



Mémoire de Master et de Magistère de mathématique

Variétés projectives convexes et pointes maximales

Stéphane Marseglia

Sujet proposé et encadré par Olivier Guichard, professeur à l'Institut de
Recherche en Mathématique Avancée (IRMA) à Strasbourg

Juin 2013

Remerciements

Je tiens à remercier M. Olivier Guichard de m'avoir proposé ce sujet très intéressant, pour ne pas dire passionnant.

Je le remercie chaleureusement pour le temps qu'il m'a consacré et toute l'aide qu'il m'a apportée, pour les nombreuses heures de discussions lors desquelles il a répondu à mes questions, encore plus nombreuses, faisant preuve d'humour et surtout d'une patience infinie.

Table des matières

Introduction	4
1 Géométrie sur les convexes projectifs	5
1.1 Convexes projectifs	5
1.2 Géométrie de Hilbert	6
1.3 Sous-groupe discret d'isométries	6
1.4 Projection radiale et coordonnées paraboliques	7
2 Théorème de Benzécri	9
3 Lemme de Margulis et pointes maximales	11
3.1 Lemmes préliminaires	11
3.2 Un résultat plus général	13
3.3 Horosphères et pointes maximales	14
4 Structure des pointes maximales	16
4.1 Un premier lemme	16
4.2 Caractérisation des bords elliptiques	17
4.3 Existence d'enveloppe syndétique	21
4.4 Existence d'un autre convexe	22
4.5 Un dernier lemme	23
4.6 Preuve finale	25
Bibliographie	26

Introduction

Ce mémoire constitue le rapport du travail de j'ai effectué au troisième trimestre de ma deuxième année de Master Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université de Strasbourg. Son sujet m'a été proposé par Olivier Guichard pour préparer le doctorat que je débute en septembre 2013 sous sa direction à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg.

Ce document contient les résultats importants aboutissant à la démonstration d'un théorème de Cooper, Long & Tillmann [1] prépublié en septembre 2011. Ce théorème décrit la structure des pointes maximales de variétés projectives convexes et affirme que ces pointes ont la même structure qu'une pointe hyperbolique.

Dans la première partie, le vocabulaire de géométrie des convexes projectifs est défini. Les notions de *distance de Hilbert* et d'*isométrie projective* sont introduites et une caractérisation des sous-groupes discrets d'isométries est démontrée. Les outils de *projection radiale* et de *coordonnées paraboliques* sont également présentés.

La deuxième partie présente brièvement un résultat de Benzécri sur les convexes pointés nécessaire à la définition de *domaine de Benzécri* et à des démonstrations ultérieures.

La partie suivante a pour objectif de démontrer un résultat de Margulis et les lemmes qui mènent à sa démonstration. Ce résultat permet de définir et de décrire le *groupe fondamental local* d'une variété projective convexe, afin d'aboutir aux notions de *rayon d'injectivité* et de *pointe maximale*.

La quatrième et dernière partie détaille le cheminement menant à la preuve du théorème principal de ce mémoire. Cinq lemmes préliminaires sont démontrés et des notions nécessaires à leur démonstration, telles que *isométrie parabolique* et *enveloppe syndétique*, sont introduites. Le preuve du théorème est donnée dans l'ultime section de cette partie.

Chapitre 1

Géométrie sur les convexes projectifs

Cette partie a pour but de définir les objets principaux qui entrent en jeu dans les parties suivantes, ainsi que de présenter des propriétés élémentaires les concernant.

1.1 Convexes projectifs

Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie $n + 1$, on appelle $\mathbb{P}(V) = V/\mathbb{R}^*$ l'*espace projectif de V* , c'est une variété lisse compacte de dimension n . L'espace $\mathbb{P}(V)$ peut être vu comme l'ensemble des droites vectorielles de V ; si $u \in V \setminus \{0\}$, on note $[u]$ le point de $\mathbb{P}(V)$ image de la droite vectorielle engendrée par u . Ajoutons que lorsque $V = \mathbb{R}^{n+1}$, on note $P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Un *sous-espace projectif* est alors l'image $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ d'un sous-espace vectoriel U de V et la dimension de $\mathbb{P}(U)$ vaut $\dim U - 1$.

Un *repère projectif* est un $n + 2$ -uplet $\mathcal{R} = (p_0, \dots, p_{n+1})$ de $\mathbb{P}(V)$ tel que tout sous-ensemble de $n + 1$ points distincts de \mathcal{R} ne soit pas contenu dans un hyperplan projectif. L'ensemble \mathfrak{B} des repères projectifs forme un ouvert de $\mathbb{P}(V)^{n+2}$.

Une *carte affine* est une partie de la forme $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$, où $\mathbb{P}(H)$ est un hyperplan projectif. Toute partie $\Omega \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ contenue dans une carte affine peut être vue comme une partie de l'espace affine \mathbb{R}^n .

Un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{P}(V)$ est dit *convexe* si, pour toute droite D de $\mathbb{P}(V)$, l'intersection $\Omega \cap D$ est connexe.

Une partie $\Omega \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est *proprement convexe* si $\overline{\Omega}$ est contenue dans une carte affine; autrement dit Ω ne contient pas de droite affine.

Enfin, Ω est *strictement convexe en $p \in \partial\overline{\Omega}$* si p n'est pas sur un segment (de longueur non nulle) inclus dans $\partial\overline{\Omega}$.

Une partie $\mathcal{C} \subset V$ est un *cône* si $\lambda\mathcal{C} = \mathcal{C}$ pour tout $\lambda > 0$.

Un cône \mathcal{C} est dit *saillant* s'il ne contient pas de droite affine.

Selon les situations, il est préférable de travailler directement sur les convexes projectifs de $\mathbb{P}(V)$, ou bien sur les cônes convexes de V .

1.2 Géométrie de Hilbert

Tout ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}(V)$ peut être muni d'une *métrique de Hilbert* notée d_Ω et définie comme suit. Pour tout $p, q \in \Omega$, on note $D \subset \mathbb{P}(V)$ une droite projective passant par p et q (elle est unique si $p \neq q$) et $a, b \in \partial\Omega$ les extrémités du segment $D \cap \overline{\Omega}$. On pose alors $d_\Omega(p, q) = \frac{1}{2} | \log[a, p, q, b] |$, où

$$[a, p, q, b] := \frac{\| a - q \| \| b - p \|}{\| a - p \| \| b - q \|}$$

est le birapport entre ces quatre points et $\| \cdot \|$ est une norme euclidienne sur une carte affine contenant $\overline{\Omega}$.

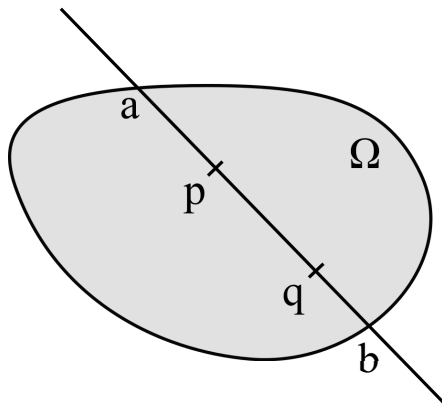


FIGURE 1.1 – Métrique de Hilbert

Définition Si $\Omega \subset \mathbb{P}(V)$ est un ouvert convexe, on note $SL(\Omega)$ le sous-groupe de $SL(V)$ qui préserve Ω .

Si l'on travaille avec des cônes convexes, on définit de même $SL(\mathcal{C})$.

Proposition 1.1 *Les éléments de $SL(\Omega)$ sont des isométries pour la métrique de Hilbert d_Ω .*

Démonstration La preuve découle directement du fait que les éléments de $SL(\Omega)$ préservent le birapport. \square

Remarque — L'inclusion $SL(\Omega) \subseteq Isom(\Omega, d_\Omega)$ est a priori stricte. Toutefois, il y a égalité si l'ouvert Ω est strictement convexe.

1.3 Sous-groupe discret d'isométries

Définition L'action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est *propre* si l'application

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g.x, x) \end{aligned}$$

est propre, i.e. si l'image réciproque par φ de tout compact de $X \times X$ est un compact de $G \times X$. L'action est *proprement discontinue* si de plus G est un groupe discret.

La caractérisation suivante est utile en pratique. Sa preuve utilise uniquement la définition.

Lemme 1.2 *L'action d'un groupe G sur un ensemble X est propre si et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $E_K = \{g \in G \mid g.K \cap K \neq \emptyset\}$ est un compact de G . L'action est proprement discontinue si, pour tout compact $K \subset X$, E_K est une partie finie.*

Proposition 1.3 *Soient Ω un ouvert proprement convexe et $\Gamma < SL(\Omega)$. Alors Γ est un sous-groupe discret si et seulement si Γ agit proprement discontinûment sur Ω .*

Démonstration L'action de Γ sur Ω est continue. On prouve les deux implications par contraposition.

Supposons avoir un compact $K \subset \Omega$ et une infinité d'éléments $\gamma_i \in \Gamma$ tels que $\gamma_i K \cap K \neq \emptyset$. Il existe $r > 0$ tel que $K \subset B_\Omega(x_0, r)$, où $B_\Omega(x_0, r)$ désigne la boule de Ω centrée en x_0 de rayon r pour la métrique d_Ω . Soit $\mathcal{B} = (x_0, \dots, x_{n+1}) \subset \Omega$ un repère projectif. Pour tout i , $\gamma_i(x_0) \in B_\Omega(x_0, 2r)$ compacte, quitte à extraire, on peut supposer que $\gamma_i(x_0) \rightarrow y_0$. Puis,

$$\forall i, \forall 1 \leq k \leq n+1, d_\Omega(x_0, \gamma_i(x_k)) \leq d_\Omega(x_0, \gamma_i(x_0)) + d_\Omega(x_0, x_k) \leq 2r + R_k$$

où $R_k := d_\Omega(x_0, x_k)$. Donc $\forall i, \forall k, \gamma_i(x_k) \in B_\Omega(x_0, 2r + R_k)$, d'où, quitte à extraire, $\gamma_i(x_k) \rightarrow y_k$. Ainsi, $\forall i, \gamma_i(\mathcal{B}) \rightarrow (y_0, \dots, y_{n+1})$. On pose ensuite $\delta_i = \gamma_{i+1}^{-1} \gamma_i \in \Gamma, \forall i$. Alors

$$\begin{aligned} \forall i, \forall k, d_\Omega(\delta_i(x_k), x_k) &\leq d_\Omega(\delta_i(x_k), \gamma_{i+1}^{-1}(y_k)) + d_\Omega(\gamma_{i+1}^{-1}(y_k), x_k) \\ &= d_\Omega(\gamma_i(x_k), y_k) + d(y_k, \gamma_{i+1}(x_k)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

D'où $\forall i, \delta_i(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$. On conclut grâce au fait que l'application $\Psi_{\mathcal{B}} : SL(V) \rightarrow \mathfrak{B}, g \mapsto g(\mathcal{B})$ est un homéomorphisme, car alors $\delta_i = \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\delta_i(\mathcal{B})) \rightarrow \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B}) = \text{id}$ et $\forall i, \delta_i \neq \text{id}$, donc Γ n'est pas discret.

Réciproquement, soit $K \subset \Omega$ compact, si Γ n'est pas discret, il existe une suite d'éléments distincts $\gamma_i \in \Gamma$ qui converge vers $\text{id} \in \Gamma$. Alors, à partir d'un certain rang, $(\gamma_i) \subset E_K$ (car E_K est un voisinage de $\text{id} \in \Gamma$), donc E_K est infini. \square

1.4 Projection radiale et coordonnées paraboliques

Les notions introduites dans cette section seront utiles pour les démonstrations de la partie 4, notamment pour celle du théorème 4.4.

Définition Soient V un \mathbb{R} -espace-vectoriel de dimension $n+1$ et $D \subset V$ une droite vectorielle. L'ensemble des droites de $\mathbb{P}(V)$ passant par $p = \mathbb{P}(D)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(V/D)$ appelé *espace des directions en p* .

On définit la *projection radiale par rapport à p* par $\mathcal{D}_p : \mathbb{P}(V) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}(V/D)$, qui à un point $q = [v]$ associe la droite projective $\mathbb{P}(D + \text{Vect}(v))$. Concrètement, $\mathcal{D}_p(q)$ est la droite projective passant par p et q .

Définition (cf. figure 1.2) Soient $p, r \in \partial\bar{\Omega}$ et H_p, H_r des hyperplans d'appui de Ω en p et r respectivement. On identifie la carte affine $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus H_p$ de sorte que p corresponde à la direction de l'axe x_n , que r soit l'origine et que H_r soit l'hyperplan $\{x_n = 0\}$. De cette façon, on munit Ω de *coordonnées paraboliques centrées en (H_p, p)* .

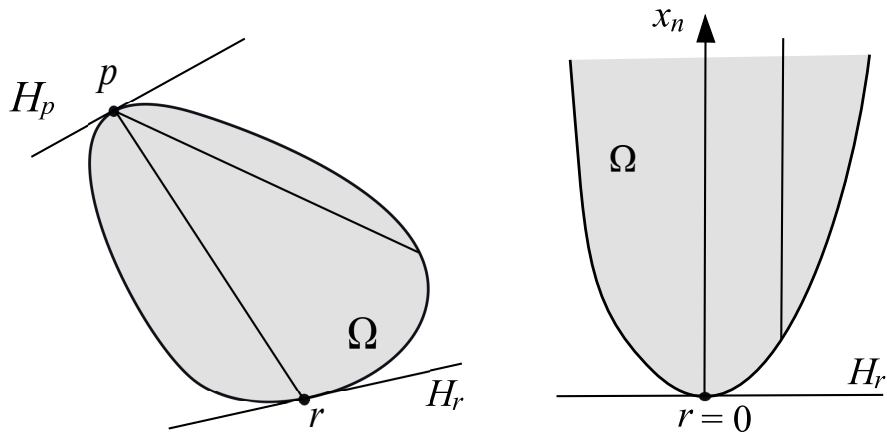


FIGURE 1.2 – Coordonnées paraboliques

Dans ces coordonnées, les géodésiques de Ω d'extrémité p deviennent les demi-droites verticales parallèles à l'axe x_n . De plus, la projection radiale \mathcal{D}_p correspond à la projection sur H_r parallèlement à l'axe x_n .

Si Ω est strictement convexe en r , alors le demi-axe x_n est la seule demi-droite issue de r contenue dans Ω .

Chapitre 2

Théorème de Benzécri

Cette partie présente un résultat important, dû à Benzécri, sur l'action de $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ sur les convexes pointés.

Définition (cf. figure 2.1) Soient (M, D) un espace métrique et $X, Y \subset M$ des parties non vides de M . Leur *distance de Hausdorff*, notée d_H , est définie par

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y) ; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}$$

De façon équivalente,

$$d_H(X, Y) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid X \subseteq Y_\varepsilon, Y \subseteq X_\varepsilon \}$$

avec

$$X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} \{z \in M \mid d(z, x) \leq \varepsilon\} = \{z \in M \mid d(z, X) \leq \varepsilon\}$$

Remarque — En général, $d_H(X, Y) = \varepsilon$ n'implique pas que $X \subseteq Y_\varepsilon$ et $Y \subseteq X_\varepsilon$. Un contre-exemple classique est $M = \mathbb{R}$, $d = |\cdot|$, $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $Y = \{\frac{-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposition 2.1 d_H est une métrique sur l'ensemble $F(M)$ des compacts non vides de M . De plus, la topologie de $F(M)$ ne dépend que de celle de M (et pas de la métrique d).

On note \mathfrak{C} l'ensemble des ouverts proprement convexes $\Omega \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ d'intérieur non vide ; on munit \mathfrak{C} de la métrique de Hausdorff. On pose alors $\mathfrak{C}_* = \left\{ (\Omega, p) \in \mathfrak{C} \times \mathbb{R}\mathbb{P}^n \mid p \in \overset{\circ}{\Omega} \right\}$.

Théorème 2.2 L'action de $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ sur \mathfrak{C}_* est propre et cocompacte.

Dans la suite, on note $B(r)$ la boule fermée de \mathbb{R}^n de rayon r centrée en l'origine.

Corollaire 2.3 Pour toute dimension $n \geq 2$ il existe une constante $\mathcal{R}_n > 1$ avec la propriété suivante : si $\Omega \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est un ouvert proprement convexe et $p \in \Omega$, alors il existe un automorphisme projectif τ tel que, dans une carte affine, $B(1) \subset \tau(\Omega) \subset B(\mathcal{R}_n) \subset \mathbb{R}^n$ et $\tau(p) = 0$.

Définition Un *domaine de Benzécri* est un ouvert proprement convexe Ω tel que $B(1) \subset \bar{\Omega} \subset B(\mathcal{R}_n)$. On appelle *origine* de Ω et on note O_Ω le centre commun des boules euclidiennes $B(1)$ et $B(\mathcal{R}_n)$.

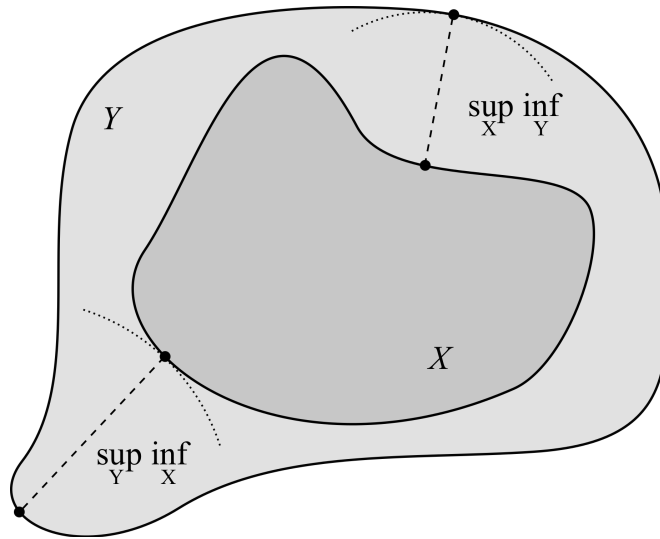


FIGURE 2.1 – Distance de Hausdorff

Chapitre 3

Lemme de Margulis et pointes maximales

Dans cette partie sont énoncés et démontrés un résultat important sur le groupe fondamental local d'un ouvert proprement convexe, ainsi que les lemmes techniques menant à sa démonstration.

Définition On dit qu'un groupe G est *virtuellement nilpotent* s'il existe un sous-groupe nilpotent H de G d'indice fini.

Définition Une *variété projective proprement convexe* (respectivement *strictement convexe*) est le quotient Ω/Γ d'un ouvert Ω proprement convexe (respectivement strictement convexe) par un sous-groupe discret $\Gamma < SL(\Omega)$ sans torsion.

Énonçons à présent le résultat principal de cette partie :

Théorème 3.1 (lemme de Margulis) *En dimension $n \geq 2$, il existe une constante $\mu_n > 0$ telle que, si M est une variété projective proprement convexe de dimension n et si $x \in M$, alors $\pi_1^{\mu_n}(M, x)$ est virtuellement nilpotent, où $\pi_1^{\mu_n}(M, x)$ est le sous-groupe de $\pi_1(M, x)$ engendré par les lacets basés en x de longueur inférieure à μ_n .*

Définition μ_n est la *constante de Margulis*.

Le sous-groupe $\pi_1^{\mu_n}(M, x)$ est le *groupe fondamental local de M basé en x* .

3.1 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2 (continuité de d_{Ω_k}) *Soient Ω_∞ un ouvert proprement convexe et Ω_k une suite d'ouverts proprement convexes qui converge vers Ω_∞ . Alors, si $x, y \in \Omega_k$ pour tout k et si $x, y \in \Omega_\infty$, on a $d_{\Omega_k}(x, y) \rightarrow d_{\Omega_\infty}(x, y)$.*

Démonstration Rappelons que $d_\Omega(x, y) = \log([a : x : y : b])$ avec $a, b \in \partial\Omega$ et a, x, y, b alignés. On a donc $d_{\Omega_k}(x, y) = \log([a_k : x : y : b_k])$ et $d_{\Omega_\infty}(x, y) = \log([a_\infty : x : y : b_\infty])$. Or $D \cap \Omega_k \rightarrow D \cap \Omega_\infty$, où D désigne la droite (a, b) . Ainsi $a_k \rightarrow a_\infty$ et $b_k \rightarrow b_\infty$. Finalement $d_{\Omega_k}(x, y) \rightarrow d_{\Omega_\infty}(x, y)$. \square

Lemme 3.3 *Pour tout réel $d > 0$, il existe un compact $K_d \subset SL_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que, si Ω est un domaine de Benzécri, $A \in SL(\Omega)$ et $d_\Omega(O_\Omega, A(O_\Omega)) \leq d$, alors $A \in K$.*

Démonstration Notons p l'origine. Prenons une suite (Ω_k, A_k) où, pour tout k , Ω_k est un domaine de Benzécri et $A_k \in SL(\Omega_k)$ vérifie $d_{\Omega_k}(p, A_k p) \leq d$. Montrons que A_k a une sous-suite convergente dans $SL_{n+1}(\mathbb{R})$.

Par compacité de l'ensemble des domaines de Benzécri, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que Ω_k converge vers un domaine de Benzécri Ω_∞ . Soit $\mathcal{B} = (p_0, \dots, p_{n+1})$ un repère projectif tel que $\mathcal{B} \subset B(\frac{1}{10})$. Alors $\mathcal{B} \subset B_{\Omega_k}(p, 1)$ pour tout k car $B(1) \subseteq \overline{\Omega_k}$.

Pour tout k , on note $\mathcal{B}_k := A_k(\mathcal{B}) \subset \Omega_k$. Quitte à extraire, on peut supposer que \mathcal{B}_k converge vers $\mathcal{B}_\infty \subset \Omega_\infty$. Alors, par inégalité triangulaire, $\mathcal{B}_k \subset B_{\Omega_k}(p, d+1)$ pour tout k car pour tout i :

$$d_{\Omega_k}(p, A_k p_i) \leq d_{\Omega_k}(p, A_k p) + d_{\Omega_k}(A_k p, A_k p_i) \leq d + d_{\Omega_k}(p, p_i) \leq d + 1$$

Par conséquent, $\mathcal{B}_k \subset B_{B(\mathcal{R}_n)}(p, d+1)$ pour tout k car $d_{B(\mathcal{R}_n)} \leq d_{\Omega_k}$.

Notons Δ l'enveloppe convexe de \mathcal{B} et Δ_∞ celle de \mathcal{B}_∞ . Le volume de Δ dans un convexe Ω est défini par $\mathbf{vol}_\Omega(\Delta) := \int_\Omega \alpha_\Omega$, où $\alpha_\Omega \in \bigwedge_x^n \Omega$ est une forme volume qui respecte l'inclusion, i.e. si on a deux convexes $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subset \Omega$ alors $\mathbf{vol}_\Omega(\Omega_1) \leq \mathbf{vol}_\Omega(\Omega_2)$. En passant à la limite grâce au lemme 3.2, on a alors :

$$0 < \mathbf{vol}_{B(\mathcal{R}_n)}(\Delta) \leq \mathbf{vol}_{\Omega_k}(\Delta) = \mathbf{vol}_{\Omega_k}(A_k \Delta) \longrightarrow \mathbf{vol}_{\Omega_\infty}(\Delta_\infty)$$

i.e. $\mathbf{vol}_{\Omega_\infty}(\Delta_\infty) > 0$, ceci implique que \mathcal{B}_∞ est un repère projectif.

Soit A_∞ l'unique élément de $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{B}_∞ . Alors, pour tout k , $\mathcal{B}_\infty = A_\infty^{-1}(\mathcal{B}) = A_\infty^{-1} A_k^{-1}(\mathcal{B}_k)$, d'où, quitte à extraire, $A_k \rightarrow A_\infty$. \square

Lemme 3.4 (voisinage de Zassenhaus) *Dans $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ il existe un voisinage U de l'identité \mathbf{e} tel que, si Γ est un sous-groupe discret, alors $\langle \Gamma \cap U \rangle$ est nilpotent.*

Un tel voisinage est appelé *voisinage de Zassenhaus*.

Une démonstration différente de celle ci-dessous est donnée dans [11] (thm 8.15, p.147).

Démonstration On définit l'application de classe \mathcal{C}^∞

$$c : \begin{array}{ccc} SL_{n+1}(\mathbb{R}) \times SL_{n+1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & SL_{n+1}(\mathbb{R}) \\ (a, b) & \mapsto & [a, b] := aba^{-1}b^{-1} \end{array}$$

Alors

$$Dc_{(\mathbf{e}, \mathbf{e})} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_{n+1} \times \mathfrak{sl}_{n+1} & \rightarrow & \mathfrak{sl}_{n+1} \\ (A, B) & \mapsto & A + B - A - B = 0 \end{array}$$

i.e. la différentielle de c est nulle.

Par continuité de Dc en (\mathbf{e}, \mathbf{e}) , il existe $r > 0$ tel que pour tous $a, b \in B_r(\mathbf{e}) \subset SL_{n+1}(\mathbb{R})$, $\| \| Dc_{(a,b)} \| \| < \frac{1}{2}$. La formule de Taylor permet d'obtenir la majoration suivante :

$$m([a, b]) \leq \frac{1}{2} m(a) m(b)$$

On prend ensuite $U := \{x \in SL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid m(x) < \frac{1}{2}\}$. C'est un voisinage de \mathbf{e} dans $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tous $a, b \in U$, $m([a, b]) \leq \frac{1}{2}$.

On définit la suite de sous-groupes $\Delta^0 := \langle \Gamma \cap U \rangle$ et $\Delta^i := \langle [\Delta, \Delta^{i-1}] \rangle, \forall i \geq 1$. Comme Γ est un sous-groupe discret, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathbf{e}\}$, $m(\gamma) > \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\Delta^n = \{\mathbf{e}\}$, i.e. Δ est nilpotent. \square

Définition Soit G un groupe et S une partie génératrice de G . Pour tout $g \in G$, la *longueur de g relativement à S* , notée $\mathbf{m}(g)$, est la longueur du mot le plus court qui représente g à l'aide d'éléments de $S \cup S^{-1}$.

Lemme 3.5 Soient G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X de cardinal $|X| > m$, x un point de X et S une partie génératrice de G . Alors il existe au moins $m + 1$ éléments de G de longueur inférieure ou égale à m qui envoient x sur $m + 1$ points distincts.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n) := \{g \in G \mid \mathbf{m}(g) \leq n\}$ et $r(n) := |R(n).x|$. On veut montrer que $r(m) \geq m + 1$. Raisonnons par l'absurde, supposons que $r(m) \leq m$. D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, sachant que $r(0) = 1$ et $r(m) \leq m$, il existe un entier $i < m$ tel que $r(i + 1) = r(i) \leq m$. Alors $R(i + 1) = R(i)$, d'où $S R(i) = R(i)$, ce qui implique $G R(i) = R(i)$. Finalement $R(n) = R(i)$, $\forall n \geq i$, d'où $|X| = |G.x| = r(i) \leq m$; absurde. \square

3.2 Un résultat plus général

Pour démontrer le lemme de Margulis 3.1 nous allons démontrer le théorème suivant, plus général.

Théorème 3.6 En dimension $n \geq 2$, il existe des constantes $m_n > 0$ et $\mu_n > 0$ telles que, si Ω est un ouvert proprement convexe, si $p \in \Omega$ et si Γ est un sous-groupe discret de $SL(\Omega)$ engendré par des isométries $(\gamma_i)_i$ telles que $d_\Omega(p, \gamma_i p) \leq \mu_n$, alors il existe un sous-groupe nilpotent N de Γ d'indice fini inférieur ou égal à m_n .

Démonstration Quitte à appliquer un automorphisme, on peut supposer que p est l'origine et que Ω est un domaine de Benzécri, i.e. $B(1) \subseteq \bar{\Omega} \subseteq B(\mathcal{R}_n)$. Soit U un voisinage de l'identité tel que $U^{-1}U$ est contenu dans un voisinage de Zassenhaus fourni par le lemme 3.4. On peut se donner un compact $K \subset SL_{n+1}(\mathbb{R})$ comme dans le lemme 3.3 (pour $d = 1$ par exemple). Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini, m , de copies du voisinage U ; notons $U_i = h_i U$ ces copies, avec $h_i \in SL_{n+1}(\mathbb{R})$, $\forall 1 \leq i \leq m$. Posons ensuite $\mu_n := \frac{d}{m}$. Puis on note $W \subset SL(\Omega)$ l'ensemble des isométries qui déplacent p d'une distance inférieure à μ_n :

$$W := \{A \in SL(\Omega) \mid d_\Omega(p, Ap) < \mu_n\}$$

Alors $W^m \subset K$ par définition de μ . Et $W = W^{-1}$ car, si $A \in W$, A^{-1} est une isométrie et $d_\Omega(p, A^{-1}p) < \mu_n$.

Par hypothèse, W est tel que $\Gamma = \langle \Gamma \cap W \rangle$. Et, d'après le lemme 3.4, $\Gamma_U := \langle \Gamma \cap U \rangle$ est un sous-groupe nilpotent de Γ .

On conclut en montrant qu'il y a au plus m classes à gauche de Γ suivant Γ_U . Par l'absurde, si $g_1 \Gamma_U, \dots, g_{m+1} \Gamma_U$ sont $m + 1$ classes distinctes, on peut appliquer le lemme 3.5 à Γ/Γ_U . Alors il existe des représentants $g_1, \dots, g_{m+1} \in \Gamma$ distincts de longueurs inférieures ou égales à m relativement à $\Gamma \cap W$, i.e. $\forall i, g_i \in W^m$ d'où $g_i \in K$. Or, K est recouvert par seulement m copies de U , donc il existe $i \neq j$ tels que $g_i, g_j \in U_r = h_r U$. Ainsi

$$g_i^{-1} g_j = (h_r u_i)^{-1} (h_r u_j) = u_i^{-1} u_j \in \Gamma \cap U^{-1}U \subset \Gamma_U$$

Finalement $g_i \Gamma_U = g_j \Gamma_U$; absurde. \square

En appliquant ce résultat au groupe discret $\Gamma = \pi_1^{\mu_n}(M, x)$, on obtient directement le lemme de Margulis 3.1.

3.3 Horosphères et pointes maximales

Commençons par introduire la notion d'*horosphère*. Pour plus de détails on pourra consulter [7] ou [10].

Définition Soit $c : [0, +\infty] \rightarrow \Omega$ un rayon géodésique de Ω , i.e. tel que $\forall t, d_\Omega(c(0), c(t)) = t$. On note β_c la *fonction de Busemann associée à c* définie comme suit :

$$\beta_c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} [d_\Omega(x, c(t)) - t]$$

On peut montrer que cette application est bien définie en tout point de Ω (par inégalités triangulaires) et même qu'elle est 1-lipschitzienne.

Définition On appelle *horosphère de Ω centrée en p* une hypersurface de niveau $\beta_c^{-1}(\{t_0\})$ de β_c telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = p \in \partial\bar{\Omega}$.

On appelle *horoboule* la partie contenue à l'intérieure d'une horosphère.

On peut montrer que ces définitions ne dépendent pas du rayon géodésique c choisi.

Exemple Dans le disque de Poincaré, les horosphères sont des cercles tangents au bord du disque.

Donnons à présent la définition de *pointe* dans une variété projective convexe.

Définition Soient $M = \Omega/\Gamma$ une variété projective proprement convexe, $p \in \partial\bar{\Omega}$ et \mathcal{U} un voisinage de p dans Ω (pour \mathcal{U} on peut prendre une horoboule centrée en p). On note $\Gamma_p := \text{Stab}_p(\Gamma)$. Le quotient \mathcal{U}/Γ_p est alors appelé une *pointe* de M . C'est une *pointe maximale* si elle est de volume fini.

Grâce à la constante de Margulis fournie par le lemme 3.1, on peut définir la *partie fine* d'une variété projective strictement convexe afin de compléter la notion de pointe.

Définition Soit M une variété projective strictement convexe. Le *rayon d'injectivité* en $x \in M$ est

$$\text{inj}(x) := \inf \left\{ \frac{l(\gamma)}{2} \mid \gamma \in \pi_1(M, x) \text{ non contractile} \right\}$$

i.e. $2 \text{inj}(x)$ est la longueur du plus court lacet non contractile basé en x .

Alors la *partie fine de M* est le sous-ensemble $\{x \in M \mid \text{inj}(x) < \frac{\mu_n}{2}\}$.

Remarque — Si $\text{inj}(x) > \frac{\mu_n}{2}$, alors le groupe fondamental local $\pi_1^{\mu_n}(M, x)$ est trivial.

Théorème 3.7 Une composante N de la partie fine de M est, soit un voisinage tubulaire d'une géodésique, soit topologiquement de la forme $K \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, avec K compact.

Dans le premier cas, on dit que N est un *tube de Margulis*; dans le second cas, N est une pointe. Les pointes maximales sont celles telles que $d = 0$. Topologiquement les pointes maximales sont de la forme $P \times \mathbb{R}^+$ avec P compact.

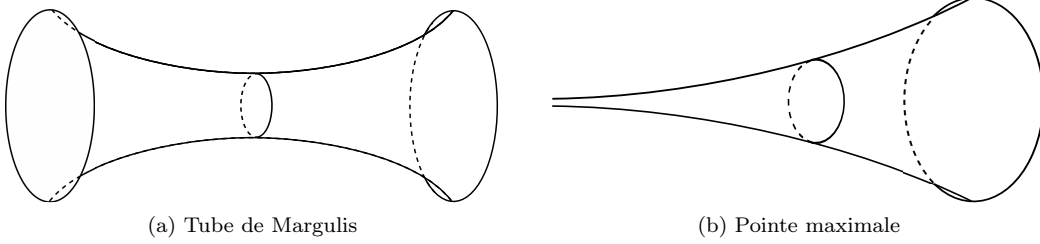


FIGURE 3.1 – Composantes de la partie fine

Chapitre 4

Structure des pointes maximales

Cette partie a pour but de démontrer le théorème 4.1 qui décrit la structure des pointes maximales d'un ouvert proprement convexe. Plusieurs lemmes importants sont démontrés avant de donner une démonstration du théorème dans la section 4.6.

Définition Soit $P = \mathcal{U}/\Gamma$ une pointe. On dit que P est une *pointe hyperbolique* si le voisinage \mathcal{U} est un ellipsoïde.

Définition Deux pointes $P = \mathcal{U}/\Gamma_p$ et $P' = \mathcal{U}'/\Gamma_{p'}$ sont *projectivement équivalentes* s'il existe $g \in PGL(\Omega)$, tel que $\mathcal{U} \xrightarrow{g} \mathcal{U}'$ et qui passe au quotient $\mathcal{U}/\Gamma_p \xrightarrow{\bar{g}} \mathcal{U}'/\Gamma_{p'}$.

Théorème 4.1 *Une pointe maximale d'un ouvert proprement convexe est projectivement équivalente à une pointe hyperbolique de même dimension.*

Notation Soient Ω un ouvert proprement convexe et $p \in \partial\bar{\Omega}$. On note $SL(\Omega, p)$ le sous-groupe de $SL(\Omega)$ composé des isométries qui fixent le point p . Si de plus H est un hyperplan d'appui de Ω en p , on note $SL(\Omega, H, p)$ le sous-groupe des isométries qui préservent H et fixent p .

4.1 Un premier lemme

Définition Soit Ω un ouvert proprement convexe. Une isométrie $A \in SL(\Omega)$ est dite *elliptique* si elle fixe un point de Ω . Autrement, A est *parabolique* si toutes ses valeurs propres sont de module 1 et *hyperbolique* sinon.

Lemme 4.2 *Soient Ω un ouvert strictement convexe et $p \in \partial\bar{\Omega}$. Si $W < SL(\Omega, p)$ est nilpotent et agit simplement-transitivement sur $\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}$, alors W est unipotent et conjugué dans $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ à un sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.*

Démonstration Le sous-groupe W étant nilpotent, son algèbre de Lie \mathfrak{w} est nilpotente. De plus, W est simplement connexe, donc l'exponentielle $\exp : \mathfrak{w} \rightarrow W$ est un difféomorphisme, en particulier $\exp(\mathfrak{w}) = W$.

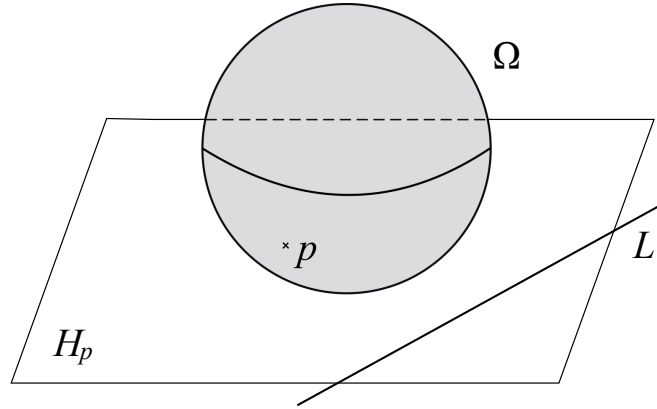
Le théorème de Lie implique qu'il existe une base de \mathbb{C}^{n+1} qui trigonalise \mathfrak{w} , i.e. $\exists P \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) : P\mathfrak{w}P^{-1} \subset \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Supposons que λ soit une valeur propre non nulle de $A \in \mathfrak{w}$ et $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ . On peut supposer que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad w = \exp(A) = \begin{pmatrix} e^\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \in W$$

Or tout élément de W est parabolique, i.e. $|e^\lambda| = 1$, d'où $\lambda = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Donc, à conjugaison près, le bloc 2×2 supérieur gauche de w est un bloc de rotation. En particulier, w a un plan stable correspondant à une droite projective $L \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Soit H_p un hyperplan d'appui de Ω en p . On a $L \subset H_p$, car sinon le point d'intersection de H_p et L est fixé par w , ce qui est absurde. L'ensemble $\{H \mid H \text{ hyperplan tangent à } \Omega, L \subset H\}$ est W -invariant. Donc l'ensemble des points de tangence est $\{p\}$ ou $\partial\bar{\Omega}$. Le premier cas implique $p \in L$; absurde car p correspond à une droite vectorielle associée à la valeur propre 1. Le second cas est également impossible car l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ contenant L est un sous-espace projectif de dimension $n - 2$.



Ainsi, le spectre de chaque élément de \mathfrak{w} est réduit à $\{0\}$. D'où $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{n}$, avec

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \right\}$$

Ainsi, pour tout $w = \exp(A) \in W$, $w - \text{id}$ est nilpotente. Finalement W est unipotent. \square

4.2 Caractérisation des bords elliptiques

Définition On dit que $p \in \partial\bar{\Omega}$ est un *point C^1 strictement convexe* si Ω est strictement convexe en p et admet un unique hyperplan d'appui en p .

Définition Une isométrie parabolique de $O(n, 1)$ est une *translation pure* si toutes ses valeurs propres valent 1.

Lemme 4.3 Soient $p \in \partial\bar{\Omega}$ et $\Gamma \subset SL(\Omega, p)$. Si $\mathcal{D}_p\Omega/\Gamma$ est compact, alors p est C^1 strictement convexe.

Démonstration On trouvera une preuve de ce résultat dans l'article principal [1]. □

Théorème 4.4 On suppose Ω strictement convexe de dimension n . Soit un sous-groupe nilpotent $W < SL(\Omega, p)$ qui agit simplement-transitivement sur $\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}$. Alors $\partial\bar{\Omega}$ est un ellipsoïde et W est conjugué au sous-groupe des translations pures dans un sous-groupe d'éléments paraboliques de $O(n, 1)$.

Démonstration On procède par récurrence sur $n = \dim W = \dim \partial\bar{\Omega}$ avec l'hypothèse de récurrence suivante :

Il existe des coordonnées paraboliques pour Ω centrées en p telles que $\partial\bar{\Omega}$ est le graphe de la fonction convexe $f : U \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{\langle u, u \rangle}{2}$, où $U = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et les éléments de W sont définis sur toute la carte affine et de la forme $S_u : \lambda e_0 + x \mapsto x + u + \langle u, x \rangle e_0 + \frac{\langle u, u \rangle}{2} e_0 + \lambda e_0$ paramétrés par $u \in U$. Chaque S_u est alors la restriction d'une unique transformation projective. □

Pour $n = 1$, on sait que $W = \{\exp(u\alpha) | u \in \mathbb{R}\}$ pour un $\alpha \in \mathfrak{w}$, et que l'orbite par W de $[0 : 0 : 1]$ est strictement convexe dans \mathbb{RP}^2 . D'après le lemme 4.2, α est nilpotent, donc, à conjugaison près,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Le second cas est impossible car alors

$$\exp(u\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

ne donne aucune orbite strictement convexe.

Dans le premier cas,

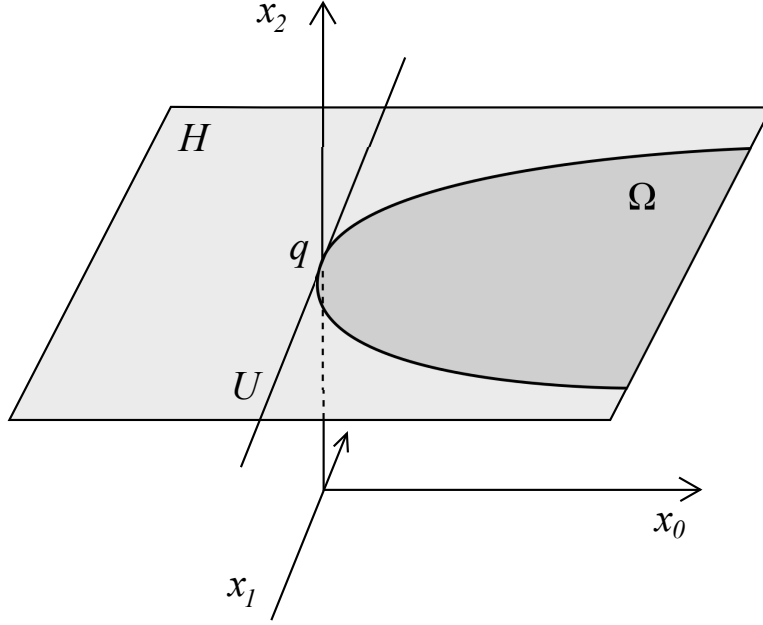
$$\exp(u\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & u & \frac{u^2}{2} \\ & 1 & u \\ & & 1 \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} \\ u \end{bmatrix}$$

donc $\partial\bar{\Omega}$ est le graphe de la fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{u^2}{2}$.

De plus, en notant (e_0, e_1, e_2) la base de \mathbb{R}^3 où la matrice $\exp(u\alpha)$ s'écrit comme ci-dessus, on a $p = [e_0]$ et $P = \mathbb{P}(\text{Vect}(e_0, e_1))$ est l'hyperplan d'appui de Ω en p . De cette façon on munit Ω de coordonnées paraboliques centrées en (P, p) et d'origine $q = [e_2]$. On se place dans l'hyperplan affine $H = \{x_2 = 1\}$ et on pose $U = \{x_0 = 0\} \subset H \simeq \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $u \in U \simeq \mathbb{R}$ et tout

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \in U :$$

$$\exp(u\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & u & \frac{u^2}{2} \\ & 1 & u \\ & & 1 \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ux + \frac{u^2}{2} \\ x + u \end{bmatrix} = x e_1 + u e_1 + ux e_0 + \frac{u^2}{2} e_0$$



Ainsi, les éléments de W sont de la forme S_u voulue.

Prenons à présent Ω tel que $\dim \bar{\partial\Omega} = n + 1$, i.e. $\Omega \subset \mathbb{RP}^{n+2}$.

Comme Ω est strictement convexe, on voit par contraposition que $\mathcal{D}_p|_{\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}}$ est injective, car sinon une droite passant par p a deux antécédents r et q alignés avec p . La projection \mathcal{D}_p induit alors une bijection $\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\} \simeq \mathcal{D}_p\Omega$. Sachant que W agit simplement-transitivement sur $\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}$, on en déduit que $\mathcal{D}_p\Omega/W$ est en fait un point, a fortiori $\mathcal{D}_p\Omega/W$ est compact. Ainsi, d'après le lemme 4.3, p est un point C^1 strictement convexe.

D'autre part, Ω est un ouvert proprement convexe de \mathbb{RP}^{n+2} , d'après le lemme 4.2, il existe une base (e_0, \dots, e_{n+2}) de \mathbb{R}^{n+3} où W se trigonalise simultanément. Dans ces coordonnées, $p = [e_0]$ et on note $P = \mathbb{P}(\text{Vect}(e_0, \dots, e_{n+1}))$ l'hyperplan d'appui de Ω en p . Enfin, on choisit e_{n+2} afin que $q := [e_{n+2}] \in \partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}$.

Dans toute la suite on se place dans l'hyperplan affine $\{x_{n+2} = 1\} \simeq \mathbb{R}^{n+2}$. Le point p étant C^1 strictement convexe, l'hyperplan d'appui P est unique. On peut alors munir Ω de coordonnées paraboliques centrées en (P, p) ayant q pour origine. On note $U = \{x_0 = 0\}$ l'hyperplan de \mathbb{R}^{n+2} ; il est tangent à Ω en q .

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note P_c l'hyperplan $\{x_{n+1} = c\}$ de \mathbb{R}^{n+2} . Alors $\{P_c | c \in \mathbb{R}\}$ est un feuilletage de \mathbb{R}^{n+2} laissé stable par W . En effet, $w \in W$ et $v \in P_c$ ont la forme suivante dans \mathbb{R}^{n+3} :

$$w = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots & w_0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{d'où} \quad w(v) = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ c + w_0 \\ 1 \end{bmatrix} \in P_{c+w_0}$$

On note ensuite $V = U \cap P_0$, $\Omega_V = \Omega \cap P_0$ et W_V l'ensemble des éléments w de W tels que $w_0 = 0$. On peut à présent appliquer l'hypothèse de récurrence à V et Ω_V . On dispose donc

d'un produit scalaire sur V tel que Ω_V est le graphe de $f : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \frac{\|v\|^2}{2}$, et

$$W_V = \left\{ T_v \mid T_v(x) = x + v + \langle v, x \rangle e_0 + \frac{\|v\|^2}{2} e_0, v \in V \right\}$$

On se donne une base orthonormée $\mathcal{B}'_n = (e'_1, \dots, e'_n)$ de V . Dans la base $(e_0, \mathcal{B}'_n, e_{n+2})$, un élément T_v de W_V a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t v & \frac{\|v\|^2}{2} \\ & \ddots & v \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les éléments de l'algèbre de Lie \mathfrak{w}_V de W_V sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t v & 0 \\ & \ddots & v \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

En ajoutant la colonne omise, on obtient la forme générale des éléments de l'algèbre de Lie \mathfrak{w} de W :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & {}^t x & t_0 & 0 \\ & \ddots & t & x \\ & & \ddots & x_{n+1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par hypothèse, l'action de W sur U est simplement-transitive, donc les éléments $\alpha \in \mathfrak{w}$ peuvent être paramétrés uniquement par $X = {}^t(x_1, \dots, x_{n+1})$. De plus, les entrées de α dépendent linéairement de X . On peut donc écrire $\alpha = \alpha(X)$ et

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t C \\ M_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} t_0 = {}^t C X \\ t = M_0 X \end{cases}$$

On constate que $\alpha^4 = 0$, donc un élément $w \in W$ s'écrit $w = \exp(\alpha) = I_{n+3} + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha^3$, ce qui donne

$$w = \begin{pmatrix} 1 & {}^t x & t_0 + \frac{{}^t x t}{2} & f(X) \\ & \ddots & t & x + \frac{x_{n+1} t}{2} \\ & & \ddots & x_{n+1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \\ f(X) = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{t_0 x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1} {}^t x t}{6} \end{cases}$$

W agit sur \mathbb{R}^{n+2} par transformation affine, i.e. par $w : X \mapsto A_w X + B_w$, avec $A_w \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ et $B_w \in \mathbb{R}^{n+2}$ qui correspondent à

$$w = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & {}^t x & t_0 + \frac{{}^t x t}{2} \\ & \ddots & t \\ & & 1 \end{pmatrix}}^{= A_w} & \overbrace{\begin{pmatrix} f(X) \\ x + \frac{x_{n+1} t}{2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}}^{= B_w} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

L'orbite de l'origine donne $\partial\bar{\Omega} \setminus \{p\}$; avec ces notations, l'orbite de $0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ est simplement $\{B_w | w \in W\}$. En particulier, $f(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$, donc f n'a ni terme cubique, ni terme linéaire. Ceci implique que, pour tout $X \in U$, $x_{n+1} {}^t x t = 0$. Pour étudier cette égalité, on écrit

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_1 & m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_1 \in M_n(\mathbb{R}), m \in \mathbb{R}^n$$

de sorte que $t = M_0 X = M_1 x + x_{n+1} m$. Alors

$$x_{n+1} {}^t x t = 0, \forall X \in U \implies \begin{cases} m = 0 \text{ (choisir } x_{n+1} = \pm 1) \\ {}^t x M_1 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \implies \begin{cases} m = 0 \\ M_1 \text{ antisymétrique} \end{cases}$$

De plus, \mathfrak{w} est une algèbre de Lie, donc stable par crochet de Lie, i.e. pour tout $X, X' \in U$, il existe X'' tel que $[\alpha(X), \alpha(X')] = \alpha(X'')$. Or

$$[\alpha(X), \alpha(X')] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & {}^t x t' - {}^t x' t & t_0 x'_{n+1} - t'_0 x_{n+1} \\ & 0 & & & 0 & t_1 x'_{n+1} - t'_1 x_{n+1} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & t_n x'_{n+1} - t'_n x_{n+1} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} = \alpha(X'')$$

D'où

$$\begin{cases} X'' = 0 \implies \alpha(X'') = 0 \\ x'_{n+1} t = x_{n+1} t' \\ x'_{n+1} t_0 = x_{n+1} t'_0 \\ {}^t x t' = {}^t x' t \end{cases} \implies \begin{cases} x'_{n+1} {}^t C X = x_{n+1} {}^t C X' \\ {}^t x' M_0 X = {}^t x M_0 X' \end{cases} \implies \begin{cases} x'_{n+1} {}^t C X = x_{n+1} {}^t C X' \\ {}^t x' M_1 x = {}^t x M_1 x' \end{cases}$$

La première ligne donne $C = {}^t(0, \dots, 0, 1)$, en choisissant $x'_{n+1} = x_{n+1} \neq 0$, $x = 0$ et $x' = 0$. La seconde ligne implique $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x' M_1 x = 0$, en prenant la transposée; d'où $M_1 = 0$. Ainsi, un élément $w \in W$ est de la forme

$$w = \begin{pmatrix} 1 & {}^t x & x_{n+1} & f(X) \\ & \ddots & 0 & x \\ & & \ddots & x_{n+1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

et la fonction f devient simplement $f(X) = \frac{\|X\|_2^2}{2}$. Finalement, $\partial\bar{\Omega}$ est projectivement équivalent à une boule et W est conjugué à un sous-groupe parabolique de $O(n+2, 1)$. L'unipotence de W permet de conclure que W est le sous-groupe des translations pures.

4.3 Existence d'enveloppe syndétique

Définition Soit Γ un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G . Une *enveloppe syndétique* de Γ est un sous-groupe de Lie connexe $W \leq G$ contenant Γ tel que W/Γ est compact.

Proposition 4.5 *Si Γ est un sous-groupe discret et nilpotent de $GL_n(\mathbb{R})$ de type fini. Alors Γ contient un sous-groupe Γ_0 d'indice fini, dont l'enveloppe syndétique $W \leq GL_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, simplement-connexe et un sous-groupe de $\overline{\Gamma_0}^z$, où $\overline{\Gamma_0}^z$ désigne l'adhérence de Zariski de Γ_0 .*

Démonstration Comme Γ est de type fini, le lemme de Selberg (cf. [2], p.269-273) fournit un sous-groupe Γ_1 sans torsion et d'indice fini. Puis, Γ_1 étant nilpotent, de type fini et sans torsion, un théorème ([14] p.45, thm 2.6) affirme qu'il existe un groupe de Lie \widetilde{W} nilpotent simplement-connexe contenant un réseau isomorphe à Γ_1 .

Un théorème classique de superrigidité ([15] p.176, cor. 6.8) permet d'affirmer que l'inclusion $i : \Gamma_1 \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ s'étend virtuellement en un morphisme $\pi : \widetilde{W} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, i.e. il existe $\Gamma_0 < \Gamma_1$ d'indice fini tel que la restriction de i à Γ_0 s'étend en $\pi : \widetilde{W} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$.

On pose $W = \pi(\widetilde{W})$. Montrons que l'application $\pi : \widetilde{W} \rightarrow W$ est un revêtement, i.e. montrons que $\ker \pi$ est discret. L'application $\pi : \widetilde{W} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est propre. En effet, soient K un compact de $GL_n(\mathbb{R})$, D un domaine fondamental de Γ_0 dans \widetilde{W} et $F := \Gamma_0 \cap (\pi(D))^{-1}K$ un sous-ensemble fini de Γ_0 . Alors $\pi^{-1}(K) \subset DF$ car π est l'identité sur Γ_0 ; d'où $\pi^{-1}(K)$ est compact. A présent, l'application π étant propre, $\pi^{-1}(\{id\})$ est un compact. Or, pour tout $X \in \text{Lie}(\ker \pi)$, on a $\{\exp(tX) | t \in \mathbb{R}\} \subset \pi^{-1}(\{id\})$. Ceci implique $X = 0$. Ainsi, $\text{Lie}(\ker \pi) = \{0\}$, donc $\ker \pi$ est discret.

Montrons maintenant que W s'identifie à \widetilde{W} ; il suffit de montrer que $\ker \pi = \{id\}$. Or, $\ker \pi$ étant discret, pour tout $\gamma \in \ker \pi$, l'application $\widetilde{W} \rightarrow \ker \pi$, $g \mapsto g\gamma g^{-1}$ est localement constante, et donc constante (égale à γ) par connexité. Donc $\ker \pi$ est dans le centre de \widetilde{W} , noté Z .

Dans la suite de la preuve on travaille dans le centre Z , on opte donc pour une notation additive. On a $\Gamma_0 \cap \ker \pi = \{0\}$ car π restreinte à Γ_0 est une inclusion, de plus $\ker \pi$ est un sous-groupe discret de Z . Alors $H := \Gamma_0 \cap Z + \ker \pi < Z$ est un sous-groupe discret car $H = \pi^{-1}(\Gamma_0) \cap Z$ et $\pi^{-1}(\Gamma_0) = \langle \Gamma_0, \ker \pi \rangle$ est discret.

Puis, on peut prendre $Z = \mathbb{R}^d$ car \widetilde{W} est nilpotent simplement-connexe, alors $\Gamma_0 \cap Z = \mathbb{Z}^k$, $k \leq d$. En fait, $k = d$ car $\Gamma_0 \cap Z < Z$ est cocompact ([11] p.40, prop. 2.17). Pour tout $\alpha \in \ker \pi \subset \mathbb{R}^d$, le sous-groupe $\mathbb{Z}^d + \mathbb{Z}\alpha$ est discret. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\alpha \in \mathbb{Z}^d$. Mais alors $n\alpha \in \Gamma_0 \cap Z$ et $n\alpha \in \ker \pi$, d'où $\alpha = 0$. Finalement, $\ker \pi = \{0\}$. \square

4.4 Existence d'un autre convexe

Proposition 4.6 *Soient Ω un ouvert proprement convexe, $p \in \partial\overline{\Omega}$, H un hyperplan d'appui de Ω en p et $\Gamma \subset SL(\Omega, H, p)$ un groupe de pointe maximale sans torsion. Si W est nilpotent et simplement-connexe, si Γ est un réseau cocompact de W et si $W \subset \overline{\Gamma}^z$, alors il existe un ouvert strictement convexe Ω' qui est préservé par W tel que $p \in \partial\overline{\Omega}'$ et W agit simplement-transitivement sur $\partial\overline{\Omega}' \setminus \{p\}$.*

Démonstration La condition que Γ préserve p et H est algébrique, alors $\overline{\Gamma}^z$, et donc aussi W , préservent p et H .

On dispose d'une action naturelle de W sur $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \{p\}) \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$. Cette action préserve $\mathcal{D}_p(H)$, donc on obtient une action sur une carte affine $\mathbb{A}^{n-1} \simeq \mathcal{D}_p(\mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus H)$. Comme p est C^1 strictement convexe, la projection radiale \mathcal{D}_p permet d'identifier \mathbb{A}^{n-1} à une horosphère \mathcal{S} (qui s'appuie sur H au point p). Or, l'action de Γ sur \mathcal{S} est proprement discontinue, donc celle de Γ

sur \mathbb{A}^{n-1} l'est aussi. Ainsi, le quotient \mathbb{A}^{n-1}/Γ est séparé.

Montrons que l'action de W sur \mathbb{A}^{n-1} est libre et transitive. Soit $x_0 \in \mathbb{A}^{n-1}$, on définit l'application $\tilde{\theta} : W \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$, $w \mapsto w.x_0$. Elle est Γ -équivariante par définition. La cocompacité de $\Gamma < W$ et la Γ -équivariance impliquent que $\tilde{\theta}$ est propre. D'où le stabilisateur $Stab_{x_0}(W) = \tilde{\theta}^{-1}(\{x_0\})$ est compact, et donc $Stab_{x_0}(W) = \{1\}$ par nilpotence de W . Ainsi, l'action est libre. Puis, $\dim W = \dim \mathbb{A}^{n-1}$ et $\tilde{\theta}$ est injective, donc $\tilde{\theta}$ est ouverte. Comme $\tilde{\theta}$ est propre, $\tilde{\theta}(W)$ est un fermé (non vide). Finalement, par connexité, $\tilde{\theta}(W) = \mathbb{A}^{n-1}$. Ainsi, l'action est transitive.

Soit $x \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus H$ fixé. On note Ω' l'intérieur de $Conv(W.x)$. Montrons que Ω' est proprement convexe. Comme p est C^1 strictement convexe, les horosphères \mathcal{S}_t basées en p forment un feuilletage de \mathbb{A}^n et les horoboules \mathcal{B}_t associées remplissent \mathbb{A}^n . De plus, il existe un domaine fondamental $D \subset W$ tel que $\Gamma.D = W$. Alors l'ensemble $D.x$ est un compact de \mathbb{A}^n . Donc il existe une horoboule \mathcal{B}_t qui contient $D.x$. D'où l'ensemble $W.x = \Gamma.D.x$ est aussi contenu dans \mathcal{B}_t . Finalement, $Conv(W.x) \subseteq \mathcal{B}_t$, donc $Conv(W.x)$ est proprement convexe.

La W -invariance de Ω' est claire car P est un hyperplan d'appui de Ω' en p puisque $p \in \partial\overline{\Omega'}$ et $\Omega' \subseteq \mathcal{B}_t$.

Montrons pour finir que Ω' est strictement convexe. Le compact $Conv(W.x)$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, donc il existe un point extrémal $q \in \partial\overline{\Omega'}$ autre que p . Or W agit transitivement sur $\mathcal{D}_p\Omega$ et donc sur $\partial\overline{\Omega'} \setminus \{p\}$. D'où tous les points de l'orbite $W.q$ sont extrémaux, et donc ceux de $\partial\overline{\Omega'} \setminus \{p\}$ aussi. Ainsi tous les points du bord $\partial\overline{\Omega'}$ sont extrémaux, i.e. Ω' est strictement convexe. \square

4.5 Un dernier lemme

Lemme 4.7 *Soient q une forme quadratique de signature $(n, 1)$ et B la boule $\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | q(x) < 0\})$. Soient $\Gamma < GL_{n+1}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_0 \subset O(n, 1)$ un sous-groupe de Γ d'indice fini qui préserve B et fixe le point $p \in \partial\overline{B}$. Si $(\partial\overline{B} \setminus \{p\})/\Gamma$ est compact, alors $\Gamma \subset O(n, 1)$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.8 *Les quadriques Γ_0 -invariantes sont, à homothéties près, celles associées à des formes quadratiques de la forme $q_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(s, v, t) \mapsto 2st - \|v\|^2 + \lambda t^2$.*

Démonstration D'après le lemme 4.4, les éléments de W sont de la forme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & {}^t x & \frac{\|x\|^2}{2} \\ & \ddots & x \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^n$$

On cherche les formes quadratiques de \mathbb{R}^{n+2} de matrice $A \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ telles que, $\forall g \in \Gamma_0$, ${}^t g A g = A$. On pose

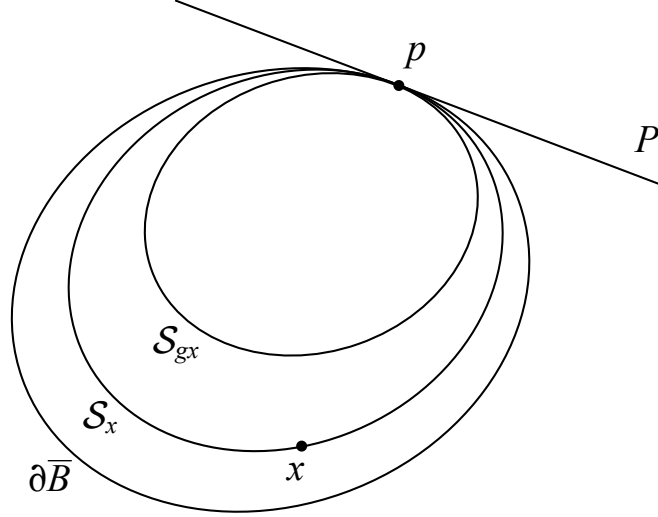
$$A = \begin{pmatrix} \mu & u & \beta \\ {}^t u & A_0 & v \\ \beta & {}^t v & \lambda \end{pmatrix}$$

Après calcul matriciel, on obtient $\mu = 0$, $u = v = 0$ et $A_0 = -\beta I_n$. En travaillant à homothéties près, on peut prendre $\beta = 1$ (le cas dégénéré $\beta = 0$ ne nous intéressant pas). Finalement, la matrice A vaut

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique associée est $q_\lambda : (s, v, t) \mapsto 2st - \|v\|^2 + \lambda t^2$. □

Donnons à présent la preuve du Lemme 4.7 :



Démonstration Commençons par remarquer qu'il existe une unique quadrique Γ_0 -invariante contenant l'orbite $\Gamma_0.x$. En effet, si $x = (s, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la seule quadrique qui convient est celle associée à la forme quadratique q_λ , avec $\lambda = \frac{\|v\|^2 - 2st}{t^2}$. Quitte à prendre un sous-groupe Γ_1 d'indice fini, montrons que l'on peut supposer que Γ_0 est un sous-groupe distingué de Γ . En effet, posons

$$\Gamma_1 := \bigcap_{g \in \Gamma} g \Gamma_0 g^{-1} = \bigcap_{g \in \Lambda} g \Gamma_0 g^{-1} \quad \text{où } \Lambda = \Gamma / \text{Norm}_\Gamma(\Gamma_0) \text{ est fini.}$$

Ainsi Γ_1 est distingué d'indice fini dans Γ .

On note P l'hyperplan d'appui de Ω en p ; c'est l'unique hyperplan préservé par Γ_0 . Alors, pour tout $g \in \Gamma$, gP est un hyperplan invariant par $g \Gamma_0 g^{-1} = \Gamma_0$. D'où, par unicité, $gP = P$, i.e. P est préservé par Γ .

Soit $x \in \partial\bar{B} \setminus \{p\}$, la compacité de $(\partial\bar{B} \setminus \{p\}) / \Gamma$ implique que l'orbite $\Gamma_0.x$ est Zariski-dense dans $\partial\bar{B}$. Comme $x \notin P$ et Γ préserve P , on a que $gx \notin P$ pour tout $g \in \Gamma$. Puis Γ_0 préserve $\partial\bar{B}$, donc, pour tout $x \notin P$, $\Gamma_0.x$ est une sphère \mathcal{S}_x (qui s'appuie sur P au point p). La normalité de Γ_0 implique $\Gamma_0.(gx) = gg^{-1}(\Gamma_0.(gx)) = g(\Gamma_0.x)$, pour tout $g \in \Gamma$. D'où, pour tout $g \in \Gamma$,

$$\mathcal{S}_{gx} = \overline{\Gamma_0.(gx)}^z = \overline{g(\Gamma_0.x)}^z = g\mathcal{S}_x$$

i.e. g préserve la famille de sphères $\{\mathcal{S}_x | x \in P\}$. Fixons $g \in \Gamma$ quelconque, le groupe-quotient Γ/Γ_0 étant fini, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $g^n \in \Gamma_0$ (l'indice $[\Gamma : \Gamma_0]$ convient).

On choisit un tel entier n . Montrons que g préserve toute sphère \mathcal{S}_x . Sinon, quitte à changer g en g^{-1} , on peut supposer que $g\mathcal{S}_x$ est strictement contenue dans la boule bordée par la sphère \mathcal{S}_x , car \mathcal{S}_x et $g\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_{gx}$ sont disjointes. Mais alors $g^n\mathcal{S}_x \subset g\mathcal{S}_x$ est aussi contenue dans la boule bordée par la sphère \mathcal{S}_x , en particulier g^n ne préserve pas \mathcal{S}_x , ce qui contredit $g^n \in \Gamma_0$.

Un résultat classique ([12], thm 6.1.2., p.190) affirme que toute transformation projective qui laisse la boule B invariante se restreint en une isométrie de B . Comme Γ préserve B et comme les isométries de B sont en bijection avec celles de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , on peut conclure que Γ est un sous-groupe de $O(n, 1)$. \square

4.6 Preuve finale

Combinons à présent les cinq résultats précédents afin de démontrer le théorème 4.1, i.e. montrons que le groupe Γ d'une pointe maximale est conjugué à $O(n, 1)$.

Démonstration On a que Γ préserve un ouvert proprement convexe Ω et fixe un point $p \in \partial\bar{\Omega}$. De plus Γ a un nombre fini de générateurs et, grâce au lemme de Margulis (théorème 3.1), Γ est nilpotent.

On peut appliquer la proposition 4.5 à Γ pour obtenir un sous-groupe $\Gamma_0 < \Gamma$ d'indice fini dont l'enveloppe syndétique $W < SL_{n+1}(\mathbb{R})$ est nilpotente, simplement-connexe et un sous-groupe de $\bar{\Gamma}_0^z$.

On applique ensuite la proposition 4.6 à Γ_0 qui est un réseau cocompact sans torsion, d'après la démonstration de 4.5. Ceci fournit un ouvert Ω' strictement convexe tel que $p \in \partial\bar{\Omega}'$ et tel que W agit simplement-transitivement sur $\partial\bar{\Omega}' \setminus \{p\}$.

D'après le théorème 4.4, $\partial\bar{\Omega}'$ est un ellipsoïde et Γ_0 est conjugué à $O(n, 1)$.

Finalement, le lemme 4.7 permet de conclure. \square

Bibliographie

- [1] D. COOPER, D. LONG ET S. TILLMANN – On convex projective manifolds and cusps, arXiv :1109.0585, 2011.
- [2] R. C. ALPERIN – An elementary account of Selberg’s lemma, *Enseign. Math.*, 33 (1987), 269-273.
- [3] Y. BENOIST – Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques, *Publ. Math. IHES* 97, 2003, p.181-237
- [4] Y. BENOIST – A survey on divisible convex sets, *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, vol. 6 de *Adv. Lect. Math.*, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [5] J.-P. BENZÉCRI – Sur les variétés localement affines et localement projectives, *Bull. Soc. Math. France*, 88 :229-332, 1960.
- [6] K. BROMBERG – The Thick-Thin Decomposition, MSRI lecture, août 2007.
- [7] H. BUSEMANN – *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New-York, 1955.
- [8] M. CRAMPON ET L. MARQUIS – Un lemme de Kazhdan-Margulis-Zassenhaus pour les géométries de Hilbert, arXiv :1106.3156, 2011.
- [9] W. GOLDMAN – *Projective geometry on manifolds*, 1988.
- [10] F. PAULIN – *Leçons de géométrie riemannienne*, Cours de seconde année de Master, Département de Mathématiques d’Orsay, 2011-2012.
- [11] M. S. RAGUNATHAN – *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New-York, 1972.
- [12] J. G. RATCLIFFE – *Foundations of hyperbolic manifolds*, vol. 149 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New-York, 2006.
- [13] W. P. THURSTON – *Three-dimensional geometry and topology, Vol. 1*, volume 35 de *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [14] E. B. VINBERG – *Lie groups and Lie algebras II*, vol. 21 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [15] D. WITTE – Superrigidity of lattices in solvable Lie groups, *Invent. Math.*, 122(1) :147-193, 1995.