Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques et d'Informatiques

Stage de master 2.
Directeur de stage : Pierre Guillot

Cohomologie de $BSpin(n)$.

Simon Deruelle

Juin 2013

Table des matières

1 Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de stage, Monsieur Pierre Guillot, Maître de conférence à l'université de Strasbourg, pour sa disponibilité, pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer, ainsi que pour ses explications et conseils.

2 Introduction

Le but de ce mémoire est d'énoncer un théorème dû à Quillen sur la cohomologie de $BSpin(n)$ ($BSpin(n)$ est un groupe de Lie). L'énoncé ainsi que la démonstration se trouvent dans l'article [6]. Pour pouvoir comprendre tous les termes présents dans cet énoncé nous avons besoin de connaître la notion d'espace classifiant. Cette notion apparaît naturellement lorsque l'on souhaite établir une classification de certains fibrés au dessus d'un certain espace (nous n'avons pas encore défini ce qu'était un fibré, mais on peut penser à la donnée d'une application continue $p : E \to B$ et d'un groupe G agissant sur E tel que p induise un homéomorphisme entre E/G et B). La cohomologie des espaces classifiants constitue l'approche topologique de la cohomologie des groupes, qui est un vaste sujet des mathématiques du 20-ième siècle. Une approche purement algébrique existe, mais elle n'apparaîtra pas dans ce mémoire. Le but du premier chapitre est de définir la notion de fibré vectoriel et de comprendre la grassmanienne. Dans le chapitre 2 on montrera que pour tout groupe de Lie compact G il existe un espace classifiant BG. La grassmanienne est le premier espace classifiant que nous rencontrerons, et on peut exprimer son anneau de cohomologie en fonction de ce que l'on appelle les classes de Stiefel-Whitney. Les classes de Stiefel-Whitney sont ce que l'on appelle des classes caractéristiques, c'est à dire des invariants associés aux fibrés vectoriels, on esquisse une construction de ces classes au chapitre 4 en utilisant les opérations de Steenrod définies de manière axiomatique (on ne montre pas leur existence, on exhibe juste les propriétés qui nous intéressent) au chapitre 3. Puis nous calculerons $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ c'est à dire : l'anneau de cohomologie de la grassmanienne. Enfin dans un avant dernier chapitre nous construirons les groupes spinoriels $Spin(n)$, et nous montrerons qu'ils sont un modèle pour le revêtement universel de $SO(n)$. Enfin dans un dernier chapitre nous énoncerons le théorème tant attendu, et nous regarderons quelques exemples simples.

3 Généralités sur les fibrés vectoriels et grassmanniennes

On introduit dans ce chapitre la notion de fibré vectoriel, les énoncés et les preuves des propositions, théorèmes, et définitions proviennent de [5]. Le langage des fibrés vectoriels permet de mettre en place les classes de Stiefel-Whitney de manière axiomatique comme nous le verrons plus tard.

3.1 Fibrés vectoriels : définitions, exemples

Définition 3.1. *Un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) ξ au dessus d'un espace topologique B est la donnée de :*

1. *un espace topologique E (appeler espace total), que l'on notera très souvent $E(\xi)$.*
2. *une application continue $\pi : E \to B$ souvent appelée projection.*
3. *$\forall b \in B$ une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (respectivement de $\mathbb{C}$-espace vectoriel) sur $\pi^{-1}(b)$.*

On demande de plus la condition de trivialité locale suivante : pour tous $b \in B$ il existe un voisinage $U \subset B$ de b, un entier $n \geq 0$, un homéomorphisme $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ tel que pour tous $b \in U$, l'application $x \mapsto h(b, x)$ soit un isomorphisme entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace vectoriel $\pi^{-1}(b)$. $\pi^{-1}(b)$ est appelé la fibre au dessus de b et est souvent notée $F_b(\xi)$. B est appelé la base, et est parfois notée $B(\xi)$.

Remarques 3.2. • *Si ξ est un fibré vectoriel au dessus d'une base connexe, alors on a que l'entier n est unique, on appellera cet entier le rang de ξ.*
• *Avec cette définition, si B est un espace topologique on remarque que la projection canonique $\pi : B \times \mathbb{R}^n \to B$ est un fibré vectoriel. On appelle ce fibré vectoriel le fibré vectoriel trivial de rang n.*
• *Dans la suite de ce chapitre on ne considèrera que des fibrés vectoriels réels, mais toutes les propositions de ce chapitre restent vraies pour les fibrés vectoriels complexes, ce qui ne sera plus le cas à partir du chapitre suivant.*

Définition 3.3. *Soit ξ et η deux fibrés vectoriels au dessus d'une même base ayant pour espace total $E(\xi)$ et $E(\eta)$, on dit qu'ils sont isomorphes si : il existe un homéomorphisme $f : E(\xi) \to E(\eta)$, où f est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $F_b(\xi)$ et $F_b(\eta)$.*

Définition 3.4. *Un fibré vectoriel est dit trivial si il est isomorphe au fibré vectoriel trivial.*

Soit $\mathbb{R}P^n$ l'espace projectif réel de dimension n (avec $n \geq 1$). Chaque élément de $\mathbb{R}P^n$ est une droite vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ que l'on note $[u]$ si u est un vecteur qui engendre cette droite. Ainsi si l'on regarde le sous-ensemble de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ constitué des paires $([u], v)$ tel que v est un multiple de u (on notera cet ensemble $E(\gamma_n^1)$), et en définissant $\pi : E(\gamma_n^1) \to \mathbb{R}P^n$ par $\pi([u], v) = [u]$, alors on remarque que l'on obtient un fibré vectoriel au dessus de $\mathbb{R}P^n$ de rang 1 où $E(\gamma_n^1)$ est l'espace total et π la projection. On notera ce fibré vectoriel γ_n^1, il est souvent appelé fibré tautologique au dessus de $\mathbb{R}P^n$.

Théorème 3.5. *Le fibré vectoriel γ_n^1 au dessus de $\mathbb{R}P^n$ n'est pas trivial pour $n \geq 1$.*

Démonstration. voir [5] □

Définition 3.6. *Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel, et $s : B \to E$ une application continue, on dit que s est une section si : $p \circ s = Id|_B$.*

Théorème 3.7. *Un fibré vectoriel de rang n est trivial si et seulement si il admet n sections linéairement indépendantes en tous point de la base.*

Démonstration. voir [5] □

Définition 3.8. *Un morphisme de η à ξ (η et ξ sont 2 fibrés vectoriels qui n'ont pas forcément la même base) est une fonction continue : $g : E(\eta) \to E(\xi)$ qui induit (par restriction) un isomorphisme d'espace vectoriels : $g|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \to F_{b'}(\xi)$ où $b' \in B(\xi)$.*

Remarque 3.9. *On remarque qu'un morphisme entre fibré vectoriel : $g : E(\eta) \to E(\xi)$ induit une application continue $\overline{g} : B(\eta) \to B(\xi)$.*

3.2 Opérations sur les fibrés vectoriels

On construit des nouveaux fibrés vectoriels en partant d'un (ou plusieurs) fibré vectoriel. On peut résumer ce paragraphe de la manière suivante : toutes les opérations que l'on peut effectuer sur un ou plusieurs espaces vectoriels peuvent être effectués sur des fibrés vectoriels.

1. **Restriction d'un fibré à un sous ensemble de la base.** Soit $\pi : E \to B$ un fibré vectoriel, et B' un sous-ensemble de B. En posant $E' = \pi^{-1}(B')$, et en posant : $\pi' : E' \to B'$ la restriction de π à E', on obtient un nouveau fibré vectoriel.
2. **Fibré induit.** Soit ξ un fibré vectoriel de la forme $\pi : E \to B$, et B_1 un espace topologique. On se donne une application continue $f : B_1 \to B$, on construit le fibré induit $f^*\xi$ au dessus de B_1 de la manière suivante : l'espace total E_1 de $f^*\xi$ est le sous-espace $E_1 \subset B_1 \times E$ constitué des paires (b, e) vérifiant $f(b) = \pi(e)$. L'application $\pi_1 : E_1 \to B_1$ définie par $\pi_1(b, e) = b$ est la projection du fibré vectoriel $f^*\xi$ (il faudrait vérifier que $\pi_1^{-1}(b)$ est un espace vectoriel pour tous $b \in B_1$, puis la trivialité locale, mais ce n'est pas très difficile).

3. **Produit cartésien.** On se donne deux fibrés vectoriels ξ_1 et ξ_2, avec des projections $\pi_i : E_i \to B_i$ pour $i = 1, 2$, on définit le produit cartésien $\xi_1 \times \xi_2$ de la manière suivante :

$$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$$

   Il faut vérifier la trivialité locale, mais une fois de plus la vérification est formelle.

4. **Somme de Whitney.** On considère deux fibrés vectoriels ξ_1, ξ_2 au dessus de la même base B. On appelle $d : B \to B \times B$ l'application diagonale. Le fibré $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ au dessus de B est appelé la somme de Whitney de ξ_1 avec ξ_2, et est noté $\xi_1 \oplus \xi_2$. On remarque que chaque fibre $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ est canoniquement isomorphe à la somme direct $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$.

Lemme 3.10. *Si $g : E(\eta) \to E(\xi)$ est un morphisme entre fibrés vectoriels, et si $\overline{g} : B(\eta) \to B(\xi)$ est l'application induite, alors η est isomorphe au fibré induit $\overline{g}^*\xi$.*

Démonstration. voir [5] □

3.3 Grassmaniennes, et variétés de Stiefel

On introduit dans ce paragraphe les grassmaniennes, et les variétés de Stiefel, ce sont des variétés différentiables compactes qui ont une structure de CW-complexe assez pratiques. On fera un usage courant de ces espaces par la suite.

Définition 3.11. *Un n-repère de $\mathbb{R}^{n+k}$ est un n-uplet de vecteurs linéairement indépendant de $\mathbb{R}^{n+k}$. L'ensemble des n-repères forme un ouvert du produit cartésien : $\mathbb{R}^{n+k} \times ... \times \mathbb{R}^{n+k}$ (n fois), que l'on appelle variété de Stiefel : $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.*

Remarque 3.12. *On remarque que $GL_{n+k}(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$, de plus cette action est transitive, et le stabilisateur d'un n-repère est clairement isomorphe à $GL_k(\mathbb{R})$. On a donc $GL_{n+k}(\mathbb{R})/GL_k(\mathbb{R})$ qui est homéomorphe à $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.*

Définition 3.13. *La variété grassmanienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est l'ensemble des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensions n. Mais la dénomination "variété grassmanienne" suggère qu'il existe une topologie sur cet ensemble (et aussi une structure de variété), on a une application évidente :*

$$q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

qui à un n-repère associe le sous-espace vectoriel de dimension n que ces vecteurs engendrent. On déclare qu'un sous-ensemble $U \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert. Alors cela fait de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ un espace topologique et même plus d'après la proposition suivante :

Proposition 3.14. *$G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est une variété topologique compact de dimension nk. De plus on a une application $X \mapsto X^\perp$ qui définie un homéomorphisme entre $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ et $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$.*

Démonstration. voir [5]. $\square$

Remarques 3.15. • *On remarque que $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$ (ils sont homéomorphes).*
• *On a une action évidente de $O_{n+k}(\mathbb{R})$ sur $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$, ce qui permet de définir une action de $O_{n+k}(\mathbb{R})$ sur $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ de la manière suivante :*

$$\begin{array}{ccc} O_{n+k}(\mathbb{R}) \times G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \to & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \\ (g, q(m)) & \mapsto & q(g.m) \end{array}$$

Cette action est transitive, car tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n+k}$ possèdent une base orthonormée. De plus on remarque que le stabilisateur de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(e_i)_{i\in[1,n]}$ (où $(e_i)_{i\in[1,n+k]}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+k}$) est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme $O_n \times O_k$, d'où un homéomorphisme $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = O_{n+k}/O_n \times O_k$.
• *On remarque que l'on a les inclusions canoniques suivantes :*

$$G_n(\mathbb{R}^n) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subset ...$$

Définition 3.16. *La variété grassmanienne infinie $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ est l'espace topologique : $\lim\limits_{k\to\infty}(G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$. Autrement dit un sous-ensemble de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ est ouvert si et seulement si son intersection avec $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est ouverte pour tout $k \in \mathbb{N}$ (dans $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$).*

Définition 3.17. *On construit comme précédemment un fibré vectoriel γ^n. Cette fois γ^n est un fibré vectoriel au dessus de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$. On considère le sous-espace de $G_n(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty$ constitué des couples (X, x) où $x \in X \in G_n(\mathbb{R}^\infty)$, on note ce sous-espace $E(\gamma^n)$. Ainsi l'application $\pi : E(\gamma^n) \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$ qui est définie par : $\pi(X, x) = X$ définie un fibré vectoriel de rang n.*

Remarque 3.18. *Dans la définition précédente on a pas expliqué pourquoi est-ce que γ^n vérifie la condition de trivialité locale parce que cette fois-ci ce n'est pas évident, la topologie limite entre en jeu. On pourra voir pour plus de précision [5].*

Définition 3.19. *Soit $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$ l'ensemble des espaces vectoriels munies d'une orientation. Comme précédemment on a une application évidente $\widetilde{q} : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$. Ainsi un sous-ensemble U de $\widetilde{Gr_n}(\mathbb{R}^{n+k})$ est ouvert si et seulement si : $\widetilde{q}^{-1}(U)$ est ouvert. De plus cela donne naissance a une application continue évidente : $p : \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, p est l'application qui à un espace vectoriel orienté associe ce même espace vectoriel mais sans orientation.*

Remarques 3.20. • *Cette fois ci on a :* $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k}) = SO_{n+k}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \times SO_k(\mathbb{R})$
• $\widetilde{G_1}(\mathbb{R}^{1+k}) = \mathbb{S}^k$

Proposition 3.21. *L'application* $p : \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *est un revêtement à 2 feuillets, de plus ce revêtement n'est pas triviale.*

Démonstration. On remarque que $\mathbb{Z}_2$ agit sur $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$ de la manière suivante : soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une base orientée de $X \in \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$, si on note $\tilde{q}((u_2, u_1, ..., u_{n+k})) = -X$, alors on a une application : $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k}) \to \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$ qui est définie par $X \mapsto -X$. Il faut encore vérifier que cette application est bien définie et est continue, mais si c'est le cas on a une involution sur $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$, et clairement on a p qui se factorise par une application $\tilde{p} : \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})/(\mathbb{Z}_2) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ qui est injective (dû au faite qu'il n'existe que deux orientations sur un espace vectoriel réel). Puis par compacité de $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$, on en déduit que $\tilde{p}$ est un homéomorphisme. Donc p est bien un revêtement à deux feuillets. Ce revêtement n'est pas trivial, sinon $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$ ne serait pas connexe, ce qui est absurde. □

Définition 3.22. *On note* $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{k+n})$*, et comme précédemment on a un fibré vectoriel de rang n qui est défini de manière similaire à γ^n par une application* $\pi : E(\widetilde{\gamma^n}) \to \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^{n+k})$*, on notera ce fibré vectoriel* $\widetilde{\gamma^n}$.

Nous aurons besoin lors du paragraphe 3 de comprendre la structure de CW-complexe qui existe sur $G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Pour cela nous exhibons une structure de CW-complexe sur $G_n(\mathbb{R}^{n+m})$, puis on remarque que $G_n(\mathbb{R}^{n+m})$ est un sous-CW-complexe de $G_n(\mathbb{R}^{n+m+1})$, ce qui permet d'avoir une structure de CW-complexe sur $G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Donnons alors une idée de la structure de CW-complexe qui existe sur $G_n(\mathbb{R}^{n+m})$:

On a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset ... \subset \mathbb{R}^m$$

où $\mathbb{R}^k$ est constitué de tous les vecteurs qui ont leur $m-k$ dernières coordonnées nulles. Pour chaque espace-vectoriel $X \subset \mathbb{R}^m$ de dimension n on a une suite d'entiers :

$$0 \leq dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq dim(X \cap \mathbb{R}^2) \leq ... \leq dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$$

Définition 3.23. *On appelle symbole de Schubert* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ *une suite de n entiers satisfaisant :*

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_n \leq m$$

Notation 3.24. *Pour chaque symbole de Schubert* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$*, on note* $e(\sigma)$ *l'ensemble des espaces vectoriels X de dimension n de $\mathbb{R}^m$ qui vérifient :*

$$dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i,\ dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}) = i-1,\ pour\ i = 1, ..., n$$

Chaque $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$ appartient à exactement un des ensembles $e(\sigma)$. On peut montrer que chaque $e(\sigma)$ est une cellule ouverte de dimension : $d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i - i)$ (c'est à dire que $e(\sigma)$ est un sous-ensemble de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ qui est homéomorphe à une boule ouverte de dimension $d(\sigma)$). On remarque de plus que le nombre de cellules $e(\sigma)$ est égale à C_n^m.

Théorème 3.25. *Les C_n^m cellules $e(\sigma)$ forment les cellules d'un CW-complexe ayant pour espace topologique sous-jacent $G_n(\mathbb{R}^m)$. De manière similaire en prenant la limite directe on obtient comme CW-complexe infinie : $G_n(\mathbb{R}^\infty)$.*

Démonstration. On pourra consulter [5]. Nous n'aurons pas besoin de comprendre quelles sont les applications d'attachements. □

Exemple 3.26. *L'espace projectif $\mathbb{R}P^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ est donc un CW-complexe ayant une cellule de dimension r : $e(r+1)$ pour tous les $0 \leq r \leq n$. De plus $\mathbb{R}P^\infty = G_1(\mathbb{R}^\infty)$ a une cellule de dimension r pour tous $0 \leq r$ que l'on note $e(r+1)$ et on remarque que $\overline{e(r+1)} = \mathbb{R}P^r$.*

Définition 3.27. *Une partition d'un entier $r \geq 0$ est une suite $(i_1, i_2, ..., i_s)$ d'entiers positifs tel que $\sum_{k=1}^{s} i_k = r$.*

A chaque symbole de Schubert $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ avec $d(\sigma) = r$ et $\sigma_n \leq m$ correspond une partition $(i_1, ..., i_s)$ de r, où $i_1, ..., i_s$ est une suite obtenue à partir de $\sigma_1 - 1, ..., \sigma_n - n$ en enlevant les zéros qui peuvent apparaître dans cette suite. Alors on a que :

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_s \leq m - n$$

et $s \geq n$. D'où :

Corollaire 3.28. *Le nombre de r-cellule de $G_n(\mathbb{R}^m)$ est égale au nombre de partitions de r en au plus n entiers positifs inférieurs ou égaux à $m - n$.*

Remarque 3.29. *Le corollaire précédent est vrai pour $m = \infty$, car $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ admet $G_n(\mathbb{R}^m)$ comme sous-CW-complexe.*

3.4 Classification des fibrés vectoriels de rang n

Théorème 3.30. *Un fibré vectoriel ξ de rang n au dessus d'un espace paracompact B détermine une unique classe d'homotopie :*

$$\overline{f} : B \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$$

Une autre formulation (plus précise) de ce résultat est la suivante :

Théorème 3.31. *Tout fibré vectoriel ξ de rang n au dessus d'une base paracompact admet un morphisme $\xi \to \gamma^n$. De plus deux morphismes $f, g : \xi \to \gamma^n$ sont homotopes (c'est à dire qu'il existe une famille de morphismes $h_t : \xi \to \gamma^n$, $t \in [0,1]$ avec $h_0 = f$ et $h_1 = g$ tel que la fonction $h : E(\xi) \times [0,1] \to E(\gamma)$ soit continue).*

Ce dernier résultat est très important, il justifie en réalité toute cette section sur les fibrés vectoriels et les variétés grassmaniennes, nous mettrons ce résultat en parallèle avec le théorème 4.36 qui permet de définir l'espace classifiant d'un groupe topologique G. On vient de mettre en évidence le rôle qu'a l'espace $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ comme "espace classifiant" du groupe $O_n(\mathbb{R})$. On a pas défini ce qu'était un "espace classifiant" mais on peut par exemple imaginer (ou se faire une idée) que c'est un espace qui permet d'établir une correspondance (ce qui était le cas avec $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ qui permet d'établir une correspondance entre les fibrés vectoriels de rangs n au dessus d'un certains espace X et les classes d'homotopie $[X, G_n(\mathbb{R}^\infty)]$).

4 Cohomologie d'un groupe topologique G

Dans ce chapitre on définit l'anneau de cohomologie d'un groupe topologique G à coefficient dans un anneau k : $H^*(G,k)$. On introduit pour cela la notion de G-fibré principale, c'est la notion centrale de cette section. On verra en quoi cette notion de G-fibré permet de "généraliser" la notion de fibré vectoriel. Puis à la fin nous énoncerons un théorème semblable à 3.31 (on établit une certaine correspondance), qui permet entre autre de mieux comprendre le théorème 3.31 et l'espace $G_n(\mathbb{R}^\infty)$. On établira l'existence et l'unicité à homotopie près d'un certain espace BG (l'espace classifiant du groupe topologique G), ce qui nous permettra de définir l'anneau $H^*(BG,k)$. A la fin nous verrons à quoi correspond la cohomologie de BG lorsque G est discret. Les énoncés et les preuves des propositions, théorèmes, et définitions proviennent de [7]

4.1 Notion de G-fibré

Définition 4.1. *Soit G un groupe topologique. Un G-fibré coordonné $\mathcal{B}$ est la donnée de :*

1. *un espace topologique E appelé espace total.*
2. *un autre espace topologique B appelé la base*
3. *une application continue $p : E \to B$*
4. *un espace topologique Y appelé fibre, tel que G agisse continûment et de manière effective sur Y.*
5. *une famille $\{V_j\}_{j\in J}$ d'ouverts qui recouvrent B.*
6. *pour chaque $j \in J$ un homéomorphisme (appeler fonction coordonnée) $\phi_j : V_j \times Y \to p^{-1}(V_j)$, tel que $p \circ \phi_j = pr$, où $pr : V_j \times Y \to V_j$ est la projection canonique.*

satisfaisant les conditions suivantes :

1. *$\forall (i,j) \in J \times J, \forall x \in V_i \cap V_j$, l'homéomorphisme $\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x} : Y \to Y$ est un élément de G (ce dernier est unique puisque G agit de manière effective sur Y), ces fonctions sont appelées transformations de coordonnées.*
2. *$\forall (i,j) \in J \times J$ l'appplication*

$$\begin{array}{rccc} g_{ji} : & V_i \cap V_j & \to & G \\ & x & \mapsto & \phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x} \end{array}$$

est continue.

Où

$$\begin{array}{rccc} \phi_{j,x} : & Y & \to & p^{-1}(x) \\ & y & \mapsto & \phi_j(x,y) \end{array}$$

Notation 4.2.
$$\begin{array}{rccc} p_j: & p^{-1}(V_j) & \to & Y \\ & b & \mapsto & \phi_{j,p(b)}^{-1}(b) \end{array}$$

Définition 4.3. *Deux G-fibrés coordonnés $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont équivalents s'ils ont le même espace totale, la même base, la même projection, la même fibre et si leurs fonctions coordonnées $\{\phi_j\}_{j\in J}$ et $\{\phi'_k\}_{k\in K}$ vérifient : $\forall (j,k) \in J \times K, \forall x \in V_j \cap V'_k$, $\overline{g_{kj}}(x) := \phi'^{-1}_{k,x} \circ \phi_{j,x}$ est un élément de G et l'application $\overline{g_{kj}} : V_j \cap V'_k \to G$ est continue.*

Remarque 4.4. *On remarque que la relation "être équivalent" pour deux G-fibrés coordonnés est une relation d'équivalence, ce qui justifie la définition suivante.*

Définition 4.5. *Un G-fibré est la classe d'équivalence d'un G-fibré coordonné.*

Remarques 4.6. •*On considère un G-fibré comme un G-fibré coordonné "maximal", c'est à dire un G-fibré coordonné ayant toutes les fonctions coordonnées de tous les G-fibré coordonnés de sa classe d'équivalence. Lorsque nous parlerons de G-fibré $p : E \to B$, nous ne mentionnerons pas (ou de manière occasionnelle) les fonctions coordonnées, elles seront claires suivant le contexte.*
• *G est souvent appelé groupe structural du fibré $\mathcal{B}$.*

Exemples 4.7. • *Les $GL_n(\mathbb{R})$-fibrés de fibre $\mathbb{R}^n$ (respectivement les $GL_n(\mathbb{C})$-fibrés de fibre $\mathbb{C}^n$) correspondent aux fibrés vectoriels réels (respectivement complexes). Pour montrer cela, on remarque que si $\{E, B, p, \mathbb{R}^n, \{\phi_i\}_{i\in I}\}$ est un $GL_n(\mathbb{R})$-fibré alors $p : E \to B$ est un fibré vectoriel si $\forall i \in I$, $\forall x \in V_i$ $\phi_{i,x}$ est un isomorphisme linéaire. Mais il n'y'a pas de structure d'espace vectoriel sur $p^{-1}(x)$. Soit $x \in V_j$, $a, b \in p^{-1}(x)$ et $u \in \mathbb{R}$. On définit :*

$$a + ub = \phi_{j,x}(p_j(a) + up_j(b))$$

Supposons que $x \in V_i$, alors :

$$\begin{aligned} \phi_{i,x}(p_i(a) + up_i(b)) &= \phi_{j,x} \circ g_{j,i}(x)(p_i(a) + up_i(b)) \\ &= \phi_{j,x}(g_{j,i}(x) \circ p_i(a) + ug_{j,i}(x) \circ p_i(b)) \\ &= \phi_{j,x}(p_j(a) + up_j(b)) \end{aligned}$$

Ainsi $a + ub$ ne dépend pas du choix de la fonction coordonnée $\phi_{i,x}$, et donc on a une structure d'espace vectoriel sur $p^{-1}(x)$ tel que $\phi_{i,x}$ soit un isomorphisme linéaire. Ce qui montre que tout $GL_n(\mathbb{R})$-fibré de fibre $\mathbb{R}^n$ (respectivement $GL_n(\mathbb{C})$-fibré de fibre $\mathbb{C}^n$) peut-être vu comme un fibré vectoriel réel (respectivement complexe). Inversement un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) est clairement un $GL_n(\mathbb{R})$-fibré de fibre $\mathbb{R}^n$ (respectivement un $GL_n(\mathbb{C})$-fibré de fibre $\mathbb{C}^n$).

• *Les G-fibrés principaux au dessus de X où G est muni de la topologie discrète sont les revêtement réguliers au dessus de X.*

Définition 4.8. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux G-fibrés ayant la même fibre. Un morphisme $h : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ entre fibrés, est une application continue $h : E \to E'$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *h établit un homéomorphisme entre la fibre au dessus de $p(x)$ et la fibre au dessus de $p'(h(x))$ (en particulier h induit une application $\overline{h} : B \to B'$)*
2. *si $x \in V_j \cap \overline{h}^{-1}(V_k')$, et $h_x : Y_x \to Y_{x'}$ est l'application induite, alors l'application :*
$$\overline{g_{k,j}}(x) = \phi'^{-1}_{k,x'} \circ h_x \circ \phi_{j,x}$$
coincide avec un élément de G.
3. *L'application :*
$$\overline{g_{k,j}} : V_j \cap \overline{h}^{-1}(V_k') \to G$$
est continue.

Définition 4.9. *Deux G-fibrés $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, ayant la même base et la même fibre, sont équivalents s'il existe un morphisme entre fibré : $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ qui induit l'identité sur les bases communes.*

Remarque 4.10. *La plupart du temps on considère les G-fibré à équivalence près, cela est justifié par le théorème 4.32 qui est l'aboutissement de cette deuxième grande partie.*

Définition 4.11. *Soit G un groupe topologique et X un espace topologique. Un système de coordonnées de X à valeurs dans G est un recouvrement $\{V_j\}_{j\in J}$ d'ouverts de X et une collection d'applications continues : $\forall i,j \in J \times J,\ g_{j,i} : V_i \cap V_j \to G$ vérifiant : $\forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k,\ g_{k,j}(x)g_{j,i}(x) = g_{k,i}(x)$.*

On remarque que les fonctions $g_{j,i}$ définies dans 4.1 forment un système de coordonnées. On peut se poser la question inverse : étant donné un système de coordonnées $\{g_{i,j}\}$ est-ce qu'il existe un G-fibré ayant X comme base, et les fonctions $\{g_{i,j}\}$ comme transformations de coordonnées. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Proposition 4.12. *Soit G un groupe topologique agissant de manière continue et effective sur Y, soit $\{V_j\}$, $\{g_{i,j}\}$ un système de coordonnées de l'espace B, alors il existe un G-fibré $\mathcal{B}$ ayant pour base B, pour fibre Y, et comme transformations de coordonnées les fonctions $\{g_{i,j}\}$. Deux tels G-fibrés ayant les mêmes systèmes coordonnées sont équivalents.*

Démonstration. Soit $T \subset X \times Y \times J$ l'ensemble des triplets (x, y, j) tel que $x \in V_j$. On définit comme relation sur T : $(x, y, j) \sim (x', y', k)$ si $x = x'$, $g_{k,j}(x).y = y'$. On définit l'espace topologique B comme étant l'ensemble des classes d'équivalence de $(T, \sim)$, puis on munie B de la topologie quotient. Soit $q : T \to B$ la projection, alors on a une application : $p : B \to X$ qui associe à chaque classe d'équivalence du triplet (x, y, j) l'élément x. Il est clair que p est bien définie et continue. On définit les fonctions coordonnées de la manière suivante :

$$\psi_j(x, y) = q(x, y, j), \ (x, y) \in V_j \times Y$$

Puis on peut vérifier avec ces fonctions coordonnées que l'on a bien définie un G-fibré où les transformations de coordonnées sont bien les fonctions $g_{i,j}$. On admettra l'unicité (à équivalence près) du G-fibré ayant ces transformations de coordonnées, on pourra consulter [7] pour avoir plus de précisions. □

Réduction du groupe structural : à partir d'un G-fibré $\mathcal{B}$ on peut se poser la question de savoir si on ne peut pas trouver un nouveau recouvrement $\{V_i\}$ de B, tel que les fonctions $g_{i,j}$ soient à valeurs dans un sous-groupe H de G, si c'est le cas on dit que l'on réduit le groupe structural et on obtient de la sorte un H-fibré.

Remarque 4.13. *Lorsque l'on arrive à réduire un G-fibré en un K-fibré où K est le sous-groupe trivial de G alors le G-fibré est en fait trivial, c'est à dire que l'on peut choisir comme ouvert V_i l'espace B (la base). Un exemple typique de $\{e\}$-fibré trivial est celui donné par la projection canonique : $p : B \times F \to B$, qui a pour fibre F et pour fonction coordonée : $Id_{B\times F}$.*

Inversement quand peut on élargir le groupe structural ? C'est à dire si l'on a un H-fibré, où H est un sous-groupe de G, on aimerait le considérer comme un G-fibré à l'aide du théorème 4.12, mais l'action de H ne s'étend pas forcément à G.

Dans la suite de ce paragraphe on construit un nouveau type de G-fibré, cette construction est très importante et elle nous servira par la suite :

Soit $\eta : B \to B'$ une application continue, et $\mathcal{B}'$ un G-fibré $p' : X' \to B'$ ayant pour fibre Y et pour système de coordonnées $g_{i,j}$, on construit à partir de η et de $\mathcal{B}'$ un nouveau G-fibré que l'on notera $\eta^*(\mathcal{B}')$, voici cette construction :

Définition 4.14. *Soit $\mathcal{B}'$ un G-fibré, B un espace topologique, $\eta : B \to B'$ une application continue, $p : B \times E' \to B$ et $h : B \times E' \to E'$ les projections canoniques. On définit E comme étant le sous-espace de $B \times E'$, vérifiant : $\forall (b, e) \in E, \ \eta(b) = p'(e)$. On a ainsi un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\eta"] & B' \end{tikzcd}$$

En posant $V_j = \eta^{-1}(V'_j)$ et $\phi_j(x, y) = (x, \phi'_j(\eta(x), y))$, on peut vérifier que $p : E \to B$ est un G-fibré ayant pour fonctions coordonnées ϕ_i, et pour fibre Y, on note ce fibré : $\eta^*(p')$.

Remarques 4.15. • *La construction que nous venons de décrire est très similaire à celle donnée pour les fibrés vectoriels (pour construire des fibrés vectoriels nous n'avions pas besoin d'expliciter des fonctions ϕ_j, mais seulement de vérifier une condition de "trivialité locale").*
•*Une deuxième construction de $\eta^*(\mathcal{B})$ est de prendre comme ouvert $V_j = \eta^{-1}(V'_j)$ et comme transformations de coordonnées sur X les applications $g_{i,j}(x) = g'_{i,j}(\eta(x))$, puis d'invoquer la proposition 4.12.*

Proposition 4.16. *Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux G-fibrés ayant même fibre, soit $h : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un morphisme entre G-fibré, et $\eta : X \to X'$ l'application induite sur les bases. Alors le G-fibré induit $\eta^*\mathcal{B}'$ est équivalent à $\mathcal{B}$.*

Démonstration. voir [7]. □

Proposition 4.17. *Soit $\eta : B \to B'$, $\eta' : B' \to B''$ des applications continues et $\mathcal{B}''$ un G-fibré au dessus de B'', alors le G-fibré $(\eta' \circ \eta)^*\mathcal{B}''$ est équivalent au G-fibré $\eta^*(\eta'^*\mathcal{B}'')$.*

Démonstration. voir [7] □

Définition 4.18. *Un G-fibré de fibre Y est dit principal si : $Y = G$ et si G agit sur Y par translations à gauche.*

Remarque 4.19. *Si $\mathcal{B}'$ est un G-fibré principal alors $\eta^*(\mathcal{B}')$ est encore principal.*

Définition 4.20. *Soit $\mathcal{B}$ un G-fibré on appelle G-fibré principal associé à $\mathcal{B}$ et on note $\tilde{\mathcal{B}}$, le G-fibré défini (à équivalence près) par la proposition 4.12, où l'on choisit comme fibre G, comme transformations de coordonnées les transformations de coordonnées de $\mathcal{B}$, l'action de G sur la fibre est celle donnée par translations à gauche, et la projection $p : E \to B$ est celle de $\mathcal{B}$. Plus généralement soit F' un espace topologique munie d'une action continue et effective à gauche de G alors le fibré associé à $\mathcal{B}$ de fibre F' est le fibré défini à équivalence près par la proposition 4.12 où l'on choisit comme fibre F' et pour action l'action de G sur F'.*

Soit $\mathcal{B}$ un G-fibré de fibre Y et $\tilde{\mathcal{B}}$ son G-fibré principal associé. Soit $q : \tilde{E} \times Y \to \tilde{E}$ la projection canonique, alors q peut-être vu comme un H-fibré ou H est le groupe trivial. Mais q peut aussi être vu comme un G-fibré de fibre Y que l'on notera $\tilde{\mathcal{B}} \times Y$. On définit un morphisme de G-fibrés $P : \tilde{\mathcal{B}} \times Y \to \mathcal{B}$ (qui sera appelé application principal) de la manière suivante : soit $(\tilde{b}, y) \in \tilde{E} \times Y$ alors $P(\tilde{b}, y) = \phi_i(x, \tilde{p}_i(\tilde{b}).y)$, où $x := \tilde{p}(\tilde{b}) \in V_i$. Supposons que $x \in V_i \cap V_j$, alors

$$\phi_{i,x}(\tilde{p}_i(\tilde{b}).y) = \phi_{j,x}(g_{j,i}(x).\tilde{p}_i(\tilde{b}).y) = \phi_{j,x}(\tilde{p}_j(\tilde{b}).y)$$

Donc P définie bien un morphisme entre fibré. Regardons le cas particulier où $\mathcal{B}$ est un G-fibré principal, alors $\forall g \in G$ on a une application :

$$\begin{array}{cccc} g : & E & \to & E \\ & b & \mapsto & \phi_i(x, p_i(b)g) \quad \textit{où } x = p(b) \in V_i \end{array}$$

On remarque que grâce à ces applications g on a une action à droite de G sur E, vu la formule cette action est clairement continue. Donc les fonctions g sont des homéomorphismes de E, en plus on remarque que g préserve les fibres, ce qui implique la proposition 4.21 :

Proposition 4.21. *Soit $p : E \to B$ un G-fibré principal, alors : G agit sur E et p induit un homéomorphisme entre E/G et B.*

La fin de cette sous-section est consacrée à quelques lemmes qui nous serons utiles pour la prochaine sous-section de ce chapitre :

Définition 4.22. *Soit G un sous groupe fermé d'un groupe topologique B, et $p : B \to B/G$ l'application canonique qui à un élément associe sa classe à gauche. Soit x_0 l'image d'un élément de G par l'application p. Une section locale de G dans B est une application continue $f : V \to B$ vérifiant $\forall x \in V$, $p \circ f(x) = x$, où V est un voisinage de $x_0 \in B/G$.*

Théorème 4.23. *Si G est un sous groupe fermé de B qui admet une section locale f, et si $H \subset G$ est un autre sous-groupe fermé de G. Soit $p : B/H \to B/G$ l'application qui associe à la classe xH la classe xG dans B/G. On peut trouver une structure de G/H_0-fibré de fibre G/H à la projection p, où*

$$H_0 = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

De plus si l'on choisit une autre section locale f' alors les deux structures de G/H_0-fibré sur p sont équivalentes. Les translations à gauche de B/H par des éléments de B sont des endomorphismes de ce fibré.

Démonstration. voir [7] □

Corollaire 4.24. *Soit G et H deux sous-groupes de Lie de B avec $H \subset G$ alors l'application $p : B/H \to B/G$ est un G/H_0-fibré (de fibre G/H).*

Démonstration. Tout groupe de Lie possède une section locale, donc ce corollaire est immédiat d'après le théorème précédent. □

Exemples 4.25. *On a les fibrés principaux suivants :*
•$O(k) \to O(n)/O(n-k) \to G_k(\mathbb{R}^n)$
•$SO(k) \to SO(n)/SO(n-k) \to \widetilde{G_k}(\mathbb{R}^n)$
•$U(k) \to U(n)/U(n-k) \to G_k(\mathbb{C}^n)$

Théorème 4.26. *Soit X et X' des CW-complexes, $\mathcal{B}'$ un G-fibré au dessus de X' et $\mathcal{B}$ un G-fibrés au dessus de X. Soit h_0, h_1 deux applications homotopes de X dans X', alors les G-fibrés $h_0^*(\mathcal{B})$, $h_1^*(\mathcal{B})$ sont équivalents.*

Démonstration. Admis voir [7] □

Corollaire 4.27. *Si X a même type d'homotopie qu'un point alors tous les G-fibrés au dessus de X sont triviaux.*

Démonstration. La preuve est immédiate vu le théorème 4.26. $\square$

Proposition 4.28. *Soit $p : E \to B$ un G-fibré, alors $p_* : \pi_n(E, Y_0, y_0) \to \pi_n(B, x_0)$ est un isomorphisme pour $n \geq 2$, où Y_0 est la fibre au dessus du point x_0, et $y_0 \in Y_0$.*

Démonstration. voir [7] $\square$

4.2 Classification des G-fibrés principaux, construction de BG

Définition 4.29. *Soit $\mathcal{B}$ un G-fibré principal au dessus d'un espace X, on dit que $\mathcal{B}$ est n-universel si : pour tous n-complexe K, tous sous-complexe L de K, et tous G-fibré principaux $\mathcal{B}'$ au dessus de K, toutes applications h de $\mathcal{B}'|_L$ dans $\mathcal{B}$ s'étend a une application de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Remarque 4.30. *Dans cette définition on peut choisir $L = \varnothing$, ainsi il existe toujours un morphisme entre G-fibré $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$.*

Définition 4.31. *Soit $\mathcal{B} = \{B, p, X, Y, G, V_j, \phi_j\}$ un G-fibré, alors on peut former un G-fibré : $\mathcal{B} \times I = \{B \times I, q, X \times I, Y, G, V_j \times I, \psi_j\}$, où $q(b, t) = (p(b), t)$ et $\psi_j(x, t, y) = (\phi_j(x, y), t)$.*

Théorème 4.32. *Soit $\mathcal{B}$ un G-fibré $(n + 1)$-universel, B sa base et K un CW-complexe de dimension n. L'opération qui à toute application $f : K \to B$ associe son fibré induit, définit une bijection entre les classes d'homotopie des applications de K dans B et les classes d'équivalence de G-fibré principaux au desssus de K.*

Démonstration. Par le théorème 4.26 deux applications homotopes de K dans X induisent des G-fibrés équivalents. Donc à chaque classe d'homotopie on peut associer une classe d'équivalence de G-fibré, ainsi cette correspondance est bien définie. Comme on l'a observé grâce à la définition 4.29 tout G-fibré principale $\mathcal{B}'$ au dessus de K admet un morphisme $h : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$. Si $f : K \to X$ est l'application induite par ce morphisme, alors $\mathcal{B}'$ est équivalent au G-fibré induit par f de $\mathcal{B}$ par la proposition 4.16. Afin de terminer la preuve de ce théorème on doit encore montrer la chose suivante : si $f_0, f_1 : K \to X$ induisent deux G-fibrés équivalents $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$, alors f_0 est homotope à f_1. En notant $h_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}$ l'application induite pour $i = 0, 1$ et $h : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1$ l'équivalence entre ces 2 G-fibrés. Alors en formant le G-fibré $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \times I$ (voir la définition 4.31), on a un morphisme évident entre G-fibré $r : \mathcal{B}_0 \times I \to \mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B}'_0$ et $\mathcal{B}'_1$ les G-fibrés au dessus de $K \times \{0\}$ et $K \times \{1\}$. Soit $r_i = r|_{\mathcal{B}'_i}$ pour $i = 0, 1$, on définit $h' : \mathcal{B}'_0 \cup \mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}$ par $h'|_{\mathcal{B}'_0} = h_0 \circ r_0$ et $h'|_{\mathcal{B}'_1} = h_1 \circ h \circ r_1$. h' est clairement un morphisme entre G-fibrés. De plus on peut montrer que $K \times I$ est un $(n+1)$-complexe. $\mathcal{B}$ est $(n+1)$-universel, par conséquent h' s'étend à un morphisme $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$. L'application induite : $K \times I \to X$ est l'homotopie recherchée. $\square$

Théorème 4.33. *Un G-fibré principal $\mathcal{B}$ est n-universel si et seulement si B est connexe par arcs et $\pi_i(E) = 0$ pour $1 \leq i < n$.*

Démonstration. voir [7] $\square$

Lemme 4.34. *Si $1 \leq n \leq m$ alors O_m/O_n est connexe par arcs, et $\pi_i(O_m/O_n) = 0$, pour $1 \leq i < n$*

Démonstration. Si $n \geq 1$ alors $O_n \setminus SO_n$ est non vide, et donc comme O_n contient des éléments des deux composantes connexes de O_m, alors O_n/O_m est connexe par arcs. Soit $f : (I^i, \dot{I}^i, e) \to (O_k, O_n, e)$ une fonction continue avec $n < k \leq m$, et $p : O_k \to O_k/O_{k-1}$ la projection canonique. Comme S^{k-1} est homéomorphe à O_k/O_{k-1} alors si $i < k-1$, $p \circ f$ est homotope à l'application constante et $p \circ f(\dot{I}^i)$ ne bouge pas durant cette homotopie. Ainsi f est homotope à une application $f' : (I^i, \dot{I}^i, e) \to (O_{k-1}, O_n, e)$, en appliquant cet argument successivement pour $k = m, m-1, ..., n+1$, alors on conclut que $\pi_i(O_m, O_n) = 0$ pour $2 \leq i < n$. Tant que O_m est un O_n-fibré au dessus de O_m/O_n alors d'après la proposition 4.28 on a que $\pi_i(O_m/O_n) = 0$ pour $2 \leq i < n$. Il reste le cas $i = 1$, mais si $f : ([0,1], \{0,1\}) \to (O_m/O_n, \{e\})$ alors on peut relever ce lacet en un chemin $\tilde{f}$: $([0,1], \{0,1\}) \to (O_m, O_n)$, puis en utilisant le même argument que précédemment (ici $\pi_1(O_k, O_{k-1}) = 0$) pour $k-1 \geq 2$) alors $\tilde{f}$ est homotope à une application dans O_{k-1} pour $k-1 \geq 2$. Ainsi en utilisant le fait que $\pi_1(S^{k-1}) = 0$ si $k-1 \geq 2$ on obtient que le chemin $p \circ \tilde{f} = f$ se contracte en un point. D'où $\pi_1(O_m/O_n) = 0$ si $n > 2$.

$\square$

Théorème 4.35. *Soit G un groupe de Lie compact, alors pour chaque entier n il existe un G-fibré n-universel.*

Démonstration. Par un résultat classique G est isomorphe à un sous groupe du groupe orthogonal O'_k pour k suffisamment grand (voir [2]). On pose $m = n + k$, on considère O'_k comme un sous groupe de O_m qui opère trivialement sur les n premières coordonnées, ainsi les sous groupes O_n et O'_k de O_m commutent, et on peut identifier leur produit $O_n \times O'_k$ avec un sous-groupe de O_m. De plus comme $G \subset O'_k$ alors $O_n \times G$ est aussi un sous groupe de O_m. On note $B = O_m/O_n$ et $X = O_m/(O_n \times G)$, alors d'après le proposition 4.24 $p : B \to X$ a une structure de G/H_0-fibré où

$$H_0 = \bigcap_{g \in O_n \times G} g O_n g^{-1} = \bigcap_{g \in O_n \times G} O_n = O_n$$

D'où $G/H_0 \simeq G$, de plus la fibre est $O_n \times G/O_n \simeq G$, et ce fibré est principal car l'action s'identifie à l'action par translations à gauche de G sur lui même par la proposition 4.24. De plus on remarque grâce au lemme 4.34 et au théorème 4.33 que ce fibré est n-universel. $\square$

On remarque que O_m/O_n s'injecte de manière canonique dans O_{m+1}/O_{n+1}, en particulier on peut vérifier que cette application induit un morphisme "injectif" entre G-fibré principaux.

Théorème 4.36. *Il existe un G-fibré principal $\mathcal{B}G$ (dont on note la base BG), tel que pour tout CW-complexe X, l'application suivante soit une bijection :*

$$\begin{array}{ccc} [X, BG] & \to & \{G - fibré\ principal\ au\ dessus\ de\ X\ à\ équivalence\ près\} \\ f & \mapsto & f^*(\mathcal{B}G) \end{array}$$

Démonstration. En notant $\mathcal{B}_n$ le G-fibré n-universel, et en considérant $\mathcal{B}G = \lim\limits_{\to} \mathcal{B}_n$ on remarque que $\mathcal{B}G$ a son espace total qui a tous ses groupes d'homotopie nuls. Donc en particulier d'après le théorème 4.33 on en déduit qu'il est n-universel pour tout entier n, ainsi il vérifie les hypothèses du théorème 4.32 pour tout entier n. $\square$

Théorème 4.37. *BG est unique à homotopie près.*

Démonstration. Supposons qu'un deuxième CW-complexe $\tilde{BG}$ soit un espace classifiant pour le groupe de Lie compact G, alors on a les ensembles : $\{G$-fibré principal au dessus de BG à équivalence près $\}$ et $\{G$-fibré principal au dessus de $\tilde{BG}$ à équivalence près $\}$ qui sont non vides, ainsi il existe $[f] \in [BG, \tilde{BG}]$, et $[g] \in [\tilde{BG}, BG]$ qui représentent deux classes d'homotopie de f et g respectivement, tel que si l'on applique le théorème 4.36 avec $X = BG$ pour f on obtienne comme G-fibré $\tilde{EG} \to \tilde{BG}$, et si l'on applique ce même théorème avec $X = \tilde{BG}$ pour g on obtienne $EG \to BG$. On a ainsi que la classe d'homotopie $[g \circ f] \in [BG, BG]$ représentée par $g \circ f$ a pour image d'après la correspondance du théorème 4.36 un G-fibré équivalent à $EG \to BG$ car $(g \circ f)^*(\mathcal{B}G) = f^* \circ g^*(\mathcal{B}G)$ (ces 2 fibrés sont équivalents), donc $g \circ f$ est homotope à l'identité et en appliquant le même type de raisonnement $f \circ g$ est homotope à l'identité et donc BG et $\tilde{BG}$ ont même type d'homotopie. $\square$

Remarque 4.38. • *On aurait pu montrer l'existence d'un espace BG pour G un groupe topologique quelconque, c'est ce que fait Milnor dans l'article [4]. L'avantage que nous avons avec la construction que nous avons faite de BG c'est que l'on reconnaît immédiatement que lorsque $G = O_k$ alors $BG = G_k(\mathbb{R}^\infty)$.*
• *Le désavantage que nous avons avec la construction que nous venons d'effectuer, c'est que la fonctorialité de B n'est pas si claire : à partir d'un morphisme de groupes topologiques $\psi : G \to H$ comment construire une application continue : $\psi_* : BG \to BH$? Nous répondrons à cette question dans le prochain paragraphe.*

4.3 Quelques exemples et propriétés de certains BG

On calcule immédiatement certains espaces BG, il y a pleins de groupes de Lie (même non compact) pour lesquels il est facile connaître le type d'homotopie de BG, voici une liste (non exhaustive) :

1. $G = \mathbb{Z}_2$ alors $BG = \mathbb{R}P^\infty$, $EG = \mathbb{S}^\infty$

2. $G = \mathbb{Z}_n$ alors $BG = (\lim\limits_{\to} \mathbb{S}^{2n+1})/(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{S}^\infty/(\mathbb{Z}_n)$, $EG = \lim\limits_{\to} \mathbb{S}^{2n+1} = \mathbb{S}^\infty$, les racines n-ième de l'unité agissent naturellement sur les sphères de dimensions impaires, d'où un revêtement régulier : $\mathbb{S}^\infty \to (\mathbb{S}^\infty)/(\mathbb{Z}_n)$, avec $\mathbb{S}^\infty$ contractile.

3. $G = \mathbb{Z}$ alors $BG = \mathbb{S}^1$, $EG = \mathbb{R}$ car on a le revêtement bien connu : $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ avec $\mathbb{R}$ qui est contractile.

4. $G = \mathbb{S}^1$ alors $BG = \mathbb{C}P^\infty$, $EG = \lim\limits_{\to} \mathbb{S}^{2n+1}$ car on a un fibré de la forme $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$. De plus les inclusions $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+3}$ induisent les inclusions $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{n+1}$. D'où un fibré principal : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$, avec $\mathbb{S}^\infty$ qui est contractile.

5. $G = O_k(\mathbb{R})$, *ou* $GL_k(\mathbb{R})$ alors $BG = G_k(\mathbb{R}^\infty)$, $EG = V_k(\mathbb{R}^\infty)$, pour voir cela il suffit de reprendre la preuve du théorème 4.35 et de remplacer G par $O_k(\mathbb{R})$.

6. $G = SO_n(\mathbb{R})$ alors $BG = \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)$, $EG = V_n(\mathbb{R}^\infty)$

7. $G = U_n(\mathbb{C})$ alors $BG = G_n(\mathbb{C}^\infty)$, $EG = V_n(\mathbb{C}^\infty)$

Proposition 4.39. *Soit $p_G : EG \to BG$ et $p_H : EH \to BH$ deux fibrés universels alors $B(G \times H)$ a même type d'homotopie que $BG \times BH$.*

Démonstration. On peut monter que l'on a un $G \times H$-fibré principal $p_G \times p_H : EG \times EH \to BG \times BH$ comme $EG \times EH$ est contractile (car le produit de deux espaces contractiles est contractile), alors on a le résultat voulu. $\square$

On peut se poser la question suivante : A partir d'un morphisme entre groupes topologiques $\psi : G \to H$ comment construire une application continue $\psi_* : BG \to BH$? On donne ici une construction de ψ_* : On remarque que G agit sur $EG \times EH$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} G \times EG \times EH & \to & EG \times EH \\ (g, u, v) & \mapsto & (g.u, \psi(g).v) \end{array}$$

On peut aussi montrer que l'application $\pi : EG \times EH \to (EG \times EH)/G$ est en faites un G-fibré principal, or $EG \times EH$ est contractile car EG et EH sont contractiles. Donc $BG = (EG \times EH)/G$. On a de plus une application $proj : (EG \times EH)/G \to EH/G$, où G agit sur EH de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} G \times EH & \to & EH \\ (g,u) & \mapsto & \psi(g).u \end{array}$$

De plus l'application canonique $EH \to EH/H$ se factorise par $s : EH/G \to EH/H$ ($EH/H = BH$). Ainsi $s \circ proj : BG \to BH$ ne dépend que de ψ, ainsi $\psi_* = s \circ proj$.
Pour finir, on calcule les groupes d'homotopie de BG dans certains cas particuliers, à l'aide du théorème suivant :

Théorème 4.40. *Suite exacte longue en homotopie d'un fibré : Soit $\mathcal{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ un G-fibré, $y_0 \in Y_0 = p^{-1}(b_0)$ alors on a une suite exacte de la forme :*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(Y_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\triangle} \pi_{n-1}(Y_0, y_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(B, b_0) \xrightarrow{\triangle} \pi_1(Y_0, y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$$

Démonstration. On pourra consulter [7]. □

En particulier ce dernier théorème implique que si la fibre Y est discrète (ou contractile) alors $\forall n \geq 2,\ \pi_n(B) \simeq \pi_n(X)$. D'où le théorème suivant :

Théorème 4.41. *Soit G un groupe topologique discret alors $\forall n \neq 1,\ \pi_n(BG)$ est trivial.*

On suppose G discret, si $p : EG \to BG$ est un G-fibré principal universel (donc aussi un revêtement), tel qu'il existe une structure de CW-complexe sur EG où G agisse librement et transitivement sur les k-cellules pour tous k entier. Alors une résolution projective de $\mathbb{Z}$ est :

$$\cdots \longrightarrow C_k(EG, A) \longrightarrow C_{k-1}(EG, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(EG, A) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ainsi en appliquant le foncteur $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(, A)$ (où G agit trivialement sur A et $\mathbb{Z}$) en obtient que $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_i(EG), A) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_i(BG), A) = C^i(BG, A)$. Donc : $Ext^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) = H^i(BG, A)$, ce qui permet d'expliquer pourquoi on peut dire que la cohomologie de G est la cohomologie singulière de BG. Cependant le problème de cette construction c'est qu'il n'y a pas de structure d'anneaux évidente sur $Ext^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ (en plus de cela elle n'est définie que pour les groupes discrets).

5 Opérations de Steenrod : Sq^k

On explique dans ce chapitre les opérations de Steenrod, qui seront utilisées ultèrieurement. Ici la cohomologie sera à coefficient dans le corps $\mathbb{Z}_2$. On ne prouvera pas l'existence ni l'unicité de ces opérations, cela en partie dû au faite que l'on ne se sert jamais de cette construction, mais uniquement des propriétés qui sont données dans cette première définition-proposition :

Définition 5.1. *Pour toute paire d'espaces topologiques $Y \subset X$ et tout couple d'entier naturel (i, j) il existe un homomorphisme de groupes :*
$Sq^i : \ H^n(X, Y) \ \rightarrow \ H^{n+i}(X, Y)$
vérifiant les axiomes suivants :

1. *Naturalité : si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ alors $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$*
2. *Si $a \in H^n(X, Y)$, alors $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \cup a$, et $Sq^i(a) = 0$ pour $i > n$.*
3. *On a l'identité (appelée formule de Cartan) :*

$$Sq^k(a \cup b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \cup Sq^j(b)$$

Lorsque $a \cup b$ est bien définie.

On admettra l'existence de tels homomorphismes, on pourra trouver une construction dans [3].

On remarque que pour toute application continue $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ on a le diagramme commutatif suivant (grâce à l'axiome 2) :

$$\begin{tikzcd} H^i(X', Y') \arrow[r, "Sq^j"] \arrow[d, "f^*"] & H^{i+j}(X', Y') \arrow[d, "f^*"] \\ H^i(X, Y) \arrow[r, "Sq^j"] & H^{i+j}(X, Y) \end{tikzcd}$$

ainsi on peut voir ces opérations comme des transformations naturelles entre les foncteurs H^* et H^{*+j}. Il est intéressant de considérer l'opération de Steenrod totale :

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + ... + Sq^n(a)$$

Ainsi on peut montrer grâce à la formule de Cartan la formule suivante :

$$Sq(a \cup b) = Sq(a) \cup Sq(b)$$

On énonce un lemme :

Lemme 5.2. *Si A et B sont deux sous-ensembles ouverts de $A \cup B$ alors on peut définir un produit :*

$$H^m(X,A) \otimes H^n(X,B) \to H^{m+n}(X, A \cup B)$$

Démonstration. Soit $C^i(X,A,B) \subset C^i(X)$ l'intersection des sous-modules $C^i(X,A)$ et $C^i(X,B)$ de $C^i(X)$. Soit c et c' deux cochaines de $C^m(X,A)$ et $C^n(X,B)$, le produit cc' appartient à $C^{m+n}(X,A,B)$. On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \to C^*(X, A \cup B) \to C^*(X,A,B) \to C^*(A \cup B, A, B) \to 0$$

On peut montrer que le complexe $C^*(A \cup B, A, B)$ est acyclique , voir [5]. Ce qui implique que l'inclusion $C^*(X, A \cup B) \to C^*(X,A,B)$ est un isomorphisme en cohomologie. Donc on obtient bien l'application bilinéaire voulu. □

Soit $p_1 : (X \times Y, A \times Y) \to (X,A)$ et $p_2 : (X \times Y, X \times B) \to (Y,B)$ les projections canoniques avec $A \subset X$ et $B \subset Y$ des ouverts. Soit $(a,b) \in H^k(X,A) \times H^l(Y,B)$ alors on définit $a \times b = p_1^*(a) \cup p_2^*(b)$ qui est une classe de $H^{l+k}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ d'après le lemme 5.2. On peut montrer que l'on a la formule :

$$Sq(a \times b) = Sq(a) \times Sq(b)$$

.

6 Les classes de Stiefel-Whitney

On introduit dans ce chapitre ce que l'on appelle les classes de Stiefel-Whitney, dans tout ce chapitre les fibrés vectoriels seront réels. L'importance de ces classes sera justifiée au chapitre suivant, lorsque nous calculerons la cohomologie de $BSO(n)$ et de $BO(n)$. Les définitions, propositions, et preuves proviennent du livre [5]. L'unicité de ces classes sera prouvé au chapitre suivant, dans ce chapitre nous ne montrerons que l'existence de ces classes.

Définition 6.1. *Soit ξ un fibré vectoriel réel, il existe des classes $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi))$, $i = 0, 1, 2, ...$ appelées classes de Stiefel-Whitney de ξ vérifiant les axiomes suivants :*

1. *$w_0(\xi) = 1$, et $w_i(\xi) = 0$ pour $i > n$. (où ξ est de rang n)*
2. *Naturalité : Si $f : \xi \to \eta$ est un morphisme de fibré vectoriel alors :*

$$w_i(\xi) = \overline{f}^* w_i(\eta), \text{ pour tous les } i$$

3. *Si ξ et η sont des fibrés vectoriels au dessus de la même base, alors*

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

4. *La première classe de Stiefel-Whitney du fibré en droites γ_1^1 au dessus de $\mathbb{R}P^1$ est non nulle. ($w_1(\gamma_1^1) \neq 0$)*

Définition 6.2. *On appelle classe totale de Stiefel-Whitney d'un fibré vectoriel réel ξ de rang n, la classe $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + ... + w_n(\xi)$. On a :*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$$

Remarques 6.3. *•L'importance des classes de Stiefel-Whitney est résumée dans ces 4 axiomes.*
• Si ξ est un fibré vectoriel trivial alors $w(\xi) = 1$ (conséquence de l'axiome 2).
• Si ξ est isomorphe à η alors $w(\xi) = w(\eta)$ (où ξ et η ont la même base).

On énonce quelques propositions techniques avant de commencer à montrer que les classes w_i vérifient les 4 axiomes :

6.1 Quelques lemmes techniques

Théorème 6.4. *Soit E l'espace total d'un fibré vectoriel ξ, et $E_0 = E \setminus s(B)$ où s est la section nulle. Alors on a l'isomorphisme :*

$$\begin{array}{rccc} \cup u : & H^k(E) & \to & H^{k+n}(E, E_0) \\ & x & \mapsto & x \cup u \end{array}$$

pour chaque k, où u est l'unique classe de cohomologie en degré n de $H^*(E, E_0)$ tel que $u|_{(F,F_0)} \in H^n(F, F_0)$ soit non nulle pour toute fibre $F = \pi^{-1}(b)$ (avec $F_0 = F \cap E_0$). De plus on peut montrer que $u|_E = \pi^*(w_n(\xi))$.

Démonstration. voir [5] $\square$

Remarque 6.5. *La multiplication (ou encore le cup-produit) est définie directement à partir des cochaines par la formule :*

$$< cc', \sigma >= (-1)^{mn} < c, \sigma \circ \alpha_m > . < c', \sigma \circ \beta_n >, \ (c, c', \sigma) \in C^n(X) \times C^m(X) \times C_{n+m}(X)$$

Où $\alpha_m(t_0, ..., t_m) = (t_0, ..., t_m, 0, ..., 0)$ *et* $\beta_n(t_m, ..., t_{m+n}) = (0, ..., 0, t_m, ..., t_{m+n})$. *Ainsi il est clair que si* $(c, c') \in C^n(X, A) \times C^m(X)$ *alors* $cc' \in C^{n+m}(X, A)$ *(avec* $C^k(X, A) = C^k(X)/C^k(A)$ *pour chaque entier naturel* k*). Ce qui explique en particulier pourquoi l'application* $\cup u$ *du théorème 6.4 est bien définie. On a aussi que* $(F, F_0) \simeq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$*, ainsi on en déduit que* $H^n(F, F_0)$ *a une unique classe non nulle, où* n *est le rang du fibré vectoriel considéré.*

Notation 6.6. *On remarque que* $\pi : E \to B$ *est une équivalence d'homotopie. Par conséquent* $\phi = \psi \circ \pi^*$ *est un isomorphisme entre* $H^k(B)$ *et* $H^{k+n}(E, E_0)$*, cet isomorphisme est appelé l'isomorphisme de Thom.*

D'après la suite exacte 6.8 on a un isomorphisme $\delta : H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) \to H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-)$ (car $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$ et $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$) par excision on a un autre isomorphisme $H^0(\mathbb{R}^+) \to H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$, notons e la classe de $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ qui correspond via ces isomorphismes à $1 \in H^0(\mathbb{R}_+)$. Notons $e^n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$ la classe $e \times e \times ... \times e$ (n fois). On démontre le théorème suivant :

Théorème 6.7. *Pour toute paire* (X, A) *avec* A *ouvert dans* X*, on a un isomorphisme :* $\begin{array}{ccc} H^m(X, A) & \to & H^{m+n}(X \times \mathbb{R}^n, A \times \mathbb{R}^n_0) \\ a & \mapsto & a \times e^n \end{array}$

Démonstration. On remarque qu'il suffit de considérer le cas $n = 1$, puis en effectuant une récurrence et en remarquant que $a \times e^n = (a \times e^{n-1}) \times e$ alors on en déduit le théorème. 1er cas : $n = 1$ et $A = \varnothing$. Fixons les notations suivantes : $i : (X \times \mathbb{R}_+, \varnothing) \to (X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-)$, $\tilde{i} : (X \times \mathbb{R}_+, \varnothing) \to (X \times \mathbb{R}_0, \varnothing)$ et $\tilde{\tilde{i}} : (\mathbb{R}_+, \varnothing) \to (\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$ les inclusions canoniques, $p : (X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-) \to (\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$, $\tilde{p} : (X \times \mathbb{R}_+, \varnothing) \to (\mathbb{R}_+, \varnothing)$, et $\pi : (X \times \mathbb{R}_0, \varnothing) \to (X, \varnothing)$ les projections canoniques, alors on a clairement : $p \circ i = \tilde{\tilde{i}} \circ \tilde{p}$ d'où $i^* \circ p^* = \tilde{p}^* \circ \tilde{\tilde{i}}^*$ ainsi :

$$\begin{aligned}
\tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup \tilde{p}(\tilde{\tilde{i}}^*(u)) &= \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup (p \circ i)^*(u) \\
\Rightarrow \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup \tilde{p}(\tilde{\tilde{i}}^*(u)) &= \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup i^*(p^*(u)) \\
\Rightarrow \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup \tilde{p}(\tilde{\tilde{i}}^*(u)) &= i^*(\pi^*(a)) \cup i^*(p^*(u)) \ (\textit{ici } \pi^*(a) \in H^m(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-)) \\
\Rightarrow \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup \tilde{p}(\tilde{\tilde{i}}^*(u)) &= i^*(\pi^*(a) \cup p^*(u)) \\
\Rightarrow \tilde{i}^*(\tilde{\pi}^*(a)) \cup \tilde{p}(\tilde{\tilde{i}}^*(u)) &= i^*(p^*(u) \cup \pi^*(a)) \ (\textit{la cohomolgie est à coefficient dans } \mathbb{Z}_2)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{R}_+) \arrow[d, "a\times"] & H^0(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-) \arrow[l, "\tilde{\tilde{i}}^*"'] \arrow[d, "a\times"] \\
H^m(X\times\mathbb{R}_+) & H^m(X\times\mathbb{R}_0, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[l, "i^*"']
\end{tikzcd}$$

Appliquons la suite exacte de 6.8 avec $A=\mathbb{R}_-,\ B=\mathbb{R}_0,\ C=\mathbb{R}$ on récupère un morphisme de groupes : $\delta : H^0(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-)\to H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$, puis appliquons une deuxième fois cette suite exacte avec $A=X\times\mathbb{R}_-,\ B=X\times\mathbb{R}_0,\ C=X\times\mathbb{R}$ on récupère un deuxième morphisme de groupes : $\delta' : H^m(X\times\mathbb{R}_0,X\times\mathbb{R}_-)\to H^{m+1}(X\times\mathbb{R},X\times\mathbb{R}_0)$. δ est un isomorphisme (car $H^*(\mathbb{R},\mathbb{R}_-)=0$), δ' est aussi un isomorphismes (car $X\times\mathbb{R}$ et $X\times\mathbb{R}_-$ contiennent $X\times\{constante\}$ comme rétracte par déformation donc $H^*(X\times\mathbb{R},X\times\mathbb{R}_-)=0$). D'où le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{R}_+) \arrow[d, "a\times"] & H^0(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-) \arrow[l, "\tilde{i}^*"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "a\times"] & H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0) \arrow[d, "a\times"] \\
H^m(X\times\mathbb{R}_+) & H^m(X\times\mathbb{R}_0, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[r, "\delta'"] & H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0)
\end{tikzcd}$$

ainsi $\delta'\circ i^{*-1}(a)=a\times e_1$ et donc on a bien un isomorphisme comme annoncé. 2ème cas : $n=1$ et $A\neq\varnothing$, alors : choisissons $z\in Z^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$ une cochaine qui représente e, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^m(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & C^m(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & C^m(A) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0, A\times\mathbb{R}) \arrow[r] & C^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0) \arrow[r] & C^{m+1}(A\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les lignes sont exactes. De plus ces morphismes commutent avec le cobord δ. D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H^m(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^m(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^m(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\times e"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0, A\times\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0) \arrow[r] & H^{m+1}(A\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}_0) \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. D'après le cas 1 les flèches verticales de droites sont des isomorphismes, ainsi par le lemme des 5 on a la flèche de gauche qui est un isomorphisme. $\square$

On rappelle le résultat suivant (qui est fort utile en topologie algébrique) :

Théorème 6.8. *Soit (C, A, B) avec $B \subset A \subset C$, en notant $i : (C, B) \to (C, A)$ et $j : (A, B) \to (C, B)$ les inclusions canoniques alors il existe une suite exacte longue en cohomologie de la forme :*

$$\cdots \longrightarrow H^n(C,A) \xrightarrow{i^*} H^n(C,B) \xrightarrow{j^*} H^n(A,B) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C,A) \longrightarrow \cdots$$

où $\delta = \delta' \circ u^*$ avec $u : (A, \varnothing) \to (A, B)$ l'inclusion canonique et $\delta' : H^n(A) \to H^{n+1}(C, A)$ le cobord de la suite exacte longue en cohomologie de la paire (C, A).

Démonstration. Dans [3] par exemple. □

6.2 Existence des classes de Stiefel-Whitney

On montre l'existence des classes de Stiefel-Whitney en posant $w_i(\xi) = \phi^{-1} \circ Sq^i \circ \phi(1)$, on vérifie que ces classes de cohomologies vérifient bien les 4 axiomes de la définition 6.1 :

Démonstration.

AXIOME 1 : $\phi(1) \in H^n(E, E_0)$ or d'après l'axiome 2 des opérations de Steenrod si $i > n$ alors $Sq^i \circ \phi(1) = 0$ et donc $w_i(\xi) = 0$ comme annoncé. Et toujours d'après l'axiome 2 des opérations de Steenrod $w_0(\xi) = 1$.

AXIOME 2 : Soit $f : \xi \to \xi'$ une application entre fibrés vectoriels, alors elle induit une application $g : (E, E_0) \to (E', E'_0)$, qui elle même induit un homéomorphisme $g_0 : (F, F_0) \to (F', F'_0)$. Et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & (F',F'_0) \arrow[dr, "i'"] & \\ (F,F_0) \arrow[ur, "g_0"] \arrow[r, "i"] & (E,E_0) \arrow[r, "g"] & (E',E'_0) \end{tikzcd}$$

qui induit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & H^n(F',F'_0) \arrow[dl, "{g_0}^*"', "\simeq"] & \\ H^n(F,F_0) & H^n(E,E_0) \arrow[l, "i^*"'] & H^n(E',E'_0) \arrow[l, "g^*"'] \arrow[ul, "i'^*"'] \end{tikzcd}$$

Soit u' la classe non nulle de $H^n(E', E'_0)$, alors $i'^{*-1} \circ {g_0}^{*-1} \circ i^* \circ g^*(u') = u'$ d'après le diagramme ci-dessus, ainsi on en déduit que $g^*(u') \neq 0$, d'où $g^*(u') = u$. Cela implique aussi que $\phi \circ \overline{f}^* = g^* \circ \phi'$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Sq^i \circ \phi \circ \overline{f}^*(1) &= Sq^i \circ g^* \circ \phi'(1) \\
\Rightarrow Sq^i \circ \phi(1) &= g^* \circ Sq^i \circ \phi'(1) \\
\Rightarrow Sq^i \circ \phi(1) &= g^* \circ \phi' \circ \phi'^{-1} Sq^i \circ \phi'(1) \\
\Rightarrow Sq^i \circ \phi(1) &= \phi \circ \overline{f}^* \circ \phi'^{-1} \circ Sq^i \circ \phi'(1) \\
\Rightarrow \phi^{-1} \circ Sq^i \circ \phi(1) &= \overline{f}^* \circ \phi'^{-1} \circ Sq^i \circ \phi'(1) \\
\Rightarrow w_i(\xi) &= \overline{f}^* w_i(\xi')
\end{aligned}$$

D'où l'axiome 2.

AXIOME 3 : Soit ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de rangs respectifs n et m. On a comme fibré vectoriel $\pi \times \pi' : E \times E' \to B \times B'$, on note u et u' les seules classes non nulles de $H^*(E, E_0)$ et $H^*(E', E'_0)$. En notant $u \times u' \in H^{n+m}(E \times E', E \times E'_0 \cup E_0 \times E')$ comme étant le produit de $p_1^*(u)$ avec $p_2^*(u')$ où $p_1 : E \times E' \to E$ et $p_2 : E \times E' \to E'$ sont les projections canoniques. On remarque que $u \times u'$ est la seule classe non nulle de $H^{n+m}(E \times E', E \times E'_0 \cup E_0 \times E')$, pour voir cela il suffit de voir que $i^*(u \times u') \neq 0$ où $i : (F'', F''_0) \to (E'', E''_0)$ est l'injection canonique d'une fibre de $\xi \times \xi'$ (avec $E'' = E \times E'$, $E''_0 = E'' \setminus \{0\} = E \times E'_0 \cup E_0 \times E'$). Mais on a $i^*(u' \times u') = i^*(p_1^*(u)) i^*(p_2^*(u')) = (p_1 i)^*(u) \cup (p_2 i)^*(u')$ or $(p_1 i)^*(u) = i_1^*(u)$ et $(p_2 i)^*(u') = i_2^*(u')$ sont non nuls (où $i_1 : (F, F_0) \to (E, E_0)$ et $i_2 : (F', F'_0) \to (E', E'_0)$ sont respectivement les injections canoniques de deux fibres F et F' respectives des deux fibrés ξ et ξ'), donc d'après le théorème 6.7 $(p_1 i)^*(u) \cup (p_2 i)^*(u') \neq 0$. Ainsi $u \times u'$ est bien la classe non nulle de $H^{n+m}(E \times E', E \times E'_0 \cup E_0 \times E')$. Ensuite si $\overline{a} = \pi^*(a) \in H^*(E)$ et $\overline{b} = \pi'^*(b) \in H^*(E')$ on remarque que

$$\begin{aligned}
p_1^*(\overline{a}) \cup p_2^*(\overline{b}) \cup (p_1^*(u) \cup p_2^*(u')) &= (p_1^*(\overline{a}) \cup p_1^*(u)) \cup (p_2^*(\overline{b}) \cup p_2^*(u')) \\
&= p_1^*(\overline{a} \cup u) \cup p_2^*(\overline{b} \cup u')
\end{aligned}$$

(car la cohomologie est à coefficient dans $\mathbb{Z}_2$, et grâce à la remarque 6.5) d'où l'égalité :

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cup (u \times u') = (\overline{a} \cup u) \times (\overline{b} \cup u')$$

Cette dérnière égalité implique :

$$\phi''(a \times b) = \phi(a) \times \phi'(b) \ (*)$$

Or

$$\phi''(w(\xi'')) = Sq(u'') = Sq(u \times u') = Sq(u) \times Sq(u') \ (**)$$

On remarque en utilisant l'égalité $(*)$ que : $\phi(w(\xi)) \times \phi'(w(\xi')) = \phi''(w(\xi) \times w(\xi'))$ en appliquant $(\phi'')^{-1}$ (des deux côtés), on obtient grâce à $(**)$:

$$w(\xi \times \xi') = w(\xi) \times w(\xi')$$

Or $w(\xi) \times w(\xi') = proj_1^*(w(\xi)) \cup proj_2^*(w(\xi'))$ (où $proj_1$ et $proj_2$ sont les projections canoniques évidentes : $B \times B \to B$), on suppose maintenant que ξ et ξ' ont pour bases B. Alors en considérant la diagonale $i : B \to B \times B$ on remarque en appliquant i^* des deux côtés de l'égalité précédente que :

$$w(i^*(\xi \times \xi')) = i^*(proj_1^*(w(\xi))) \cup i^*(proj_2^*(w(\xi')))$$

Or $i^* \circ proj_1^* = i^* \circ proj_2^* = (proj_1 \circ i)^* = (proj_2 \circ i)^* = Id_B$, et par définition $i^*(\xi \times \xi') = \xi \oplus \xi'$ (où ici $i^*(\xi \times \xi')$ signifie le fibré induit par i du fibré vectoriel $\xi \times \xi'$).

AXIOME 4 : l'ensemble des vecteurs de longueurs ≤ 1 dans $E(\gamma_1^1)$ est un ruban de Möbuis, qui a pour bord un cercle C. M est un rétracte par déformation de $E(\gamma_1^1)$, et C est un rétracte par déformation de E_0, d'où : $H^*(M, C) \simeq H^*(E, E_0)$. De plus $\mathbb{R}P^2 \setminus D^2$ est homéomorphe à M, où D^2 est un disque (une 2-cellule). Par excision on a : $H^*(M, C)$ qui est isomorphe à $H^*(\mathbb{R}P^2, D^2)$. De plus $H^i(\mathbb{R}P^2, D^2)$ est isomorphe à $H^i(\mathbb{R}P^2)$ pour $i \neq 0$, car D^2 est contractile. Ainsi on a $H^*(E, E_0) \simeq H^i(\mathbb{R}P^2)$ pour chaque $i \neq 0$. Or $H^i(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2[X]/(X^3)$. Ainsi la classe non nulle $u \in H^1(E, E_0)$ correspond au générateur $a \in H^1(\mathbb{R}P^2)$, et donc $Sq^1(u) = u \cup u$ correspond à $Sq^1(a) = a \cup a$ (par l'axiome 2 des opérations de Steenrod). Comme $a \cup a \neq 0$ alors $w_1(\gamma_1^1) = \phi^{-1} Sq^1(u)$ est non nulle. □

Une des principales applications des classes de Stiefel-Whitney est par exemple le théorème suivant :

Théorème 6.9. *(Stiefel) Supposons que l'on ait une application bilinéaire $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec aucun diviseur de 0. Alors $\mathbb{R}P^{n-1}$ a son fibré tangent qui est trivial, et donc n est une puissance de 2.*

On peut aussi montrer (mais cela dépasse le cadre de ce mémoire) qu'il n'existe pas de telle loi d'anneau si $n > 8$.

7 Calcul de $H^*(BO_n, \mathbb{Z}_2)$, $H^*(BSO_n, \mathbb{Z}_2)$

On calcule dans ce chapitre l'anneau de cohomologie des espaces BO_n et BSO_n, on rappelle que $BO_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ et $BSO_n = \widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)$.

7.1 Calcul de $H^*(BO_n, \mathbb{Z}_2)$

Lemme 7.1. *Il n'existe pas de relations polynomiales entre les classes $w_i(\gamma^n)$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe un polynôme p à n variables (à coefficient dans $\mathbb{Z}_2$) tel que $p(w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n)) = 0$. Pour tout fibré vectoriel ξ de rang n, il existe $g : \xi \to \gamma^n$ un morphisme entre fibrés vectoriels (d'après 3.30). Ainsi : $w_i(\xi) = g^*(w_i(\gamma^n))$. Par conséquent $p(w_1(\xi), w_2(\xi), ..., w_n(\xi)) = g^*(p(w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), ..., w_n(\gamma^n))) = g^*(0) = 0$. Donc il suffit de trouver un fibré vectoriel ξ pour lequel il n'y a pas de relations polynomiales entre les $w_k(\xi)$. Choisissons comme fibré vectoriel $\xi = \gamma^1 \times \gamma^1 ... \times \gamma^1$ (qui est isomorphe à $\pi_1^*(\gamma^1) \oplus ... \oplus \pi_n^*(\gamma^1)$), alors d'aprés le théorème de Künneth on a $H^*(B(\xi))$ qui est engendré par les classes $a_k = \pi_k^*(w_1(\gamma^1))$ où $\pi_k : \mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$, est la k-ième projection cannonique. Alors

$$\begin{aligned} w(\pi_1^*(\gamma^1) \oplus ... \oplus \pi_n^*(\gamma^1)) &= w(\pi_1^*(\gamma^1))...w(\pi_n^*(\gamma^1)) \\ &= \pi_1^*(w(\gamma^1))...\pi_n^*(w(\gamma^1)) \\ &= (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)...(1 + a_n) \end{aligned}$$

où $\pi_i^*(w_1(\gamma^1)) = a_i$.
Il s'ensuit que :

$$\begin{gathered} w_1(\xi) = a_1 + a_2 + ... + a_n, \\ w_2(\xi) = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + ... + a_{n-1}a_n, \\ . \\ . \\ w_n(\xi) = a_1a_2a_3...a_n, \end{gathered}$$

et on peut affirmer que $w_k(\xi)$ est le k-ième polynôme symétrique élémentaire (pour $1 \leq k \leq n$), et il est bien connu que ces polynômes sont polynomialement indépendants. Ce qui est absurde et termine donc la preuve de ce lemme. □

Théorème 7.2. *L'anneau de cohomologie $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)$ est l'algèbre polynomiale engendrée par les classes $w_1(\gamma^n)$,...,$w_n(\gamma^n)$.*

Démonstration. Nous savons d'après le lemme 7.1 que $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ contient la sous algèbre engendrée par les $w_i(\gamma^n)$. On va utiliser la décomposition en CW-complexe de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ (voir 3.28). Soit :

$$\begin{aligned} i : \quad \{(r_1, r_2, ...r_n), \textstyle\sum_{i=1}^n ir_i = r\} &\to \quad H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \\ (r_1, ..., r_n) &\mapsto \quad w_1(\gamma^n)^{r_1} \cup ... \cup w_n(\gamma^n)^{r_n} \end{aligned}$$

Alors i est injective d'aprés 7.1, et $i(\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\})$ est une famille libre de $H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty))$, donc

$$\#\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\} \leq dim(H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty)), \mathbb{Z}_2)$$

De plus l'espace-vectoriel des cochaines $C^r(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)$ a pour dimension le cardinal de $\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\}$ (car on sait par la décomposition cellulaire que le nombre de cellules de dimensions r de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ est $\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\}$ par le corollaire 3.28, puis on applique le foncteur $Hom(-, \mathbb{Z}_2)$). De plus il est clair que :

$$dim(H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty))) \leq dim(Z^r(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)) \leq dim(C^r(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2))$$

On en déduit que :

$$\#\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\} = dim(H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty)), \mathbb{Z}_2)$$

Donc $i(\{(r_1, r_2, ...r_n), \sum_{i=1}^n ir_i = r\})$ est une base de l'espace vectoriel $H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty))$. Ce qui montre que les monômes $w_1(\gamma^n)^{r_1} \cup ... \cup w_n(\gamma^n)^{r_n}$ où $\sum_{i=1}^n ir_i = r$ engendrent l'espace vectoriel $H^r(G_n(\mathbb{R}^\infty))$. Ce qui prouve en particulier le théorème. □

7.2 Calcul de $H^*(BSO_n, \mathbb{Z}_2)$

On note $\pi_0 : E_0 \to B$ la restriction de l'application π à E_0.

Lemme 7.3. *Soit ξ un fibré vectoriel de rang n, il existe une suite exacte de la forme :*

$$\cdots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cup w_n} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cup w_n} \cdots$$

Démonstration. On a la suite exacte en cohomologie de la paire (E, E_0) :

$$\cdots \longrightarrow H^j(E, E_0) \longrightarrow H^j(E) \longrightarrow H^j(E_0) \xrightarrow{\delta} H^{j+1}(E, E_0) \longrightarrow \cdots$$

Si l'on croît toujours à l'isomorphisme du théorème 6.4 alors on peut remplacer dans cette suite exacte $H^{j-n}(E)$ par $H^j(E, E_0)$. Et l'on obtient comme suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^{j-n}(E) \xrightarrow{g} H^j(E) \longrightarrow H^j(E_0) \xrightarrow{\delta} H^{j-n+1}(E) \longrightarrow \cdots$$

Avec $g(x) = (x \cup u)|_E = x \cup (u|_E)$. Comme on l'a dêja remarqué la base et l'espace total d'un fibré vectoriel ont même type d'homotopie, donc on peut remplacer dans cette suite exacte $H^*(E)$ par $H^*(B)$, de plus $w_n(\xi)$ correspond à $u|_E$ via l'isomorphisme $\pi^* : H^*(B) \to H^*(E)$. D'où la nouvelle suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^{j-n}(B) \xrightarrow{\cup w_n(\xi)} H^j(B) \longrightarrow H^j(E_0) \xrightarrow{\delta} H^{j-n+1}(B) \longrightarrow \cdots$$

□

On suppose maintenant que l'on ait un revêtement à deux feuillets $p : \tilde{B} \to B$. On introduit une relation d'équivalence $\sim$ sur l'espace $\tilde{B} \times \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$(x,t) \sim (x',u) \Leftrightarrow \{p(x) = p(x'),\, x \neq x',\, u = -t\} \text{ } ou \text{ } \{(x,t) = (x',u)\}$$

Notons $E = (\tilde{B} \times \mathbb{R})/\sim$. Alors $p \circ proj_1 : \tilde{B} \times \mathbb{R} \to B$ se factorise par topologie quotient en une application continue : $\pi : E \to B$. On peut montrer que π est un fibré vectoriel de rang 1. E_0 contient $\tilde{B}$ comme rétracte par déformation. On déduit de cette remarque et de 7.3 le corollaire suivant :

Corollaire 7.4. *Soit $\tilde{B} \to B$ un revêtement à 2 feuillets, alors on a une suite exacte de la forme :*

$$\cdots \longrightarrow H^{j-1}(B) \xrightarrow{\cup w_1} H^j(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^j(\tilde{B}) \longrightarrow H^j(B) \xrightarrow{\cup e} \cdots$$

On arrive enfin au théorème tant désiré :

Théorème 7.5. *L'anneau de cohomologie $H^*(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)$ est l'algèbre polynomiale engendrée par les classes $w_2(\widetilde{\gamma^n}),\ldots,w_n(\widetilde{\gamma^n})$.*

Démonstration. Par le corollaire 7.4 on a la suite exacte suivante :

$$\cdots \longrightarrow H^{j-1}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{\cup w_1} H^j(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{\pi_0^*} H^j(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow H^j(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow \cdots$$

Ici w_1 est la première classe de Stiefel-Whitney du fibré vectoriel associé au revêtement $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty) \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$. On remarque que w_1 ne peut pas être nulle, sinon on aurait la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow H^0(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow H^0(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow 0$$

Ce qui impliquerait que $\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)$ ait 2 composantes connexes, ce qui voudrait aussi dire qu'il existe 2 espaces vectoriels orientés de $\mathbb{R}^\infty$ ne pouvant pas être déformés de manière continue de l'un à l'autre, ce qui est absurde. On en conclut que $w_1 \neq 0$. Par conséquent l'application $\cup w_1 : H^{j-1}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \to H^j(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ est injective, ainsi $H^{j-1}(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)) \to H^{j-1}(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ est nulle, et donc $p^* : H^{j-1}(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \to H^{j-1}(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty))$ est surjective. Il reste à calculer le noyau de p^*, mais par définition de $\cup w_1$, et à l'aide du théorème 7.4 (que l'on a constamment utilisé de manière implicite dans toute cette preuve) le noyau de p^* est l'idéal engendré par w_1. De plus comme $p^*(w_i(\gamma^n)) = w_i(\widetilde{\gamma^n})$, alors il devient clair que $H^*(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)))$ est engendré par les classes $w_2(\widetilde{\gamma^n})$, $w_3(\widetilde{\gamma^n}), ...,$ $w_n(\widetilde{\gamma^n})$. Il reste à montrer que ces classes ne sont pas polynomialement dépendantes, mais comme p^* est un morphisme d'anneaux, si ces classes étaient polynomialement dépendantes alors il en serait de même pour les classes $w_2(\gamma^n), ...,$ $w_n(\gamma^n)$, ce qui serait absurde par le lemme 7.1. $\square$

Remarque 7.6. *On a démontré sans le dire que* $H^1(\widetilde{G_n}(\mathbb{R}^\infty)) = 0$.

Théorème 7.7. *Il existe au plus une correspondance :* $\xi \mapsto w(\xi)$ *qui associe à un fibré-vectoriel au dessus d'une base paracompact un suite de classes de son anneau de cohomologie, tel que ces classes vérifient les* 4 *axiomes des classes de Stiefel-Whitney.*

Démonstration. On suppose qu'il existe deux telles correspondances : $\xi \mapsto w(\xi)$ et $\xi \mapsto w(\xi)'$. Ce qui implique en particulier que pour le fibré tautologique en droite γ_1^1 nous avons : $w(\gamma_1^1) = w(\gamma_1^1)' = 1+a$ (on a calculé cela uniquement grâce aux axiomes 1 et 4). Donc : $w(\gamma^1) = w(\gamma^1)' = 1+a$ (il suffit de plonger γ_1^1 dans γ^1 et on conclut avec les axiomes 1 et 2). Puis on remarque que $\xi = \gamma^1 \times ... \times \gamma^1 \simeq \pi_1^*\gamma^1 \oplus ... \oplus \pi_n^*\gamma^1$, d'où : $w(\xi) = w(\xi)'$ par les axiomes 2 et 3. Maintenant en utilisant le fait qu'il existe un morphisme de fibré vectoriel entre ξ et γ^n et le fait que $H^*(G_n)$ s'injecte de manière naturelle dans $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times ... \times \mathbb{R}P^\infty)$, on en déduit que $w(\gamma^n) = w(\gamma^n)'$. Soit η un fibré vectoriel de rang n au dessus d'une base paracompact, et en choisissant un morphisme entre fibré $f : \eta \to \gamma^n$, on a immédiatement l'égalité suivante :

$$w(\eta) = \overline{f}^* w(\gamma^n) = \overline{f}^* w(\gamma^n)' = w(\eta)'$$

. $\square$

Remarque 7.8. *On peut se poser la question de savoir à quoi ressemble* $H^*(BU(n))$ *et* $H^*(BSU(n))$. *On peut introduire ce que l'on appelle les classes de Chern notée* $c_i \in H^{2i}(B(\xi), \mathbb{Z})$, *c'est l'analogue des classes de Stiefel-Whitney dans le cadre des fibrés vectoriels complexes (sauf que l'on peut prendre la cohomologie à coefficient dans* $\mathbb{Z}$ *pour les définir). On a le résultat suivant qui est similaire à celui maintennat connu dans le cas réel :*

$$H^*(BU(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, ..., c_n], \ H^*(BSU(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_2, ..., c_n]$$

8 Les groupes spinoriels : $Spin_n(\mathbb{R})$

On introduit dans ce paragraphe les groupes spinoriels $Spin_n(\mathbb{R})$, ce sont des groupes de Lie qui interviennent régulièrement en mathématiques, et particulièrement en physique. Ils font office de revêtement universel du groupe $SO_n(\mathbb{R})$. On explique en particulier dans ce paragraphe que l'on a une suite exacte de groupe de Lie de la forme :

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \to Spin_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R}) \to 1$$

De manière plus générale si si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une forme quadratique de signature (p, q) alors on peut construire un groupe noté $Spin_{(p,q)}(\mathbb{R})$, mais alors cette fois-ci ce groupe $Spin_{(p,q)}(\mathbb{R})$ n'est plus forcément simplement connexe.

Définition 8.1. *Soit* $(,)$ *une forme bilinéaire symétrique sur un espace-vectoriel* V*, soit* $T(V) = \oplus_k V^{\otimes k}$ *l'algèbre tensoriel de* V *alors on définit l'algèbre de Clifford de* V *notée* $Cl(V)$ *l'algèbre* $T(V)/J$ *où* J *est l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme* $u \otimes u + (u, u)$.

Notations 8.2. $\bullet T(V)_0 = \underset{n\ paire}{\oplus} V^{\otimes n},\ T(V)_1 = \underset{n\ impaire}{\oplus} V^{\otimes n}$
$\bullet\ J = J_0 \oplus J_1,$ *où* $J_i = J \cap T(V)_i$
$\bullet\ Cl(V) = Cl(V)_0 \oplus Cl(V)_1,$ *où* $Cl(V)_i = T(V)_i/J_i$

$-Id : V \to V$ induit un automorphisme α sur $Cl(V)$, avec $\alpha|_{Cl(V)_0} = +1$ et $\alpha|_{Cl(V)_1} = -1$.

Lemme 8.3. *Si* $(,)$ *est non-dégénérée et si* $x \in Cl(V)$ *vérifie* $\forall v \in V$, $xv = v(\alpha x)$, *alors* x *est un scalaire.*

Démonstration. On peut diagonaliser $(,)$ et choisir une base $e_1, ..., e_n$ de V tel que $(e_r, e_s) = \delta_{rs}\lambda_r$, $\lambda_r \neq 0$. On peut écrire $x = \sum_I \lambda_I \prod_j e_j^{i_j},\ \lambda_I \in \mathbb{R}$, où λ_I est un multi-indice. Si $xe_s = e_s(\alpha x)$ alors $e_s^{-1} x e_s = \alpha x$. Mais :

$$e_s^{-1}(\prod_j e_j^{i_j})e_s = \left\{ \begin{array}{cc} (-1)^{\sum i_j}\prod_j e_j^{i_j} & si \quad i_s = 0 \\ (-1)^{-1+\sum i_j}\prod_j e_j^{i_j} & si \quad i_s = 1 \end{array} \right\}$$

Dans tous les cas on a : $\alpha(\prod_j e_j^{i_j}) = (-1)^{\sum i_j} \prod e_j^{i_j}$. Donc $xe_s = e_s(\alpha x)$ si et seulement si $\lambda_I = 0$ si $i_s = 1$. Par conséquent $xe_s = e_s(\alpha x)$ pour tous les s si et seulement si $\lambda_I = 0$ lorsque $i_s = 1$ pour chaque s. C'est à dire, $\lambda_I \neq 0$ seulement pour $I = (0, ..., 0)$. On en conclut que x est un scalaire. $\square$

Définition 8.4. *Soit* $\beta : T(V) \to T(V)$ *l'application linéaire définie par* $\beta(v_1 \otimes ... \otimes v_n) = v_n \otimes ... \otimes v_1$. *Alors* $\forall (x,y) \in T(V)^2$, $\beta(xy) = \beta(y)\beta(x)$ *(on dit que* β *est un anti-automorphisme), ce qui induit une application* $\beta : Cl(V) \to Cl(V)$, *avec* $\beta|_V = 1$. *Et* $\gamma = \alpha\beta = \beta\alpha$ *est un anti-automorphisme tel que* $\gamma|_V = -Id$.

Proposition 8.5. *Si* $V = V' \oplus^{\perp} V''$ *alors :*

$$Cl(V) \simeq Cl(V') \otimes Cl(V'')$$

Démonstration. voir [1] □

Donc d'après la proposition précédente il suffit de connaître une base de $Cl(\mathbb{R})$ pour connaître une base de $Cl(V)$ où V est un espace-vectoriel muni d'une forme quadratique. Mais si e est un vecteur de $\mathbb{R}$, alors $\{1, e\}$ est une base de $Cl(\mathbb{R})$, car ici : J est le sous espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $e \otimes e + (e,e), (e \otimes e + (e,e))e, (e \otimes e + (e,e))e^2,$ *etc....*
De cette remarque on en déduit la proposition suivante :

Proposition 8.6. *Si* $dim(V) = n$ *et* $\{e_i\}_{i \in [1,n]}$ *est une base orthogonal de* V, *alors* $dim(Cl(V)) = 2^n$ *et* $\{\prod e_i^{j_i}\}$ *est une base de* $Cl(V)$ *où* $j_i \in \{0, 1\}$.

Exemples 8.7. $\bullet Cl(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ *est engendré par* $1, i$ *et* $\beta(1) = 1$, $\beta(i) = 1$, $\gamma(1) = 1$, *et* $\gamma(i) = -i$ *(ici* $i \in \mathbb{R}$*)*
$\bullet\, Cl(\mathbb{C}) = \mathbb{H}$ *a comme base* $1, i, j, ij = k$, *et on remarque que* $\gamma(i) = -i$, $\gamma(j) = -j$, $\gamma(k) = -k$, $\gamma(1) = 1$, *(ici* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel de dimension* 2 *engendré par* i *et* j*)*

Remarque 8.8. *Cet exemple montre que* γ *est une généralisation de la conjugaison (complexe et quaternionique) bien connue.*

Définition 8.9. *On note* $Pin(V) \subset Cl(V)$ *le sous-ensemble des éléments* x *qui vérifient :*

1. $x(\gamma x) = (\gamma x)x = 1$
2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \pi x : & V & \to & Cl(V) \\ & v & \mapsto & xv(\beta x) \end{array}$$

stabilise V

A partir de maintenant on suppose que la forme quadratique sur V est définie positive.

Proposition 8.10.
1. $Pin(V)$ *est un sous-groupe des éléments inversibles de* $Cl(V)$, *c'est un groupe de Lie, et l'application* $\pi : Pin(V) \to O(V)$ *est surjective et a pour noyau* $\{\pm 1\}$ *(c'est un homomorphisme de groupe).*
2. *L'algèbre de Lie de* $Pin(V)$ *est celle engendrée par les éléments* $\{e_r e_s,\ r < s\}$ *avec comme crochet de Lie celui défini par :* $[e_r e_s, e_t e_u] = e_r e_s e_t e_u - e_t e_u e_r e_s$.

3. *Les sous ensembles fermés $\pi^{-1}(det^{-1}(1))$ et $\pi^{-1}(det^{-1}(-1))$ de $Pin(V)$ sont respectivement dans $Cl(V)_0$ et $Cl(V)_1$, ils sont connexes pour $n \geq 2$.*

Démonstration. 1. L'inverse d'un élément $x \in Pin(V)$ est γx, donc $Pin(V)$ est bien un sous-ensemble des éléments inversibles de $Cl(V)$. Soit $x, y \in Pin(V)$ alors : $xy\gamma(xy) = xy\gamma(y)\gamma(x) = x\gamma(x) = 1$, on fait de même pour vérifier que $\gamma(xy)xy = 1$. De plus si $x, y \in Pin(V)$ et $v \in V$, alors $xyv\beta(xy) = xyv\beta(y)\beta(x)$, or $yv\beta(y) \in V$ et donc $xyv\beta(xy) = xyv\beta(y)\beta(x) \in V$. Ainsi $xy \in Pin(V)$. Montrons maintenant que l'inverse d'un élément $x \in Pin(V)$ est dans $Pin(V)$: l'inverse de x est γx. Alors : $\gamma(x)\gamma \circ \gamma(x) = \gamma(\gamma(x)x) = \gamma(1) = 1$, on montre de la même manière que $\gamma \circ \gamma(x)\gamma x = 1$. De plus on remarque que $\gamma(x)v\beta(\gamma(x)) \in \{\pm xv\beta x\} \subset V$. Donc $Pin(V)$ est bien un groupe. La multiplication à gauche de $Cl(V)^*$ sur $Cl(V)$ donne un morphisme injectif et continue $Cl(V)^* \to GL(Cl(V))$ et on peut montrer que l'image est fermée (en ayant muni $Cl(V)^*$ de la topologie induite). Ainsi $Cl(V)^*$ a une structure de groupe de Lie comme sous groupe fermée de $GL(Cl(V))$. On peut aussi montrer que $Pin(V)$ est fermé dans $Cl(V)^*$, et donc par conséquent $Pin(V)$ est un groupe de Lie. On montre que $\pi(x) \in O(V)$:

$$\begin{aligned} <\pi(x)(v), \pi(x)(v)> &= -((\pi x)v)^2 \\ &= -xv(\beta x)(\alpha x)v(\gamma x) \\ &= -xvv\gamma(x) \\ &= <v, v> x\gamma(x) \\ &= <v, v> \end{aligned}$$

Le fait que π soit un homomorphisme de groupes est une simple vérification. Montrons que $Ker(\pi) = \{\pm 1\}$: soit $x \in Ker(\pi)$ alors : $\forall v \in V,\ v = xv\beta x$. Donc $\forall v \in V,\ v\alpha x = xv(\beta x)(\alpha x) = xv$. Par le lemme 8.3, x est un scalaire. Comme $x\gamma x = 1$, alors $x^2 = 1$, et donc $x = \pm 1$. Ainsi $Ker(\pi) = \{\pm 1\}$. En plus de cela π est continue (on peut le montrer), c'est donc un morphisme de groupes de Lie.

Montrons que π est surjective : On remarque que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = cos(t) + sin(t)e_r e_s \in Pin(V) \cap Cl_0(V)$, déterminons la matrice de $\pi(x)$ dans la base $e_1, ...e_n$:

$$(cos(t)+sin(t)e_r e_s)e_u(cos(t)-sin(t)e_r e_s) = \left\{ \begin{array}{ccc} e_u & si & u \neq r, s \\ (cos(2t) + sin(2t)e_r e_s)e_u & si & u = r \end{array} \right\}$$

C'est à dire que la matrice associée à cet endomorphisme est :

$$\pi(x(t)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \cdot & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & cos(2t) & & & & -sin(2t) & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \cdot & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & sin(2t) & & & & cos(2t) & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \cdot & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\pi(x(t))}{dt}|_{t=0} = \begin{pmatrix}
0 & & & & & & & & & & \\
& \cdot & & & & & & & & & \\
& & 0 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & & & -2 & & & \\
& & & & 0 & & & & & & \\
& & & & & \cdot & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & \\
& & & 2 & & & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & & & \cdot & \\
& & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Il est bien connu que $Lie(O(V))$ est l'algèbre des matrices antisymétriques (algèbre où le produit est celui du crochet de Lie de $M_n(\mathbb{R})$ restreint aux matrices antisymétriques). Donc $d_e\pi : Lie(Pin(V)) \to Lie(O(V))$ est surjective. En particulier comme $Ker(\pi) = \{\pm 1\}$, alors $d_e\pi$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. π envoie un voisinage ouvert de 1 dans $Pin(V) \cap Cl(V)_0$ dans la composante connexe de l'identité de $O(V)$ (c'est à dire $SO(V)$). De plus le chemin $cos(t) + sin(t)e_1e_2$ où $t \in [0, \pi]$ est un chemin dans la composante de l'identité de $Pin(V) \cap Cl(V)_0$ de 1 à -1. De cela on peut en déduire que $Pin(V) \cap Cl(V)_0 = \pi^{-1}(det^{-1}(1))$ est connexe. On remarque que $\pi(e_1) = diag(-1, 1, ..., 1)$. Ainsi $e_1.(Pin(V) \cap Cl(V)_0) \subset \pi^{-1}(O(V)^-)$, et il y'a égalité car $u \mapsto \pi(e_1)u$ est une bijection entre $SO(V)$ et $O(V)^-$. Ainsi $e_1.(Pin(V) \cap Cl(V)_0) = \pi^{-1}(O(V)^-)$ est connexe. Il n'est pas trés dur de voir que $e_1.(Pin(V) \cap Cl(V)_0) = Pin(n) \cap Cl_1(V)$. Ce qui termine la preuve.

$\square$

Remarque 8.11. *On notera $Spin(n) = Pin(V) \cap Cl(V)_0$. On a ainsi montré que l'on a la suite exacte annoncé, qui implique en particulier que $Spin(n)$*

est compact. On peut aussi montrer que $Spin(n)$ est le revêtement universel de SO_n, en montrant que $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}_2$. Pour montrer que $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}_2$, il suffit de procéder par récurrence : on initialise la récurrence à $n = 3$: le revêtement universel de SO_3 est S^3 qui est un revêtement double, d'où $\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}_2$. Ensuite, on suppose que $\pi_1(SO_{n-1}) = \mathbb{Z}_2$, puis on utilise la suite exacte longue en homotopie d'un fibré à :

$$SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1}$$

On a donc comme suite exacte :

$$\pi_1(SO_{n-1}) \to \pi_1(SO_n) \to \pi_1(S^{n-1})$$

On en conclut que $\#\{\pi_1(SO_n)\} \leq 2$. Mais on sait aussi que $\pi_1(SO_n)$ est non trivial, car on vient de montrer que $\pi : Spin(n) \to SO(n)$ est un revêtement non trivial, qui n'est pas un homéomorphisme. Donc $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}_2$.

9 Un théorème dû à Quillen

Dans cette section on cite un théorème dû à Quillen sur la cohomologie de $BSpin(n)$, ce théorème provient de l'article [6], avant de le citer on introduit quelques notations :

Notations 9.1. • *$\triangle_\theta$ est une représentation spinoriel irréductible de $Spin(n)$ de degré 2^h.*
•*On note J l'idéal engendré par $w_2, Sq^1(w_2), ..., Sq^{2^h-1}Sq^{2^h-2}...Sq^1(w_2)$.*
• $w_{2^h}(\triangle_\theta) = (\triangle_\theta)^*(w_{2^h})$

Une représentation spinoriel est une représentation de $Spin(n)$ obtenue à partir d'un $Cl(V)$-module. Lorsque $n \equiv 0 \, mod \, 4$, il y'a pour chaque caractère θ sur le centre de $Spin(n)$ qui agissent comme -1 sur $Ker(\pi)$, une unique représentation $\triangle_\theta$ sur lequel le centre agit comme θ. Sinon il y'a à isomorphisme près qu'une représentation spinoriel. Voici un tableau qui résume les valeurs de h en fonction de n, il provient de [6] :

n	h
$8l+1$	$4l+0$
$8l+2$	$4l+1$
$8l+3$	$4l+2$
$8l+4$	$4l+2$
$8l+5$	$4l+3$
$8l+6$	$4l+3$
$8l+7$	$4l+3$
$8l+8$	$4l+3$

Théorème 9.2. *On a l'isomorphisme d'anneaux suivant :*

$$\begin{array}{ccc} (H^*(BSO_n)/J) \otimes \mathbb{Z}_2[w_{2^h}(\triangle_\theta)] & \to & H^*(BSpin(n)) \\ a \otimes b & \mapsto & \pi^*(a) \cup b \end{array}$$

On peut regarder quelques cas où $n = 3, 4$ (les isomorphismes exceptionnels) :

1. $Spin(3) = S^3 = SU(2)$ et donc on sait bien que $H^*(BSU(2)) = \mathbb{Z}_2[c_2]$. Dans ce cas $n = 3$ et $h = 2$, donc J est engendré par w_2 et $Sq^1(w_2) = w_3$. Ainsi on obtient que :

   $$H^*(BSpin(3)) \simeq \mathbb{Z}_2[w_4(\triangle_\theta)]$$

   On retrouve bien que la cohomologie de $BSpin(3)$ est engendrée par une seule classe de degré 4.
2. $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$, on utilise la formule de Künneth pour voir que $H^*(BSpin(4)) \simeq \mathbb{Z}_2[c_2] \otimes \mathbb{Z}_2[c_2]$.
   Dans ce cas (lorsque $n = 4$) on a $h = 2$ donc cet isomorphisme devient :

   $$H^*(BSpin(4)) \simeq \mathbb{Z}_2[w_4] \otimes \mathbb{Z}_2[w_4(\triangle_\theta)]$$

   Ce qui est cohérent avec le résultat obtenu avec la formule de Künneth.

Références

[1] J.F. Adams, *Lectures on exceptional lie groups*, chicago lectures in mathematics ed., Zafer Mahmud and Mamoru Mimura.

[2] C Chevalley, *Theory of lie groups*, Princeton Univ. Press, 1946.

[3] Glen E.Bredon, *Topology and geometry*, graduate texts in mathematics ed., Springer-Verlag.

[4] John Milnor, *Construction of universal bundles, ii*, Annals of Mathematics, Second Series **63** (1956), 430–436.

[5] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of mathematics studies - Princeton University Press.

[6] Daniel Quillen, *The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups*, (1971).

[7] Norman Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton university press - 1951.