient  $x \in \mathbb{H}^2$  tel que  $p(x) = q$ ,  $[\gamma] \in \pi_1(S_g, q)$  et  $\tilde{\gamma}$  le relevé de  $\gamma$  par  $p$  qui existe d'après l'Exemple 4.29 et qui vérifie  $\tilde{\gamma}(0) = x$ . Alors, d'après la Remarque 4.30,  $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(q)$ . D'où on peut définir l'action du  $\pi_1(S_g, q)$  sur l'ensemble des relevés de  $q$  par  $p$  par

$$[\gamma] \times x = \tilde{\gamma}(1).$$

Pour étendre l'action du  $\pi_1(S_g, q)$  sur  $\mathbb{H}^2$  tout entier on applique la propriété du relèvement avec  $Z = \mathbb{H}^2$  et  $f = p$ . On a en effet, que  $p(x) = q = p([\gamma] \times x)$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{H}^2 & \\ & \nearrow F_\gamma & \downarrow p \\ \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{p} & S_g \end{array}$$

Donc il existe une unique application

$$\begin{aligned} F_\gamma: \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ x &\mapsto [\gamma] \times x \end{aligned}$$

avec  $[\gamma] \in \pi_1(S_g, p(x))$  telle que le diagramme commute, c'est-à-dire que  $p \circ F_\gamma = p$ .

L'action du  $\pi_1(S_g)$  sur  $\mathbb{H}^2$  est alors donnée par

$$[\gamma] \times y = F_\gamma(y)$$

avec  $[\gamma] \in \pi_1(S_g, p(y))$ .

*Remarque 8.21.* Si  $S$  est une surface hyperbolique et  $a \in \pi_1(S)$ , alors comme  $\pi_1(S)$  agit sur  $\mathbb{H}^2$  par isométries,  $a$  donne une isométrie  $f_a$  de  $\mathbb{H}^2$ .

**Définition 8.22.** Soient  $S$  une surface hyperbolique,  $a \in \pi_1(S)$  et  $f_a \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  l'isométrie donné par  $a$ . On dit que  $a$  est un *élément hyperbolique* si  $f_a$  est hyperbolique.

**Lemme 8.23.** *Si  $S$  est une surface hyperbolique compacte, alors tous les éléments non triviaux de  $\pi_1(S)$  sont hyperboliques.*

**Définition 8.24.** Soient  $S$  une surface hyperbolique compacte et  $a \in \pi_1(S)$  non-trivial. On définit l'axe de  $a$  par  $\text{Ax}(a) := \text{Ax}(f_a)$ .

Soient maintenant  $S$  une surface hyperbolique compacte,  $x \in S$  un point de base,  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  un revêtement,  $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ ,  $a = [\alpha] \in \pi_1(S_g, x)$  non-trivial,  $\tilde{\alpha}$  le relevé de  $\alpha$  en  $\tilde{x}$  donné dans l'Exemple 4.29 et  $f$  l'isométrie de  $\mathbb{H}^2$  associée à  $a$  par la Remarque 8.21.

*Remarque 8.25.* Alors  $f^k(\tilde{\alpha})$  relie  $f^k(\tilde{x})$  à  $f^{k+1}(\tilde{x})$ .

On note  $a^k \times \tilde{\alpha} := f^k(\tilde{\alpha})$  et  $a^k \times \tilde{x} := f^k(\tilde{x})$ .

**Définition 8.26.** Définissons la concaténation des  $a^k \times \tilde{\alpha}$  par

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^\infty: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\mapsto a^{\lfloor t \rfloor} \times \tilde{\alpha}(t - \lfloor t \rfloor). \end{aligned}$$

*Remarque 8.27.* La concaténation des  $a^k \times \tilde{\alpha}$  est  $C^1$  par morceaux et  $p(\tilde{\alpha}^\infty) = \alpha$ .

**Lemme 8.28.**

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{\alpha}^\infty(t) = \text{Ax}(a)(\pm\infty).$$

Identifions maintenant  $\text{Ax}(a)$  à  $\mathbb{R}$  par isométrie. Alors  $\langle a \rangle$  est identifié à  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} =: S^1$  le revêtement donné dans l'Exemple 4.24. Alors, par la même isométrie, on peut supposer que  $\rho: \text{Ax}(a) \rightarrow \text{Ax}(a)/\langle a \rangle$ .

**Lemme 8.29.** L'application  $p|_{\text{Ax}(a)}$  se factorise en

$$p|_{\text{Ax}(a)} = \alpha_0 \circ \rho$$

avec  $\text{Ax}(a) \xrightarrow{\rho} \text{Ax}(a)/\langle a \rangle \simeq S^1 \xrightarrow{\alpha_0} S$  et  $[\alpha_0] = a$ .

*Remarque 8.30.* L'image de  $\text{Ax}(a)$  par  $p$  "s'enroule" autour d'une courbe fermée  $\alpha_0$  qui représente  $a$ .

**Définition 8.31.** On appelle  $\alpha_0$  représentant géodésique de  $a$ .

**Lemme 8.32.** Soient  $a \in \pi_1(S)$  une classe d'homotopie de courbes fermées simples,  $y \in \text{Ax}(a)$  et  $g \in \pi_1(S)$ . Alors si  $g \times y \in \text{Ax}(a)$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $g = a^k$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $g \times y$  n'est pas dans l'orbite de  $y$  par  $\langle a \rangle$ . Alors  $\rho(g \times y) \neq \rho(y)$ . Mais

$$\begin{aligned}\alpha_0 \circ \rho(g \times y) &= p(g \times y) \\ &= p(y) \\ &= \alpha_0 \circ \rho(y).\end{aligned}$$

Donc  $\alpha_0$  n'est pas injective, ce qui est contradictoire au fait que  $[\alpha_0] = a$  qui est une classe d'homotopie de courbes fermées simples.  $\square$

**Définition 8.33.** Soient  $S$  une surface hyperbolique compacte,  $a, b \in \pi_1(S)$  non-triviaux. On dit que  $a$  et  $b$  sont *liés à l'infini* si  $Ax(a) \cap Ax(b)$  est réduit à un point de  $\mathbb{H}^2$ .

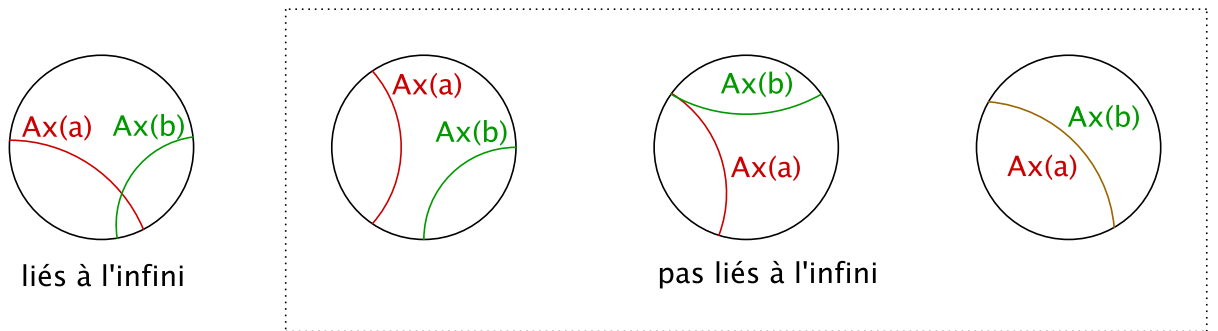


FIGURE 19 – être lié à l'infini

**Lemme 8.34.** Soient  $g \geq 2$ ,  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement fixé,  $\phi \in \text{Aut}(\pi_1(S_g))$  et  $a, b \in \pi_1(S_g)$  non-triviaux. Alors  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  sont liés à l'infini si et seulement si  $a$  et  $b$  sont liés à l'infini.

*Démonstration.* Comme  $\phi$  est inversible, il suffit de démontrer une implication. L'autre sera exactement pareil en raisonnant avec  $\phi^{-1}$ .

D'après le corollaire 5.10,  $\phi$  est une quasi-isométrie de  $\pi_1(S_g)$  sur lui-même. Soit  $x_0 \in \mathbb{H}^2$ , on définit l'orbite de  $x_0$  par

$$\text{Orb}(x_0) = \{g \times x_0, g \in \pi_1(S_g)\}.$$

D'après le Théorème 5.7, l'application  $g \mapsto g \times x_0$  est une quasi-isométrie

$\pi_1(S_g) \rightarrow \text{Orb}(x_0)$ .

Ceci nous permet de voir  $\phi$  comme une quasi-isométrie de  $\text{Orb}(x_0)$  sur elle-même de constantes  $K, C$  et  $D$ , avec  $D$  le diamètre d'un domaine fondamental fixé de l'action du  $\pi_1(S_g)$  sur  $\mathbb{H}^2$ .

Supposons que  $a$  et  $b$  ne sont pas liés à l'infini et montrons que  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  ne sont pas liés à l'infini.

Si  $a$  et  $b$  ne sont pas liés à l'infini, alors par la Définition 8.33,  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{H}^2$ . D'où il y a trois possibilités.

1.  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  n'ont pas de point commun sur  $\partial\mathbb{H}^2$
2.  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  ont exactement un point commun sur  $\partial\mathbb{H}^2$
3.  $\text{Ax}(a) = \text{Ax}(b)$

1. Soit  $R > 0$ .

Considérons l'ensemble

$$O_a = \{a^k \times x_0, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Notons  $x_a$  le projeté de  $x_0$  sur  $\text{Ax}(a)$ ,  $x_b$  le projeté de  $x_0$  sur  $\text{Ax}(b)$ ,  $d_a = d(x_0, x_a)$  et  $d_b = d(x_0, x_b)$ .

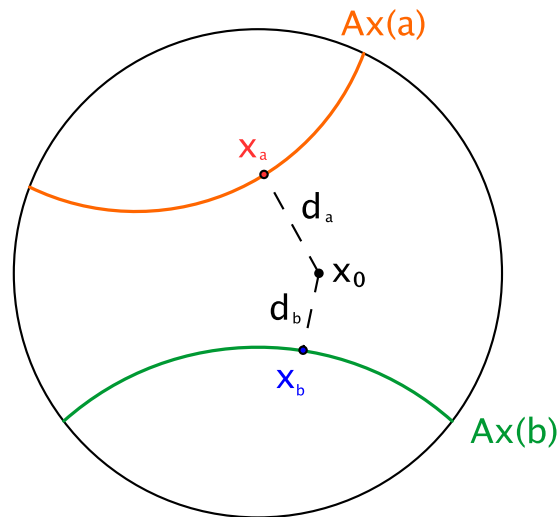


FIGURE 20 – Les projetés  $x_a$  et  $x_b$  et les distances  $d_a$  et  $d_b$

Posons  $R' = R + d_a + d_b$ .

Comme on a supposé que  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  n'ont pas de point commun

à l'infini, ils ne sont pas à une distance bornée l'un de l'autre.  
Donc il existe  $M_{R'}$  tel que si  $y \in \text{Ax}(b)$  et

$$d(y, x_b) > M_{R'},$$

alors

$$d(y, \text{Ax}(a)) > R'.$$

Donc pour  $N$  assez grand pour que

$$d((b^N)^k \times x_b, x_b) > M_{R'}$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on a

$$d((b^N)^k \times x_b, \text{Ax}(a)) > R'.$$

Donc pour tout  $k' \in \mathbb{Z}$ ,

$$d((b^N)^k \times x_b, a^{k'} \times x_a) > R'.$$

D'où

$$\begin{aligned} & d((b^N)^k \times x_0, a^{k'} \times x_0) \\ & \geq d((b^N)^k \times x_b, a^{k'} \times x_a) - d((b^N)^k \times x_0, (b^N)^k \times x_b) - d(a^{k'} \times x_0, a^{k'} \times x_a) \\ & > R' - d_a - d_b \\ & = R. \end{aligned}$$

Ainsi on a montré qu'il existe  $N$  dépendant de  $R$  tel que chaque élément de l'ensemble

$$O_{b^N} = \{(b^N)^k \times x_0, k \in \mathbb{Z}^*\}$$

est à une distance au moins  $R$  de chaque élément de  $O_a$ .

Posons

$$V_R(\text{Ax}(a)) = \{y \in \mathbb{H}^2 \text{ tel que } d(y, \text{Ax}(a)) \leq R\}.$$

Si  $R > d_b$ , on a alors de plus que tous les points de  $O_{b^N}$  sont dans la même composante connexe de  $\mathbb{H}^2 \setminus V_R(\text{Ax}(a))$ .

Soit  $\Delta$  un domaine fondamental de l'action du  $\pi_1(S_g)$  sur  $\mathbb{H}^2$  ( $\Delta$  est compact). Posons

$$\tilde{V}_R(\text{Ax}(a)) = \bigcup_{d(g \times \Delta, \text{Ax}(a)) < R} g \times \Delta.$$

Alors  $\tilde{V}_R(\text{Ax}(a)) \subset V_{R+D}(\text{Ax}(a))$ .

Donc, quitte à prendre  $N$  tel que les points de  $O_{b^N}$  satisfont  $d(y, \text{Ax}(a)) > R + D$  si  $R > d_b$ , tous les points de  $O_{b^N}$  sont dans la même composante connexe de  $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{V}_R(\text{Ax}(a))$ .

Ceci nous permet de relier les points de  $O_{b^N}$  par des chemins géodésiques par morceaux contenus dans cette composante connexe tel que chaque segment géodésique relie des points  $\beta_i \in \text{Orb}(x_0)$  tel que pour tout  $i$ ,

(a)  $O_{b^N} \subset \{\beta_i\}$

(b)  $d(\beta_i, \beta_{i+1}) \leq 2D$

(c)  $d(\beta_i, \text{Ax}(b))$  est bornée

(d)  $d(\beta_i, \text{Ax}(a)) > R$ .

D'une manière analogue, on relie les points de  $O_a$ . Notons  $\{\alpha_i\}$  les sommets de ce chemin géodésique par morceaux. On a alors pour tout  $i$ ,

(a)  $O_a \subset \{\alpha_i\}$

(b)  $d(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \leq 2D$

(c)  $d(\alpha_i, \text{Ax}(a))$  est bornée

(d)  $d(\alpha_i, \text{Ax}(b)) > R$ .

En particulier, on a pour tout  $i, j$  que

$$d(\alpha_i, \beta_j) > R.$$

Appliquons ensuite  $\phi$  aux  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Par la Définition 5.6, on a pour tout  $i, j$

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha_i), \phi(\alpha_{i+1})) &\leq K \times d(\alpha_i, \alpha_{i+1}) + C \\ &< 2KD + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\phi(\beta_i), \phi(\beta_{i+1})) &\leq K \times d(\beta_i, \beta_{i+1}) + C \\ &< 2KD + C \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\alpha_i, \beta_j) &\leq K \times d(\phi(\alpha_i), \phi(\beta_j)) + C \\ \iff d(\phi(\alpha_i), \phi(\beta_j)) &\geq \frac{1}{K}(d(\alpha_i, \beta_j) - C) \\ \iff d(\phi(\alpha_i), \phi(\beta_j)) &> \frac{1}{K}(R - C). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  sont liés à l'infini et montrons qu'il y a une contradiction.

Si  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  sont liés à l'infini, alors d'après la Définition 8.33,  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  s'intersectent. Donc les chemins géodésiques par morceaux  $\{\phi(\alpha_i)\}$  et  $\{\phi(\beta_i)\}$  se croisent. Donc il existe  $i, j$  tel que les segments géodésiques  $[\phi(\alpha_i), \phi(\alpha_{i+1})]$  et  $[\phi(\beta_j), \phi(\beta_{j+1})]$  ont un point commun. Donc comme

$$d(\phi(\alpha_i), \phi(\alpha_{i+1})) < 2KD + C$$

et

$$d(\phi(\beta_j), \phi(\beta_{j+1})) < 2KD + C,$$

il existe  $n \in \{i, i + 1\}$  et  $m \in \{j, j + 1\}$  tel que

$$d(\phi(\alpha_n), \phi(\beta_m)) < 2KD + C.$$

Or on a montré que

$$d(\phi(\alpha_n), \phi(\beta_m)) > \frac{1}{K}(R - C).$$

Donc il faut que

$$\frac{1}{K}(R - C) < 2KD + C.$$

Or on a choisi  $R > 0$  quelconque. D'où la contradiction.

Donc  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  ne sont pas liés à l'infini.

2. Considérons les ensembles

$$O'_a = \{a^k \times x_0, k \in \mathbb{Z}\}$$

et

$$O'_b = \{b^k \times x_0, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  tendent vers un même point, on peut fixer l'orientation des axes tel que pour tout  $\epsilon$  il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq m$  et pour tout  $l \geq n$ ,

$$d(a^k \times x_0, b^l \times x_0) < \epsilon.$$

Comme  $\phi$  est une quasi-isométrie de  $\text{Orb}(x_0)$  sur elle-même de constantes  $K, C$  et  $D$ , et que  $O'_a, O'_b \subset \text{Orb}(x_0)$ , on a alors

$$\begin{aligned} d(\phi(a^k \times x_0), \phi(b^l \times x_0)) &\leq K \times d(a^k \times x_0, b^l \times x_0) + C \\ &< K\epsilon + C \\ &= \epsilon' \end{aligned}$$

Donc  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  ont un point commun sur  $\partial\mathbb{H}^2$ . D'où soit  $\text{Ax}(\phi(a)) = \text{Ax}(\phi(b))$ , soit il ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{H}^2$ .

Si  $\text{Ax}(\phi(a)) = \text{Ax}(\phi(b))$ , alors  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  ne sont pas liés à l'infini et si  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{H}^2$ , d'après la Définition 8.33,  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  ne sont pas non plus liés à l'infini.

3. Ici  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  ont deux points communs sur  $\partial\mathbb{H}^2$ . Donc, par un raisonnement analogue à celui ci-dessus,  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  ont aussi deux points communs sur  $\partial\mathbb{H}^2$  et donc  $\text{Ax}(\phi(a)) = \text{Ax}(\phi(b))$ . D'où,  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  ne sont pas liés à l'infini.

Donc on a finalement montré par contraposée que si  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$  sont liés à l'infini, alors  $a$  et  $b$  sont liés à l'infini, ce qui termine la preuve.  $\square$

**Théorème 8.35.** *Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts de  $\partial\mathbb{H}^2$  et  $g \geq 2$ . Alors il existe  $a \in \pi_1(S_g)$  non-trivial tel que  $\text{Ax}(a)$  joint un point de  $U_1$  à un point de  $U_2$ .*

Ce Théorème est une conséquence du Lemme 4.1.2 de [FrLa].

**Corollaire 8.36.** *Soient  $g \geq 2$ ,  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement fixé,  $\phi \in \text{Aut}(\pi_1(S_g))$  et  $a, b, c \in \pi_1(S_g)$  des éléments non-triviaux tel que  $\text{Ax}(a), \text{Ax}(b)$  et  $\text{Ax}(c)$  soient disjoints. Alors  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  sont du même côté de  $\text{Ax}(\phi(c))$  si et seulement si  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  sont du même côté de  $\text{Ax}(c)$ .*

*Démonstration.*  $\text{Ax}(a)$  et  $\text{Ax}(b)$  sont du même côté de  $\text{Ax}(c)$  si et seulement s'il existe  $d \in \pi_1(S_g)$  tel que  $d$  est lié à l'infini avec  $a$  et  $b$ , mais pas avec  $c$  (un tel  $d$  existe d'après le Théorème 8.35). Par le Lemme 8.34, ceci est équivalent au fait que  $\phi(d)$  est lié à l'infini avec  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$ , mais pas avec  $\phi(c)$ , ce qui équivaut à dire que  $\text{Ax}(\phi(a))$  et  $\text{Ax}(\phi(b))$  sont du même côté de  $\text{Ax}(\phi(c))$ .  $\square$

**Lemme 8.37.** *Soient  $g \geq 2$ ,  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement fixé et  $a, b \in \pi_1(S_g)$  des éléments non-triviaux. Alors  $\text{Ax}(aba^{-1}) = a \times \text{Ax}(b)$ .*



*Démonstration.* Soient  $x, y \in \partial\mathbb{H}^2$  des points fixés par  $b$ . Alors

$$\begin{aligned} aba^{-1}(a \times x) &= ab \times x \\ &= a \times x \\ \text{et } aba^{-1}(a \times y) &= ab \times y \\ &= a \times y. \end{aligned}$$

Donc les points  $a \times x, a \times y \in \partial\mathbb{H}^2$  sont fixés par  $aba^{-1}$ . Par conséquent,  $Ax(aba^{-1})$  est la géodésique entre  $a \times x$  et  $a \times y$ . Comme deux points distincts définissent une unique géodésique,  $Ax(aba^{-1}) = a \times Ax(b)$ .  $\square$

**Proposition 8.38.** *Une classe de conjugaison  $A$  d'un élément primitif de  $\pi_1(S_g)$  a un représentant simple si et seulement si il n'existe pas de  $a_1, a_2 \in \pi_1(S_g)$  tel que  $\{a_1\} = \{a_2\} = A$  et  $a_1$  est lié à l'infini avec  $a_2$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde.

Soit  $A$  une classe de conjugaison d'un élément primitif qui a un représentant simple. Supposons qu'il existe  $a$  et  $hah^{-1}$  tel que  $\{a\} = \{hah^{-1}\} = A$  qui sont liés à l'infini, c'est-à-dire que  $Ax(a)$  et  $Ax(hah^{-1}) = hAx(a)$  s'intersectent. Considérons  $\tilde{\alpha}^\infty$  et  $h\tilde{\alpha}^\infty$ . Alors

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{\alpha}^\infty(t) = Ax(a)(\pm\infty)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h\tilde{\alpha}^\infty(t) = hAx(a)(\pm\infty) = Ax(hah^{-1})(\pm\infty).$$

Donc les deux chemins infinis  $\tilde{\alpha}^\infty$  et  $h\tilde{\alpha}^\infty$  se croisent au moins une fois. Notons par  $\tilde{y}$  un point d'intersection.

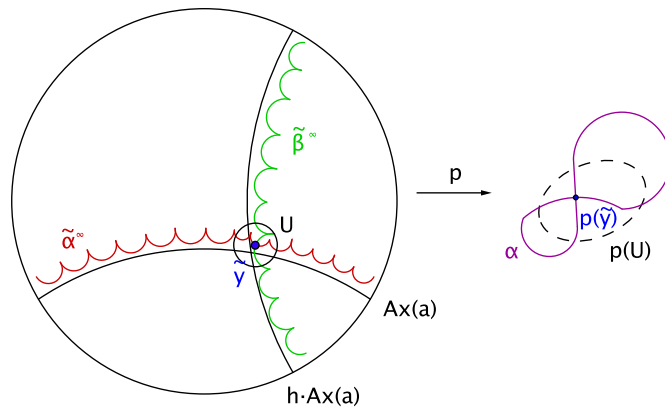


FIGURE 21 – Le sens direct de la Proposition 8.38

Soit  $U$  un voisinage assez petit autour de  $\tilde{y}$  et  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement. Alors  $p|_U$  est un homéomorphisme sur son image. Or  $p(\tilde{\alpha}^\infty) = \alpha = p(h\tilde{\alpha}^\infty)$  et donc  $\alpha$  s'intersecte elle-même en  $p(\tilde{y})$ . D'où  $\alpha$  n'est pas une courbe simple, ce qui donne une contradiction.

Ensuite on part de l'hypothèse qu'il n'existe pas d'éléments conjugués dans  $A$  qui sont liés à l'infini et nous supposons que  $A$  n'admet pas de représentant simple, c'est-à-dire que tout représentant  $\alpha$  tel que  $\{[\alpha]\} = \{a\} = A$  s'intersecte lui-même. Donc, en particulier, son représentant géodésique  $\alpha_0$  n'est pas simple. Donc, comme  $a$  est primitif, il existe  $y \in \alpha_0$  et un voisinage  $U$  de  $y$  tel que  $\alpha_0 \cap U$  n'est pas un segment.

Soit  $\tilde{y}$  un relevé de  $y$  sur  $Ax(a)$  et  $V = p^{-1}(U)$ . On peut supposer que  $p|_V: V \rightarrow U$  est un homéomorphisme. Alors  $V$  contient deux segments géodésiques distincts  $I$  et  $J$  tels que  $\tilde{y} \in I \cap J$  et  $p(I), p(J) \subset \alpha_0$ . Donc, il existe  $h \in \pi_1(S_g)$  tel que  $hJ \subset Ax(a)$ , ce qui implique que  $J \subset h^{-1}Ax(a) = Ax(h^{-1}ah)$ . Par conséquent  $a$  et  $h^{-1}ah$  sont liés à l'infini. Donc on a trouvé des éléments conjugués qui sont liés à l'infini, ce qui est contradictoire à l'hypothèse.

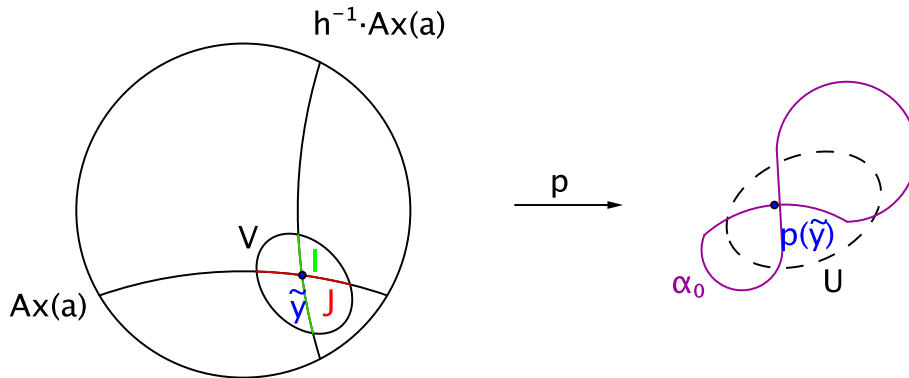


FIGURE 22 – Le sens réciproque de la Proposition 8.38

□

**Proposition 8.39.** Soient  $A, B$  des classes de conjugaison de classes d'homotopie de courbes fermées simples sur  $S_g$ . Alors  $i(A, B) = 0$  si et seulement s'il n'existe pas de représentants  $a, b \in \pi_1(S_g)$  de  $A$  et  $B$ , tel que  $a$  et  $b$  sont liés à l'infini.

*Démonstration.* Raisonnons par contraposée.

Supposons qu'il existe des représentants  $a, b \in \pi_1(S_g)$  tel que  $a$  et  $b$  sont liés

à l'infini, c'est-à-dire que  $Ax(a)$  et  $Ax(b)$  s'intersectent. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des représentants de  $a$  et  $b$ . Considérons les chemins  $\tilde{\alpha}^\infty$  et  $\tilde{\beta}^\infty$ . On a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\tilde{\alpha}^\infty(t)) = Ax(a)(\pm\infty)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\tilde{\beta}^\infty(t)) = Ax(b)(\pm\infty).$$

Donc ces deux chemins s'intersectent au moins une fois. Notons  $\tilde{y}$  un point d'intersection.

Soit  $U$  un voisinage assez petit autour de  $\tilde{y}$  et  $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$  un revêtement. Alors  $p|_U$  est un homéomorphisme sur son image.

Or  $p(\tilde{\alpha}^\infty) = \alpha$  et  $p(\tilde{\beta}^\infty) = \beta$ , donc  $\alpha$  et  $\beta$  s'intersectent en  $p(\tilde{y})$ .

Comme on a pris des représentants quelconques de  $a$  et  $b$ , on a montré que  $i(A, B) > 0$ .

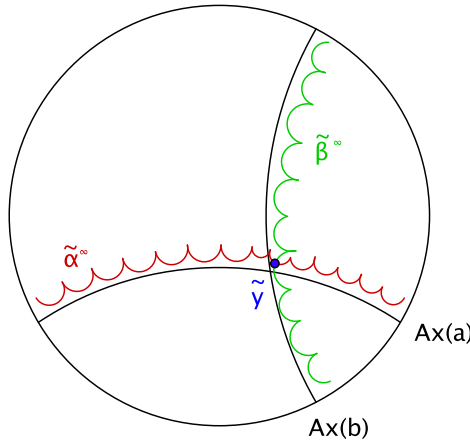


FIGURE 23 – Le sens direct de la Proposition 8.39

Pour la réciproque, supposons que  $i(A, B) > 0$ . Alors, en particulier, les représentants géodésiques  $\alpha_0 = p(Ax(a))$  et  $\beta_0 = p(Ax(b))$  s'intersectent en un point  $y$ . On peut donc trouver deux relevés  $hAx(a) = Ax(hah^{-1})$  et  $gAx(b) = Ax(gbg^{-1})$  de  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  qui s'intersectent. Donc  $hah^{-1}$  et  $gbg^{-1}$  sont liés à l'infini.  $\square$

**Proposition 8.40.** *Soient  $A, B$  des classes de conjugaison de classes d'homotopie de courbes fermées simples sur  $S_g$ . Alors  $i(A, B) = 1$  si et seulement si pour un certain représentant  $a$  de  $A$  et un représentant fixé  $b$  de  $B$  qui sont liés à l'infini, l'ensemble des représentants de  $A$  qui sont lié avec  $b$  à l'infini est donné par  $\{b^l a b^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord la réciproque.

Soit  $b$  un représentant de  $B$  fixé et  $a$  un représentant de  $A$  lié à l'infini avec  $b$ . Supposons que l'ensemble des représentants de  $A$  qui sont liés à l'infini avec  $b$  est de la forme  $\{b^l a b^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ . Comme  $a$  appartient à cet ensemble, on sait qu'il n'est pas vide et donc  $i(A, B) \neq 0$ , d'après la Proposition 8.39.

Comme  $a$  et  $b$  sont liés à l'infini, il existe  $\tilde{y} \in \mathbb{H}^2$  tel que  $\text{Ax}(a) \cap \text{Ax}(b) = \{\tilde{y}\}$ . Donc  $y = p(\tilde{y}) \in \alpha_0 \cap \beta_0$ . On montre maintenant que  $\alpha_0 \cap \beta_0 = \{y\}$ .

Soit  $z \in \alpha_0 \cap \beta_0$ . Il existe donc un relevé  $g \text{Ax}(a) = \text{Ax}(g a g^{-1})$  de  $\alpha_0$  qui intersecte  $\text{Ax}(b)$  en  $\tilde{z}$  avec  $p(\tilde{z}) = z$ . Donc  $g a g^{-1}$  est liée à l'infini avec  $b$ . D'où, par hypothèse, il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $g a g^{-1} = b^l a b^{-l}$ .

Mais  $\text{Ax}(b^l a b^{-l}) \cap \text{Ax}(b) = b^l \text{Ax}(a) \cap \text{Ax}(b) = b^l \tilde{y}$  et  $p(b^l \tilde{y}) = p(\tilde{y}) = y$ . Or on a supposé que  $\text{Ax}(g a g^{-1}) \cap \text{Ax}(b) = \tilde{z}$ . Donc on a montré que  $y = z$ .

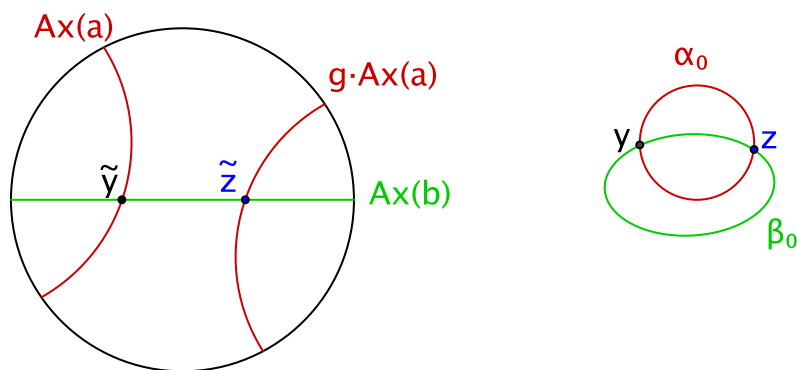


FIGURE 24 – Le sens réciproque de la Proposition 8.40

Montrons ensuite l'implication directe. Supposons donc que  $i(A, B) = 1$ . Alors, comme  $i(A, B) \neq 0$ , d'après la Proposition 8.39, il existe des représentants  $a$  et  $b$  de  $A$  et  $B$  qui sont liés à l'infini. Notons  $\tilde{y} = \text{Ax}(a) \cap \text{Ax}(b)$  et  $y = p(\tilde{y}) = \alpha_0 \cap \beta_0$ .

Soit  $a'$  un représentant de  $A$  lié à l'infini avec  $b$ , alors il existe  $g \in \pi_1(S_g)$  tel que  $a' = g a g^{-1}$ , donc  $\text{Ax}(a') = g \text{Ax}(a)$ . Notons  $\tilde{y}' = \text{Ax}(a') \cap \text{Ax}(b)$  et  $y' = p(\tilde{y}') = \alpha_0 \cap \beta_0$ . Donc  $y = y'$  et par conséquent  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  sont dans la même orbite, c'est-à-dire qu'il existe  $h \in \pi_1(S_g)$  tel que  $h \tilde{y} = \tilde{y}'$ . Or  $\tilde{y}, \tilde{y}' \in \text{Ax}(b)$  et  $b$  est primitif, donc d'après le Lemme 8.32, il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $h = b^l$ .

Maintenant on a donc  $b^l \tilde{y}, g \tilde{y} \in g \text{Ax}(a)$  et  $g b^{-l}(b^l \tilde{y}) = g \tilde{y}$ . D'où, d'après le Lemme 8.32, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $g b^{-l} = a^k$  et donc  $g = b^l a^k$ .

Donc  $a' = b^l a^k a a^{-k} b^{-l} = b^l a b^{-l}$ .

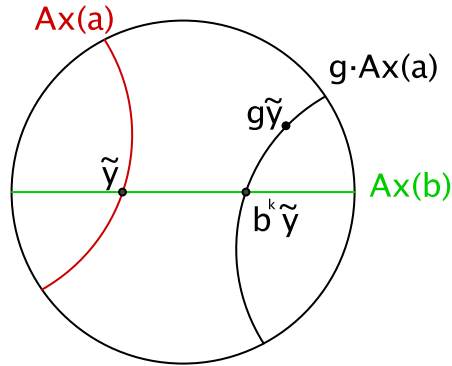


FIGURE 25 – Le sens direct de la Proposition 8.40

□

**Proposition 8.41.** Soient  $A, B, C$  des classes de conjugaison de classes d'homotopie de courbes fermées simples orientées sur  $S_g$  tel que  $i(A, B) = 1$ ,  $i(B, C) = 1$  et  $i(A, C) = 0$ . Alors  $\hat{i}(A, B)$  a le même signe que  $\hat{i}(C, B)$  si et seulement si  $Ax(aba^{-1})$  et  $Ax(cbc^{-1})$  sont du même côté de  $Ax(b)$ .

*Démonstration.* Comme  $i(A, B) = i(B, C) = 1$  et  $i(A, C) = 0$ , on peut trouver  $a, b$  et  $c$  tel que  $Ax(a) \cap Ax(b) = \{\tilde{y}\}$ ,  $Ax(b) \cap Ax(c) = \{\tilde{z}\}$  et  $Ax(a) \cap Ax(c) = \emptyset$ .

Montrons d'abord le sens direct.

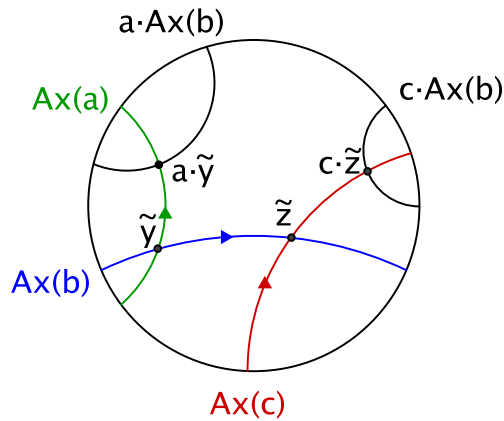


FIGURE 26 – Le sens direct de la Proposition 8.41

Supposons donc que  $\hat{i}(A, B)$  et  $\hat{i}(C, B)$  ont même signe. Alors  $a \times \tilde{y}$  et  $c \times \tilde{z}$  sont du même côté de  $Ax(b)$ . Or  $Ax(aba^{-1}) = a Ax(b)$  et  $a \times \tilde{y} \in a Ax(b)$ . De plus  $Ax(cbc^{-1}) = c Ax(b)$  et  $c \times \tilde{z} \in c Ax(b)$ . Donc  $Ax(aba^{-1})$  et  $Ax(cbc^{-1})$  sont du même côté de  $Ax(b)$ .

Pour montrer le sens réciproque, on suppose que  $\hat{i}(A, B)$  et  $\hat{i}(C, B)$  ont des signes distincts. Alors  $a \times \tilde{y}$  et  $c \times \tilde{z}$  sont de part et d'autre de  $Ax(b)$  et donc  $Ax(aba^{-1})$  et  $Ax(cbc^{-1})$  aussi.

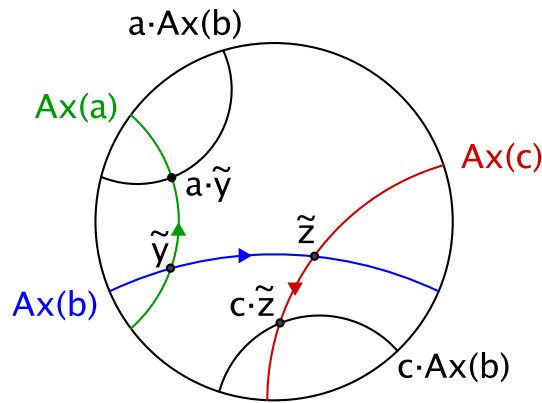


FIGURE 27 – Le sens réciproque de la Proposition 8.41

□

## 9 Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer

Maintenant, à l'aide de tout le travail qu'on a fait, nous allons finalement énoncer et démontrer le Théorème de Dehn-Nielsen-Baer.

Considérons à nouveau l'homomorphisme de groupes

$$F: \text{Homeo}(M) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(M, p))$$

$$\phi \mapsto \{\phi_*^\gamma\}$$

qu'on a défini dans la sous-section 4.3 pour tout espace topologique connexe par arcs. On peut supposer que  $M$  est une surface fermée, connexe, orientée, de genre  $g \geq 1$ , ce qui nous donne, l'application

$$F: \text{Homeo}(S_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g))$$

$$\phi \mapsto \{\phi_*^\gamma\}.$$

Considérons ensuite  $\phi, \phi' \in \text{Homeo}(S_g)$  isotopes. Alors, d'après ce qu'on a démontré dans la sous-section 4.3,  $F(\phi) = F(\phi')$ . Par conséquent,  $F$  induit l'application

$$\begin{aligned} \sigma: \text{Mod}^\pm(S_g) &\rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g)) \\ [\phi] &\mapsto \{\phi_*^\gamma\}. \end{aligned}$$

Montrons que  $\sigma$  est aussi un homomorphisme de groupes.

Soient  $[\phi], [\psi] \in \text{Mod}^\pm(S_g)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sigma([\phi] \circ [\psi]) &= \sigma([\phi \circ \psi]) \\ &= F(\phi \circ \psi) \\ &= F(\phi) \circ F(\psi) \quad \text{car } F \text{ est un homomorphisme de groupes} \\ &= \sigma([\phi]) \circ \sigma([\psi]). \end{aligned}$$

Donc on peut énoncer le théorème suivant qui s'appelle le *Théorème de Dehn-Nielsen-Baer*.

**Théorème 9.1.** *Soit  $g \geq 1$ . L'homomorphisme de groupes*

$$\sigma: \text{Mod}^\pm(S_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g))$$

*est un isomorphisme.*

Jusqu'à présent, d'après la Remarque 4.42, on savait qu'un automorphisme de  $\pi_1(S_g)$  est induit par une équivalence d'homotopie. Le Théorème 9.1 nous dit maintenant que toute automorphisme extérieur de  $\pi_1(S_g)$  est induit par un homéomorphisme.

Remarquons que le cas  $g = 1$  nous donne le Théorème 7.3 qui a déjà été démontré.

Reste à démontrer que  $\sigma$  est injective et surjective lorsque  $g \geq 2$ .

## 9.1 Injectivité

Soit  $\phi \in \text{Homeo}(S_g)$  et  $\gamma$  un chemin entre  $p$  et  $\phi(p)$ . Supposons que

$$\begin{aligned} \sigma([\phi]) &= \{id_*\} \\ \iff \phi_*^\gamma &= \text{Conj}([\delta]) && \text{pour } [\delta] \in \pi_1(S_g, p) \\ \iff \Theta_\gamma \circ \phi_* &= \Theta_\delta && \text{d'après la Remarque 4.20} \\ \iff \phi_* &= \Theta_{\bar{\gamma}} \circ \Theta_\delta \\ \iff \phi_* &= \Theta_{\bar{\gamma} * \delta} && \text{d'après le Lemme 4.19.} \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.48, il existe une application continue

$$\begin{aligned} \psi: S_g &\rightarrow S_g \\ p &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

homotope à l'identité tel que  $\psi_* = \Theta_{\bar{\gamma} \star \delta}$ , car  $\bar{\gamma} \star \delta$  est un chemin de  $\phi(p) = \psi(p)$  vers  $p$ .

Donc on a

$$\psi_* = \phi_*.$$

D'après la Remarque 6.18, on peut supposer que  $(S_g)^0$  est réduit à un point et d'après le Théorème 6.3,  $S_g$  admet une structure de CW-complexe. De plus, comme  $g \geq 2$ , d'après le Théorème 8.17,  $S_g$  est une surface hyperbolique, donc par la Proposition 8.19 le revêtement universel de  $S_g$  est  $\mathbb{H}^2$  et comme  $\mathbb{H}^2$  est contractile, on peut appliquer la Proposition 4.41, qui nous donne que  $\phi \simeq \psi$  et donc  $\phi \simeq id$ . D'où par la Proposition 7.1,  $\phi$  est isotope à l'identité. Donc  $[\phi] = [id] \in \text{Mod}^\pm(S_g)$ , ce qui démontre l'injectivité.

## 9.2 Surjectivité

On a déjà vu que  $S_g$  est une surface hyperbolique.

Considérons ensuite  $f \in \text{Aut}(\pi_1(S_g))$  et notons  $\{f\} \in \text{Out}(\pi_1(S_g))$  sa classe d'automorphismes extérieurs. Pour démontrer la surjectivité il faut déterminer un élément de  $\text{Mod}^\pm(S_g)$  qui admet  $\{f\}$  comme image par  $\sigma$ .

Soit  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$  une chaîne de courbes fermées simples orientées définie comme dans la figure ci-dessous. Pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ , soit  $C_k$  la classe de conjugaison de la classe d'isotopie de la courbe fermée simple orientée  $c_k = [\gamma_k] \in \pi_1(S_g)$ . On note  $C_k = \{c_k\}$ . Considérons alors la chaîne  $(C_1, \dots, C_{2g})$ .

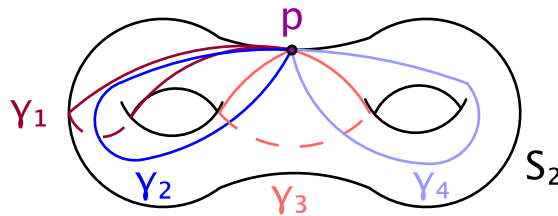


FIGURE 28 – Une chaîne de courbes fermées simples sur une surface  $S_g$



Donc, par la Définition 6.8, pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 1$ ,  $\hat{i}(C_k, C_{k+1})$  ne dépend pas de  $k$ ,  $i(C_k, C_{k+1}) = 1$  et  $i(C_k, C_j) = 0$  sinon. Supposons que les  $\gamma_k$  sont orientées de façon à ce que pour tout  $1 \leq k \leq 2g-1$ ,  $\hat{i}(C_k, C_{k+1}) = +1$ .

*Remarque 9.2.* Soit  $a \in \pi_1(S_g)$ . Comme  $f \in \text{Aut}(\pi_1(S_g))$ , on a  $\{f(a)\} = \{f\}(\{a\})$ .

Montrons que  $(\{f\}(C_1), \dots, \{f\}(C_{2g}))$  est aussi une chaîne, c'est-à-dire que

1. pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ ,  $\{f\}(C_k)$  admet une courbe fermée simple comme représentant,
2. pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 1$ ,  $i(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1})) = 1$ ,
3.  $i(\{f\}(C_k), \{f\}(C_j)) = 0$  sinon et
4.  $\hat{i}(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1}))$  ne dépend pas de  $k$ .

*Démonstration.* 1. Par définition de  $C_k$ , la courbe fermée simple  $\gamma_k$  est un représentant de  $C_k$ . Donc, d'après la Proposition 6.4,  $C_k$  est la classe de conjugaison d'un élément primitif. Ainsi, par les Remarques 3.2 et 9.2,  $\{f\}(C_k)$  est aussi une classe de conjugaison d'un élément primitif. Supposons par l'absurde que  $\{f\}(C_k)$  n'a pas de représentant simple. Alors, d'après la Proposition 8.38, il existe des éléments  $f(c_k), f(c'_k) \in \pi_1(S_g)$  tel que  $\{f(c_k)\} = \{f(c'_k)\} = \{f\}(C_k)$  et  $f(c_k)$  et  $f(c'_k)$  sont liés à l'infini. Donc, d'après le Lemme 8.34,  $c_k$  et  $c'_k$  sont liés à l'infini. De plus  $\{c_k\} = \{c'_k\} = C_k$ . Donc, d'après la Proposition 8.38,  $C_k$  n'a pas de représentant simple, ce qui est contradictoire à la définition de  $C_k$ .

D'où,  $\{f\}(C_k)$  admet une courbe simple comme représentant.

2. Soit  $c_{k+1}$  dans la classe de  $C_{k+1}$  fixé et  $a_k$  dans la classe de  $C_k$  tel que  $a_k$  est lié à l'infini avec  $c_{k+1}$ . Un tel représentant existe d'après la contraposée de la Proposition 8.39, car  $i(C_k, C_{k+1}) \neq 0$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 1$ . Ainsi le sens direct de la Proposition 8.40, nous dit que l'ensemble des représentants de  $C_k$  qui sont liés à l'infini avec  $c_{k+1}$  est donné par  $\{c_{k+1}^l a_k c_{k+1}^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ .

Ensuite, par le Lemme 8.34, on a que l'ensemble des représentants de  $\{f\}(C_k)$  qui sont liés à l'infini à  $f(c_{k+1})$  est donné par  $\{f(c_{k+1}^l a_k c_{k+1}^{-l}), l \in \mathbb{Z}\}$  qui est égal à  $\{f(c_{k+1})^l f(a_k) f(c_{k+1})^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ .

En appliquant finalement le sens réciproque de la Proposition 8.40, on trouve que  $i(\{f(a_k)\}, \{f(c_{k+1})\}) = 1$ . Donc par la Remarque 9.2, on a que  $i(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1})) = 1$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 1$ .

3. Comme  $i(C_k, C_j) = 0$  si  $j \neq k + 1$ , on a par le sens direct de la Proposition 8.39 qu'il n'existe pas d'éléments dans  $C_k$  et  $C_j$  qui sont liés à l'infini.

Ensuite par le Lemme 8.34, on a qu'il n'existe pas d'éléments dans

$\{f\}(C_k)$  et  $\{f\}(C_j)$  qui sont liés à l'infini.

En appliquant finalement le sens réciproque de la Proposition 8.39, on trouve que  $i(\{f\}(C_k), \{f\}(C_j)) = 0$  si  $j \neq k + 1$ .

4. Appliquons la Proposition 8.41 aux classes  $C_k, C_{k+1}, C_{k+2}$  pour  $1 \leq k \leq 2g - 2$ . Comme  $\hat{i}(C_k, C_{k+1})$  a le même signe que  $\hat{i}(C_{k+1}, C_{k+2})$ ,  $\hat{i}(C_k, C_{k+1})$  et  $\hat{i}(C_{k+2}, C_{k+1})$  ont des signes distincts. Donc  $\text{Ax}(c_k c_{k+1} c_k^{-1})$  et  $\text{Ax}(c_{k+2} c_{k+1} c_{k+2}^{-1})$  sont de part et d'autre de  $\text{Ax}(c_{k+1})$ .

Ensuite, par le Corollaire 8.36,  $\text{Ax}(f(c_k c_{k+1} c_k^{-1})) = \text{Ax}(f(c_k) f(c_{k+1}) f(c_k)^{-1})$  et  $\text{Ax}(f(c_{k+2} c_{k+1} c_{k+2}^{-1})) = \text{Ax}(f(c_{k+2}) f(c_{k+1}) f(c_{k+2})^{-1})$  sont aussi de part et d'autre de  $\text{Ax}(f(c_{k+1}))$ .

Comme on a déjà démontré que  $i(\{f(c_k)\}, \{f(c_{k+1})\}) = i(\{f(c_{k+1})\}, \{f(c_{k+2})\}) = 1$  et  $i(\{f(c_k)\}, \{f(c_{k+2})\}) = 0$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 2$  on peut finalement appliquer le sens réciproque de la Proposition 8.41 et la Remarque 9.2 et on trouve que  $\hat{i}(\{f(c_k)\}, \{f(c_{k+1})\}) = \hat{i}(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1}))$  et  $\hat{i}(\{f(c_{k+2})\}, \{f(c_{k+1})\}) = \hat{i}(\{f\}(C_{k+2}), \{f\}(C_{k+1}))$  ont des signes distincts. Donc  $\hat{i}(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1}))$  et  $\hat{i}(\{f\}(C_{k+2}), \{f\}(C_{k+1}))$  ont le même signe pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 2$ . D'où  $\hat{i}(\{f\}(C_k), \{f\}(C_{k+1}))$  ne dépend pas de  $k$ .

□

Ainsi on a montré que  $(\{f\}(C_1), \dots, \{f\}(C_{2g}))$  est aussi une chaîne de classes de conjugaisons de classes d'isotopies de courbes fermées simples orientées dans  $S_g$ .

Par la Proposition 6.16, les deux chaînes sont séparantes. Donc on peut appliquer le Théorème 6.29, qui nous donne l'existence d'un homéomorphisme  $\psi \in \text{Homeo}(S_g)$  qui fixe le point de base  $p \in S_g$  et qui induit, d'après le Corollaire 4.17, l'automorphisme  $\psi_* \in \text{Aut}(\pi_1(S_g, p))$  qui vérifie alors que  $\psi_*(c_k) = f(c_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ . Par conséquent,  $\{\psi_*(c_k)\} = \{f(c_k)\}$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g$  et donc, par la Remarque 9.2,  $\{\psi_*\}(C_k) = \{f\}(C_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ , si on note  $\{\psi_*\} \in \text{Out}(\pi_1(S_g))$  sa classe d'automorphismes extérieurs.

Considérons ensuite  $[\psi] \in \text{Mod}^\pm(S_g)$  et montrons que  $\sigma([\psi]) = \{f\}$ . La preuve de la surjectivité sera alors terminée.

On sait que  $\sigma([\psi]) = \{\psi_*\}$ . Donc il faut montrer que  $\{\psi_*\} = \{f\}$ . Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un automorphisme intérieur  $J \in \text{Int}(\pi_1(S_g, p))$  tel que  $J \circ \psi_*^{-1} \circ f$  est l'application identité.

Par la contraposée de la Proposition 8.39, comme  $i(C_k, C_{k+1}) \neq 0$ , il existe des représentants  $c_k$  et  $c_{k+1}$  qui sont liés à l'infini pour tout  $1 \leq k \leq 2g - 1$ . Choisissons les comme représentants.

D'après la Proposition 6.22, les  $c_k$  engendrent  $\pi_1(S_g, p)$ . Donc il suffit de montrer que  $J \circ \psi_*^{-1} \circ f(c_k) = c_k$  pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ .

Notons  $F = \psi_*^{-1} \circ f$ . L'application  $F$ , étant la composée de deux automorphismes, préserve le fait d'être lié ou non par le Lemme 8.34. Notons  $\{F\} \in \text{Out}(\pi_1(S_g))$  sa classe d'automorphismes extérieurs. On a alors de plus pour tout  $1 \leq k \leq 2g$

$$\begin{aligned} \{F\}(C_k) &= \{\psi_*\}^{-1} \circ \{f\}(C_k) \\ &= \{\psi_*\}^{-1} \circ \{\psi_*\}(C_k) \\ &= C_k. \end{aligned}$$

Donc en particulier,

$$\begin{aligned} \{F\}(C_1) &= C_1 \\ \iff \{F(c_1)\} &= \{c_1\} && \text{par la Remarque 9.2} \\ \iff F(c_1) &= a_1^{-1}c_1a_1 && \text{pour un certain } a_1 \in \pi_1(S_g, p) \\ \iff a_1F(c_1)a_1^{-1} &= c_1 \\ \iff I_{a_1} \circ F(c_1) &= c_1 && \text{avec } I_{a_1} \in \text{Int}(\pi_1(S_g, p)). \end{aligned}$$

L'application  $I_{a_1} \circ F$ , étant la composée de deux automorphismes, préserve le fait d'être lié ou non par le Lemme 8.34.

De plus  $\{F\}(C_2) = C_2$ . Donc il existe aussi un automorphisme intérieur  $I_x$  tel que  $I_x \circ F(c_2) = c_2$ . Déterminons-le.

On a  $c_1$  et  $c_2$  qui sont liés à l'infini. Donc  $I_{a_1} \circ F(c_1) = c_1$  est lié avec  $I_{a_1} \circ F(c_2)$  à l'infini.

D'après la Proposition 8.40, l'ensemble des représentants de  $C_2$  qui sont liés avec  $c_1$  à l'infini est donné par  $\{c_1^l c_2 c_1^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ . Donc il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $I_{a_1} \circ F(c_2) = c_1^l c_2 c_1^{-l}$ , ce qui implique que  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F(c_2) = c_2$ . De plus  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F(c_1) = c_1^{-l} c_1 c_1^l = c_1$ . Donc  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F$  fixe  $c_1$  et  $c_2$ .

Montrons par récurrence que  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F$  fixe tous les  $c_k$ .

Supposons que  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F(c_k) = c_k$  pour tout  $k \leq n$ . Donc en particulier  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F$  fixe  $c_{n-1}$  et  $c_n$  et donc tous les éléments de l'ensemble  $\{c_n^l c_{n-1} c_n^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ , c'est-à-dire les représentants de  $C_{n-1}$  qui sont liés à l'infini avec  $c_n$ . Or  $c_{n+1}$  est aussi lié à l'infini avec  $c_n$ , mais  $c_{n+1}$  n'est lié à aucun élément de l'ensemble  $\{c_n^l c_{n-1} c_n^{-l}, l \in \mathbb{Z}\}$ , car  $i(C_{n+1}, C_{n-1}) = 0$  et donc, par la Proposition 8.39,  $c_{n+1}$  n'est lié avec aucun représentant de  $C_{n-1}$ . Donc il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Ax}(c_{n+1})$  "se trouve entre"  $\text{Ax}(c_n^l c_{n-1} c_n^{-l})$  et  $\text{Ax}(c_n^{l+1} c_{n-1} c_n^{-(l+1)})$  (cf figure).

Notons  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F(c_{n+1}) = c'_{n+1}$ . Alors  $\{c'_{n+1}\} = \{c_{n+1}\} = C_{n+1}$ , car  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F$  préserve les  $C_k$ . De plus,  $\text{Ax}(c'_{n+1})$  est entre  $\text{Ax}(c_n^l c_{n-1} c_n^{-l})$  et

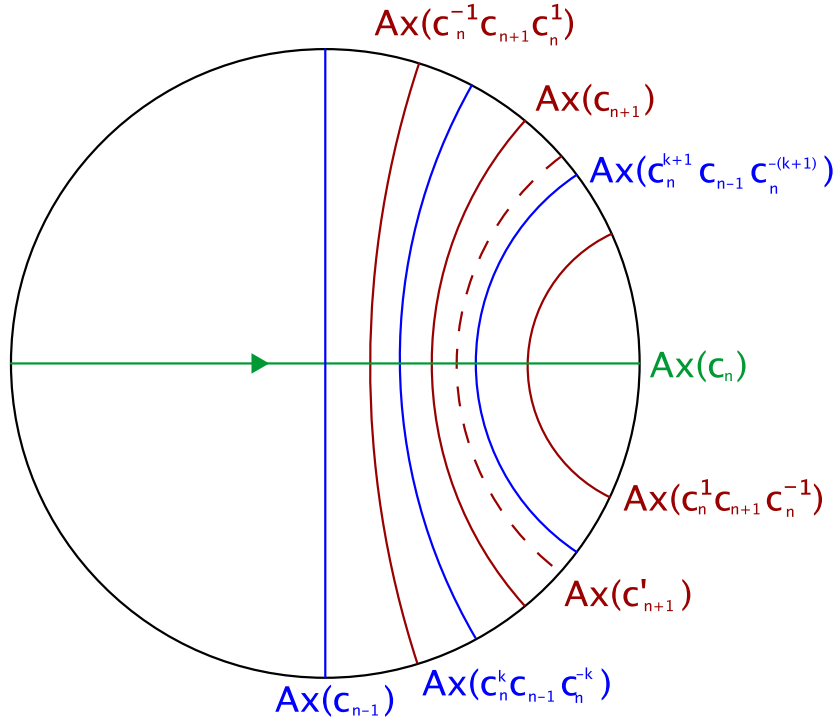


FIGURE 29 – Axes dans  $\mathbb{H}^2$

$\text{Ax}(c_n^{l+1}c_{n-1}c_n^{-(l+1)})$  et  $c'_{n+1}$  est lié à l'infini avec  $c_n$ . Or, d'après la Proposition 8.40, les seuls représentants de  $C_{n+1}$  qui sont liés à l'infini avec  $c_n$  sont de la forme  $c_n^k c_{n+1} c_n^{-k}$  et le seul élément de cette forme, dont l'axe est entre  $\text{Ax}(c_n^l c_{n-1} c_n^{-l})$  et  $\text{Ax}(c_n^{l+1} c_{n-1} c_n^{-(l+1)})$  est  $c_{n+1}$  lui-même. Donc  $c'_{n+1} = c_{n+1}$ , ce qui démontre que  $I_{c_1^{-l} a_1} \circ F$  fixe  $c_{n+1}$ .

Ainsi on a déterminé un automorphisme intérieur  $J = I_{c_1^{-l} a_1}$  qui vérifie que

$$J \circ F(c_k) = J \circ \psi_*^{-1} \circ f(c_k) = c_k$$

pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ . Donc on a démontré que

$$\sigma([\psi]) = \{\psi_*\} = \{f\}.$$

D'où la surjectivité de  $\sigma$ .

## Références

- [BFDM] Benson Farb et Dan Margalit, "A primer on mapping class groups Version 5.0", Princeton university press, Princeton and Oxford
- [ClJo] Clees Joëlle, Le groupe des réflexions d'un triangle idéal du plan hyperbolique, 2012
- [CoFr] Costantino Francesco, Cours de Topologie en petite dimension, 2013
- [AlHat] Allen Hatcher, Algebraic Topology, 2001
- [WiTh] William Thurston, The geometry and topology of three-manifolds, Princeton lecture notes (1978–1981)
- [FrLa] Francois Labourie, A short and dirty introduction to hyperbolic surfaces