

Université de Strasbourg
Faculté de mathématiques
Mémoire de Master 2

Directeur de mémoire : Vladimir Fock

Polynôme d'Alexander et variétés amassées

Nicolas PASTANT

Strasbourg, le 27 juin 2013

Remerciements

Je remercie Monsieur Vladimir Fock de m'avoir proposé ce sujet, de m'avoir guidé dans mes réflexions, et surtout de m'avoir soutenu après des moments difficiles en 2012 et permis de pouvoir continuer à travailler avec lui.

Je remercie Monsieur Pierre Guillot pour son cours sans lequel il eut été difficile d'entrer dans le sujet, pour avoir répondu avec intérêt à mes questions et pour son soutien.

Je remercie les professeurs et mes camarades du M2 2012/2013 pour avoir stimulé mon goût pour les mathématiques.

Je remercie Agathe Kuhn pour sa présence, sa patience et son aide dans les moments de stress intense.

Je remercie Mathieu Trevisan de m'avoir aidé pour tout ce qui concerne Latex.

Introduction

Le but de ce mémoire est d'établir un lien entre la théorie des nœuds et les variétés amassées.

Pour ce faire nous utilisons deux objets liés aux variétés amassées, les dimers et les diagrammes de Thurston. Le polynôme d'Alexander est calculé à partir de constructions combinatoires impliquant ces objets. En associant un graphe biparti à un diagramme de nœud nous décrivons deux procédés pour calculer le polynôme d'Alexander. L'un "encode" l'homologie de l'extérieur du nœud dans le système à coefficients locaux défini par le revêtement universel abélien de l'extérieur du nœud, l'autre exprime le polynôme d'Alexander comme fonction de partition d'un sous-graphe.

En associant aux éléments du groupe de tresses B_n un mot en les générateurs de $S_n \times S_n$ puis le diagramme de Thurston et les coordonnées amassées qui lui correspondent on retrouve la représentation de Burau du groupe de tresses. Nous associons également un diagramme de Thurston (en réalité deux) à un diagramme d'entrelacs, nous nous intéressons aux propriétés de Poisson des variétés correspondantes.

Les principales sources d'inspiration de ce travail sont les articles suivants :

V.V Fock, A .Marshakov ; Integrable systems, Cluster Variables and Dimers ; à paraître

M. Cohen, O.T. Dasbach, H.M. Russell ; A twisted dimer model for knots ; arXiv :1010.5228

A. B. Goncharov, R. Kenyon ; Dimers and cluster integrable systems ; arXiv :1107.5588

D.Thurston ; From dominoes to hexagons ; arXiv :math/0405482

Structure du mémoire :

Nous rappelons dans la première partie les définitions du polynôme d'Alexander que nous utiliserons, la définition comme 1^{er} idéal élémentaire d'une matrice de présentation du premier groupe d'homologie du revêtement universel abélien de l'extérieur du nœud et la description, équivalente, de ce module comme le premier groupe d'homologie de l'extérieur du nœud à coefficients dans le système local défini par ce revêtement. Nous rappelons ensuite la représentation de Burau du groupe de tresses, et explicitons les matrices correspondantes ainsi que leur relation avec le polynôme d'Alexander.

Dans la deuxième partie nous rappelons la définition d'une certaine classe de variétés amassées, les variétés amassées de type χ dans le cas simplement lacé ainsi

que la structure de Poisson canonique qui leur est associée. Ensuite nous parlons des Dimers et des diagrammes de Thurston ainsi que leur lien avec les variétés amassées.

La troisième partie décrit la construction des graphes bipartis et leurs pondérations permettant de calculer le polynôme d'Alexander.

Enfin la quatrième partie décrit la relation entre les tresses et les diagrammes de Thurston permettant de retrouver la représentation de Burau du groupe de tresses. Et les diagrammes de Thurston associés aux diagrammes d'entrelacs, on aborde également les propriétés de Poisson des variétés amassées correspondantes.

Table des matières

1	Polynôme d'Alexander.	6
1.1	Présentation du polynôme d'Alexander	6
1.2	Définition du polynôme d'Alexander	7
1.2.1	Matrices de présentation, idéaux élémentaires.	7
1.2.2	Revêtement universel abélien de l'extérieur d'un nœud dans S^3	7
1.2.3	Homologie à coefficients locaux.	8
1.3	La représentation de Burau	8
1.3.1	Définition de la représentation de Burau	9
1.3.2	Matrices pour la représentation de Burau	9
1.3.3	Polynôme d'Alexander et représentation de Burau	9
2	Variétés amassées	10
2.1	Définition	10
2.2	Dimers	10
2.3	Diagrammes de Thurston	12
2.3.1	Diagrammes de Thurston et variétés amassées	14
3	Polynôme d'Alexander et dimers	15
3.1	Calcul du polynôme d'Alexander par l'homologie à coefficients locaux par un graphe.	15
3.2	Le polynôme d'Alexander comme une fonction de partition de dimers	18
4	Noeuds et diagrammes de Thurston.	19
4.1	La représentation de Burau par les diagrammes de Thurston	19
4.2	Diagrammes des entrelacs et diagrammes de Thurston	22
4.2.1	Structure de Poisson, fonctions de Casimir	22
4.2.2	Sous-variété lagrangienne	23

1 Polynôme d'Alexander.

Nous rappelons dans cette section le polynôme d'Alexander, objet de la théorie des nœuds avec lequel nous allons faire des liens avec les variétés amassées.

1.1 Présentation du polynôme d'Alexander

Le polynôme d'Alexander est le premier invariant polynomial des nœuds. Il a été découvert par J.W Alexander en 1923 [7]

On associe à un nœud orienté un polynôme de Laurent symétrique à coefficients entiers $\Delta(t)$.

Le polynôme d'Alexander a les propriétés suivantes :

Il distingue tous les nœuds ayant 8 croisements ou moins.

Le polynôme d'Alexander du nœud trivial est égal à 1.

$\Delta(1) = \pm 1$ pour tout nœud

$\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$

Étant donné un polynôme de Laurent P , tel que $P(t) = P(t^{-1})$ et $P(1) = \pm 1$ on peut trouver un nœud dont le polynôme d'Alexander est P .

Le polynôme d'Alexander est multiplicatif par rapport à la somme connexe de nœuds :

$$\Delta(k1 + k2) = \Delta(k1)P(k2)$$

Le polynôme d'Alexander d'un nœud alterné est alterné, c'est à dire que le signe de ses coefficients alternent entre + et -. (Renvoyer à un exemple de la table).

Le polynôme d'Alexander donne une borne inférieure pour le genre d'un nœud.

Mais le polynôme d'Alexander présente quelques carences :

Le polynôme d'Alexander ne distingue pas les nœuds de leur image miroir.

La réflexion (qui inverse la nature des croisements) et l'inverse (renversement d'orientation) d'un nœud K ont le même polynôme d'Alexander que K .

Le polynôme d'Alexander ne distingue pas un nœud des ses mutations.

Il ne peut distinguer certains nœud du nœud trivial par exemple le $(-3, 5, 7)$ nœud bretzel (figure Adams p167) et le nœud de Kinoshita-Terasaka (nœud représenté sur les portes du département de mathématiques de Cambridge) (autres exemples Rolfsen p167)

Le polynôme d'Alexander décrit en un certain sens le premier groupe d'homologie $H1(\tilde{X})$ du revêtement universel abélien de l'extérieur du nœud.

1.2 Définition du polynôme d'Alexander

Nous rappelons ici la définition du polynôme d'Alexander comme générateur du premier idéal élémentaire d'une matrice de présentation du premier groupe d'homologie du revêtement universel abélien \tilde{X} de l'extérieur du nœud en tant que $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

Il sera intéressant, lorsque nous ferons le lien avec les dimers, de considérer ce groupe comme le groupe d'homologie de l'extérieur du nœud à coefficient de le système local défini par le revêtement \tilde{X} .

Nous rappelons également la représentation (réduite) de Burau et explicitons les matrices associées. Les références sont [10] pour le polynôme d'Alexander, [12] et [13] pour l'homologie à coefficients locaux et [9] pour la représentation de Burau.

1.2.1 Matrices de présentation, idéaux élémentaires.

Soit M un module sur un anneau commutatif unitaire R . Une présentation finie pour M est une suite exacte

$$F \xrightarrow{f} E \rightarrow M \rightarrow 0$$

où E et F sont des R -modules libres de type fini. Si f est représentée par la matrice A dans les bases e_1, \dots, e_m et f_1, \dots, f_n de E et F respectivement, alors la matrice A est une matrice de présentation pour M .

Si $n \geq m$ le r -ième idéal élémentaire ε_r de M est l'idéal de R engendré par tous les

$(m - r + 1) \times (m - r + 1)$ mineurs de A . On vérifie que les idéaux élémentaires ne dépendent pas de la matrice de présentation choisie pour les calculer.

1.2.2 Revêtement universel abélien de l'extérieur d'un nœud dans S^3 .

Soit K un nœud dans S^3 et soit $N(K)$ un voisinage régulier de K dans S^3 , on appelle $S^3 - \text{int}N(K)$ l'extérieur de K , l'extérieur de K a le même type d'homotopie que $S^3 - K$.

Soit K un nœud dans S^3 et soit X l'extérieur de K . Soit $\pi = \pi_1(X)$ le groupe fondamental de l'extérieur de K , on l'appelle le groupe de K . Soit t la classe d'homologie dans $H_1(X) \simeq H_1(S^3 - K)$ représentée par un méridien de K . $H_1(X)$ est un groupe abélien libre engendré par t . Soit $f : \pi \rightarrow H_1(X)$ le morphisme d'abélianisation. Le revêtement de X correspondant au sous-groupe $\text{Ker}(f) = [\pi, \pi]$ de π est appelé le revêtement universel abélien de X , on le notera \tilde{X} . $H_1(X)$ agit sur \tilde{X} comme groupe des automorphismes de revêtement, on peut donc voir $H_1(\tilde{X})$

comme un module sur l'anneau du groupe $H_1(X)$, $\mathbb{Z}(H_1(X))$ que l'on identifie avec l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Le polynôme d'Alexander est un générateur du premier idéal élémentaire ε_1 du $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(\tilde{X})$.

1.2.3 Homologie à coefficients locaux.

Soit A un groupe et G un sous-groupe du groupe des automorphismes de A , $Aut(A)$. Tout fibré E au-dessus de B ayant pour fibre A et comme groupe structural G a la propriété que toute fibre $p^{-1}(b)$ a une structure de groupe. Ce groupe est isomorphe à A mais l'isomorphisme n'est pas canonique en général. Si A est un groupe abélien muni de la topologie discrète, $p : E \rightarrow B$ est un revêtement et est appelé système de coefficients locaux sur B .

Soit G un groupe topologique. Il agit sur lui-même par translations à gauche. Un G -fibré principal au-dessus de B est un fibré $p : P \rightarrow B$ ayant pour fibre $F = G$ et comme groupe structural G agissant par translations à gauche.

Un revêtement régulier $p : E \rightarrow B$ est un G -fibré principal avec $G = \pi_1(B)/p_*\pi_1(E)$. Et donc, en particulier, le revêtement universel abélien de l'extérieur d'un nœud dans S^3 , $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un $H_1(X)$ -fibré principal.

Soit X un CW -complexe, où dans chaque cellule σ_i^k on choisit un point base b_i^k . Soit $p : E \rightarrow X$ un système de coefficients locaux ayant pour fibre discrète un groupe abélien A et comme groupe structural $G \in Aut(A)$. On note les fibres $p^{-1}(x)$ par E_x .

On construit un complexe de chaînes de la manière suivante :

Soit $C_k(X; E)$ l'ensemble des sommes formelles $\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i^k$

où σ_i^k est une k -cellule et a_i est un élément du groupe $E_{b_i^k}$. L'addition évidente

dans $C_k(X; E)$ est bien définie et fait de $C_k(X; E)$ un groupe abélien. Soit $\partial : C_k(X; Z) \rightarrow C_{k-1}(X; Z)$ la différentielle usuelle. Supposons que $\partial(\sigma_i^k) = \sum_{j=1}^n n_j \sigma_j^{k-1}$

alors $\partial_l : C_k(X; E) \rightarrow C_{k-1}(X; E)$ est définie par $\partial_l(a_i \sigma_i^k) = \sum_{j=1}^n n_j f_i^j(a_i) \sigma_j^{k-1}$ où f_i^j est l'isomorphisme de groupe entre $p^{-1}(b_i^k)$ et $p^{-1}(b_j^{k-1})$ induit par un chemin entre b_i^k et b_j^{k-1} .

1.3 La représentation de Burau

Nous présentons ici la représentation réduite de Burau du groupe de tresses B_n . La principale référence utilisée est [9].

1.3.1 Définition de la représentation de Burau

Soit D le disque unité dans le plan complexe. Soit $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ n points de D et soit $D_n = D - P$. Pour tout lacet α dans D_n basé en d_0 il existe un unique entier $\phi(\alpha)$ que l'on appelle l'enroulement total de α qui compte le nombre de fois où α s'enroule autour des pointures p_1, p_2, \dots, p_n . Cela nous donne un homomorphisme $\phi : \pi_1(D_n) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Soit \tilde{D}_n le revêtement régulier de D_n correspondant au noyau de ϕ . Le groupe $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ agit sur \tilde{D}_n comme groupe des automorphismes de revêtement. Le groupe $H_1(\tilde{D}_n)$ est un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module libre de rang $n - 1$.

Soit $\beta \in B_n$ induit par un auto-homéomorphisme h de D_n . C'est à dire, $\beta = h_*$. Pour tout lacet γ dans D_n nous avons $\phi(h\gamma) = \phi\gamma$ de sorte que h se relève en un homéomorphisme \tilde{h} de \tilde{D}_n en lui-même. En passant à l'homologie on obtient un automorphisme de $H_1(\tilde{D}_n)$. Si h' est un autre homéomorphisme avec $h'_* = \beta$ alors $h_*^{-1}h'_* = 1$ et donc, comme $\pi_1(\tilde{D}_n) \rightarrow \pi_1(D_n)$ est injective nous avons $\tilde{h}_*^{-1}\tilde{h}'_* = 1$ en tant qu'application sur $\pi_1(\tilde{D}_n)$. En passant à l'homologie on obtient $\tilde{h}'_* - \tilde{h}_* = 0$. Par conséquent, l'homomorphisme $\psi_r : B_n \rightarrow GL(H_1(\tilde{D}_n))$ donné par $\psi_r : \beta \mapsto \tilde{h}_*$ est bien défini. Il est appelé représentation de Burau réduite de B_n .

1.3.2 Matrices pour la représentation de Burau

Si $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ sont les générateurs du groupe de tresses à n brins B_n alors les matrices pour la représentation de Burau réduite sont données par :

$$\psi\sigma_1 = \begin{pmatrix} -t & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & & I \end{pmatrix}, \psi\sigma_i = \begin{pmatrix} I & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & t & -t & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & & I \end{pmatrix}, \psi\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} I & & \\ & 1 & 0 \\ & t & -t \end{pmatrix}$$

ce sont des matrices de taille $(n - 1) \times (n - 1)$.

1.3.3 Polynôme d'Alexander et représentation de Burau

D'après un théorème d'Alexander tout nœud peut être représenté comme la fermeture d'une tresse. On note par $\hat{\beta}$ la fermeture de la tresse β . Soit $\beta \in B_n$ une tresse à n brins. Alors

$$(1 + t + \dots + t^{n-1})\Delta_{\hat{\beta}}(t) = \det(\psi\beta - I)$$

où $\Delta_{\hat{\beta}}(t)$ est le polynôme d'Alexander du nœud $\hat{\beta}$

2 Variétés amassées

Nous présentons une classe particulière de variétés amassées : les variétés amassées de type χ dans le cas simplement lacé. Nous renvoyons à [5] pour une introduction à ces objets.

2.1 Definition

Une graine est une paire (χ, ε) constituée d'un tore algébrique $\chi = (\mathbb{C}^\times)^N$ et d'une matrice antisymétrique de taille $N \times N$, ε_{ij} , appelée matrice d'échange. Les coordonnées standard sur χ sont notées x_i . Les graines sont considérées à isomorphisme permutant les facteurs de \mathbb{C}^N près. Une application entre deux graines (χ, ε) et (χ', ε') est appelée mutation en la k -ième coordonnée si $\varepsilon_{ik} \in \mathbb{Z}$ pour tout i et les matrices d'échanges et les coordonnées vérifient les relations suivantes :

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{cases} -\varepsilon_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ \varepsilon_{ij} & \text{si } \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} < 0 \\ \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}|\varepsilon_{kj}| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x'_i = \begin{cases} 1/x_i & \text{si } i = k \\ x_i(1 + x_k)^{\varepsilon_{ij}} & \text{si } \varepsilon_{ij} \geq 0 \\ x_i(1 + 1/x_k)^{\varepsilon_{ij}} & \text{si } \varepsilon_{ij} < 0 \end{cases}$$

Une transformation amassée est une composition de mutations et de permutations des coordonnées. Une application amassée est une composition de transformations amassées et de projections le long des axes de coordonnées standard.

Une variété amassée X de type χ est une variété algébrique recouverte par un ensemble (potentiellement infini) de cartes amassées qui sont des applications $\phi^\alpha(\chi^\alpha) \rightarrow X$, où $\{(\chi^\alpha, \varepsilon^\alpha)\}$ est une collection de graines, et telles que les fonctions de transition (ou mutations) $(\phi^\alpha)^{-1}\phi^\beta$ soient des transformations amassées. Une fonction régulière qui est un polynôme de Laurent à coefficients entiers dans toute carte est appelée fonction amassée.

Une variété amassée possède une structure de Poisson canonique donnée dans chacune des cartes $(X^\alpha, \varepsilon^\alpha)$ par :

$$\{x_i, x_j\} = \varepsilon^{ij}x_ix_j$$

2.2 Dimers

Nous renvoyons à [6] pour une introduction aux dimers et à [2] pour le lien entre les dimers et les variétés amassées.

Un graphe est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2

Soit $\Gamma = (V_1, V_2, E)$ un graphe biparti où V_1 et V_2 désignent les deux ensembles de sommets et E est l'ensemble des arêtes de Γ . Un dimer est un arête dans E . Un recouvrement de dimers est un sous-ensemble m de E tel que chaque sommet dans Γ soit l'extrémité d'exactlyement une arête dans m . Soit M l'ensemble des recouvrements de dimers de Γ . Remarquons que $M = \emptyset$ dès que $|V_1| \neq |V_2|$.

Soit $\mu : E \rightarrow \mathbb{C}[t]$ une pondération du graphe Γ , on note le graphe pondéré par Γ_μ . Considérons la fonction de partition suivante :

$$Z(\Gamma_\mu) = \sum_{m \in M} \prod_{e \in m} \mu(e)$$

Étant donné une pondération μ de Γ et un ordre sur les ensembles de sommets $V_1 = \{v_{1,1}, \dots, v_{|V_1|,1}\}$ et $V_2 = \{v_{1,2}, \dots, v_{|V_2|,2}\}$ on construit la matrice $M(\Gamma_\mu)$ de $|V_1| \times |V_2|$ dont les entrées sont spécifiées par la fonction μ de la manière suivante : L'élément ij de $M(\Gamma_\mu)$ est donnée par la somme de tous les poids μ assignés aux arêtes entre $v_{i,1}$ et $v_{j,2}$. On appelle cette matrice la matrice des poids pour Γ_μ .

Soit $Perm(M(\Gamma_\mu))$ le permanent (determinant "sans signes") de $M(\Gamma_\mu)$. Nous avons $Z(\Gamma_\mu) = Perm(M(\Gamma_\mu))$. Dans le cas où $|V_1| \neq |V_2|$ cette valeur est 0.

Nous voulons modifier la pondération μ en μ' de telle sorte que la fonction de partition de $\Gamma_{\mu'}$ soit le déterminant de $M(\Gamma_\mu)$. Dans le cas des graphes planaires Kasteleyn a prouvé que cette modification est toujours possible. On effectue cette modification grâce à ce que l'on appelle une pondération de Kasteleyn.

Soit Γ un graphe planaire biparti. Une pondération de Kasteleyn $\epsilon : E \rightarrow \{\pm 1\}$ est le choix de $+1$ ou -1 pour chaque arête avec la propriété que chaque face bordée par $0 \pmod 4$ arêtes a un nombre impair de -1 assigné aux arêtes correspondantes et chaque face bordée par $2 \pmod 4$ arêtes a un nombre pair de -1 assigné aux arêtes correspondantes.

Soit Γ_μ un graphe planaire biparti pondéré. Nous appelons la matrice des poids $M(\Gamma_{\epsilon,\mu})$ la matrice de Kasteleyn, nous la notons $K(\Gamma_\mu)$.

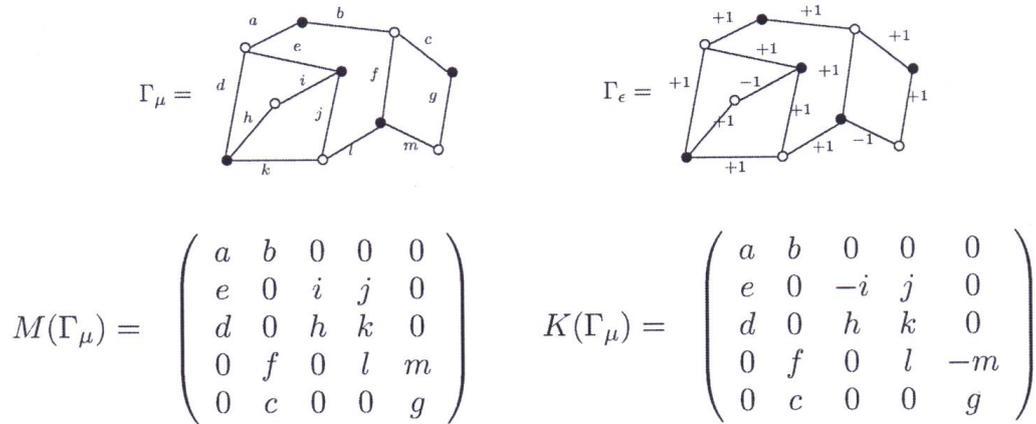


FIGURE 1 – exemple de graphe biparti pondéré puis muni d'une pondération de Kasteleyn ainsi que leurs matrices correspondantes

Soit Γ_μ un graphe planaire biparti pondéré, alors :

$$Z(\Gamma_{\epsilon,\mu}) = Perm(K(\Gamma_\mu)) = \pm Det(M(\gamma_\mu))$$

ou de manière équivalente :

$$Z(\Gamma_\mu) = Perm(M(\Gamma_\mu)) = \pm Det(K(\gamma_\mu))$$

2.3 Diagrammes de Thurston

Les diagrammes de Thurston (et la structure de variété amassée associée) sont introduits dans [4].

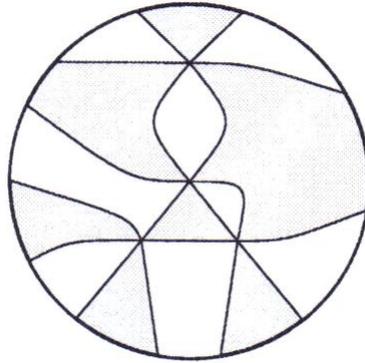


FIGURE 2 – exemple de diagramme de Thurston sur un disque

Un diagramme de Thurston sur une surface Σ est une classe d'isotopie d'une collection de courbes orientées, telles que tous les points d'intersection soient triples et l'orientation des courbes aux points d'intersection soit alternée. Les courbes peuvent être fermées ou aller d'un bord à un bord mais on n'autorise pas une courbe à ne pas en intersecter d'autres. Les composantes connexes du complémentaire du diagramme sont appelées faces. La condition sur les orientations des courbes implique que les segments de courbes bordants les faces orientent ces dernières soit dans le sens positif (on appelle ces faces "grises") soit dans le sens négatif (faces "blanches"). Toutes les faces adjacentes à une face blanche sont grises et inversement.

Les diagrammes de Thurston admettent 4 types de transformations montrées sur la figure suivante.

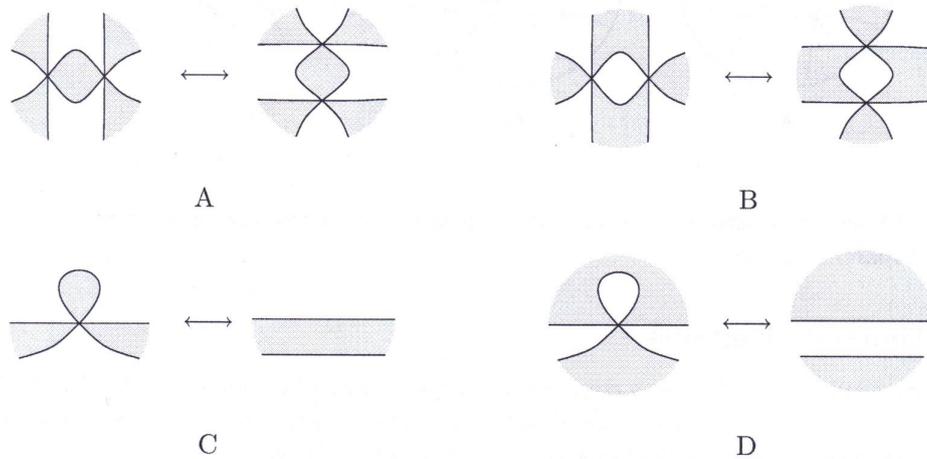


FIGURE 3 – mouvements et modifications de Thurston

Les deux premières transformations, *A* et *B*, ne réduisent pas le nombre de faces et sont appelées mouvements de Thurston, les deux autres, *C* et *D* changent le nombre de faces et sont appelées modifications de Thurston. On peut effectuer un mouvement pour les faces du diagramme qui sont des bigones. Deux diagrammes de Thurston reliés par des mouvements sont dit équivalents. Un diagramme est dit minimal si il n'est pas équivalent à un diagramme où l'on peut appliquer un réduction de Thurston.

2.3.1 Diagrammes de Thurston et variétés amassées

D.Thurston et A.Henriquez définissent dans [4] une variété amassée à partir d'une classe d'équivalence de diagrammes de Thurston. Chaque diagramme dans une classe donnée est une carte de la variété et les mouvements de Thurston sont les fonctions de transition. Les variables amassées paramétrant une carte sont associées aux faces blanches. La matrice d'échange dans le cas des variétés sans bord est construite comme suit :

Autour de chaque point d'intersection on dessine trois flèches reliant les faces blanches dans le sens positif (figure).

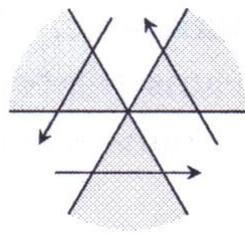


FIGURE 4 – construction de la matrice d'échange

La valeur de ε_{ij} est égale au nombre de flèches allant de la face i à la face j moins le nombre de flèches pointant dans la direction opposée.

3 Polynôme d'Alexander et dimers

3.1 Calcul du polynôme d'Alexander par l'homologie à coefficients locaux par un graphe.

On associe à un digramme de nœud orienté, D , un graphe biparti pondéré nous permettant de calculer explicitement l'application

$$\partial_l : C_2(X; \tilde{X}) \rightarrow C_1(X; \tilde{X})$$

La matrice de cette application est une matrice de présentation de $H_1(X, \tilde{X})$ qui est isomorphe en tant que $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module à $H_1(\tilde{X}, \mathbb{Z})$, et donc nous permet de calculer le polynôme d'Alexander.

On munit, à partir d'un diagramme d'un nœud orienté, $S^3 - K$ d'une structure de CW -complexe de la manière suivante :

On assigne à chaque croisement du diagramme une 1-cellule qui "relie" le croisement. On oriente ces cellules dans le sens sortant du plan de projection. Le diagramme du nœud sépare le plan de projection en un certain nombre de composantes connexes, chacune de ces composantes est une 2-cellule qui hérite de l'orientation positive du plan de projection. Ces cellules sont attachées le long de leur bord par l'application identité. Nous avons ainsi une décomposition cellulaire de S^2 (en compactifiant le plan de projection). On colle au 2-squelette deux 3-cellules de la façon évidente.

On construit un graphe biparti Γ à partir du diagramme et de la décomposition cellulaire comme suit :

On associe à chaque 1-cellule un sommet noir, et à chaque 2-cellule un sommet

blanc. Deux sommets sont reliés par une arrête si les cellules correspondantes sont adjacentes.

On attribue maintenant des poids aux arrêtes : On commence par attribuer des valeurs aux arcs du diagramme selon la règle suivante.

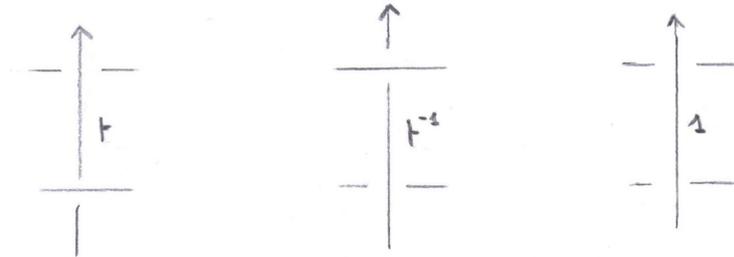


FIGURE 5 – règle d'attribution des valeurs aux arcs du diagramme d'un nœud

On choisit un sous-graphe Γ' qui est un arbre maximal de Γ , aux arrêtes de Γ' on attribue le poids 1.

Décrivons la règle pour compléter les poids :

On appelle faces de Γ les composantes connexes du complémentaire de Γ dans le plan de projection. A chaque face de Γ correspond un lacet formé par les arrêtes de Γ autour d'un arc de D . On parcourt ce lacet dans le sens positif et l'on prend le produit des poids sur les arrêtes élevés à la puissance $+1$ ou -1 selon que l'on aille d'un sommet blanc vers un sommet noir, ou d'un sommet noir vers un sommet blanc, respectivement.

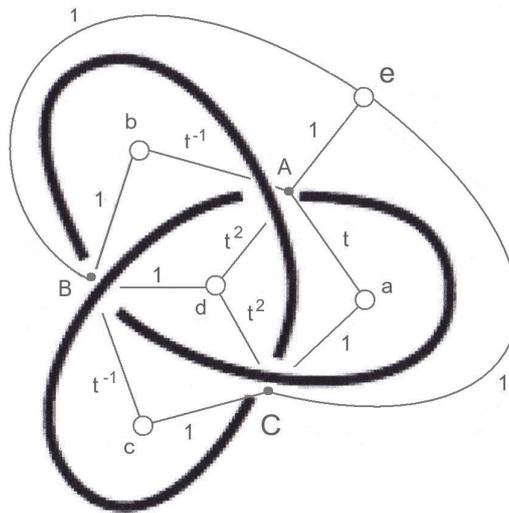


FIGURE 6 – exemple de construction du graphe pondéré dans le cas du noeud de trèfle

On complète les poids manquants de telle sorte que la valeur de ce produit soit égal à la valeur attribuée à l'arc contenu dans la face correspondante. Ceci correspond au fait qu'un lacet dans $S^3 - K$ se relève en un chemin de x à $t^n x$ dans \tilde{X} si et seulement si son indice d'entrelacement avec K vaut n .

A partir de ce graphe pondéré on calcule la matrice de $\partial_l : C_2(X; \tilde{X}) \rightarrow C_1(X; \tilde{X})$:

Soit a une 2-cellule, le coefficient attribué à une 1-cellule de son bord A est le poids sur l'arrête de Γ reliant a et A . Pour l'exemple sur la figure nous obtenons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} t & t^{-1} & 0 & -t^{-2} & 1 \\ 0 & 1 & t^{-1} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer le *pgcd* des mineurs de taille maximale pour obtenir le polynôme d'Alexander.

3.2 Le polynôme d'Alexander comme une fonction de partition de dimers

La construction que nous présentons ici provient de [3]

Soit D un diagramme de nœud, on choisit deux faces adjacentes que l'on oublie. On construit un graphe planaire biparti $\Gamma = (V_1, V_2, E)$ de la manière suivante.

L'ensemble V_1 est l'ensemble des croisements du diagramme.

L'ensemble V_2 est l'ensemble des faces du diagramme.

Etants donnés deux sommets $x \in V_1$ et $y \in V_2$ l'arête (x, y) est dans l'ensemble E si et seulement si le croisement x est adjacent à la face y .

(construction redondante avec la sous-section précédente) Pour chaque croisement les éléments de la matrice sont décrits sur la figure suivante.

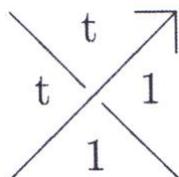


FIGURE 7 – règle de détermination des éléments de la matrice

Nous avons donc une pondération $\alpha : E \rightarrow \mathbb{C}$ sur Γ . Nous déterminons une pondération de Kasteleyn dite de Kauffman suivant la règle décrite sur la figure qui suit.

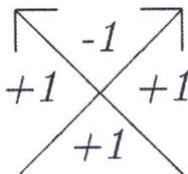


FIGURE 8 – pondération de Kasteleyn

Nous déterminons ensuite la matrice M de Kasteleyn correspondante.

La fonction de partition du graphe $\Gamma_{\epsilon, \alpha}$ construit ci-dessus calcule le polynôme d'Alexander.

Nous présentons un exemple pour le nœud de trèfle :

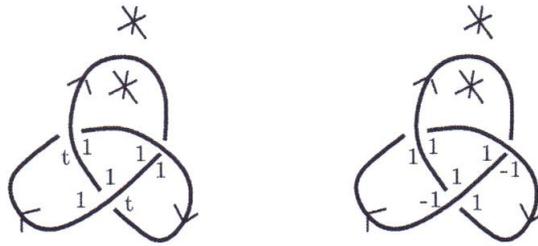


FIGURE 9 – détermination de la pondération

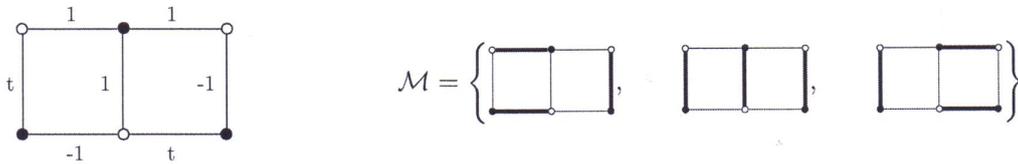


FIGURE 10 – graphe et configurations de dimers

$$Z(\Gamma_\alpha) = \alpha \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \circ & \circ \\ \hline \end{array} \right) + \alpha \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \circ & \circ \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right) + \alpha \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \circ \\ \hline \circ & \bullet \\ \hline \end{array} \right) = t^2 - t + 1$$

FIGURE 11 – fonction de partition

4 Noeuds et diagrammes de Thurston.

4.1 La représentation de Burau par les diagrammes de Thurston

Nous associons au générateur σ_i du groupe de tresses B_n un mot en les générateurs du double groupe $S_{n+1} \times S_{n+1}$ par la règle suivante : $\sigma_i \rightarrow s_i^- s_{i+1}$ nous associons à ce mot un diagramme de Thurston sur un bandier comme suit :

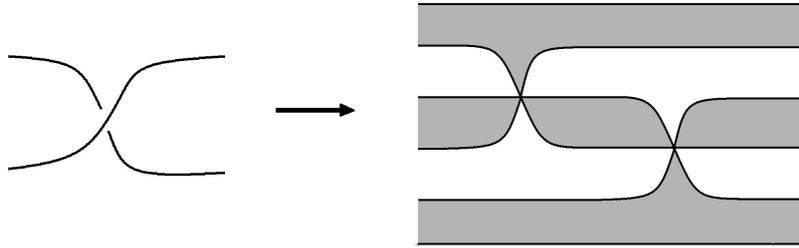


FIGURE 12 – association d'un diagramme de Thurston aux générateurs du groupe de tresses

Au produit de deux mots on associe la bande où l'on a collé les deux bandes correspondantes de gauche à droite. A chaque diagramme de Thurston ainsi construit nous associons une matrice pour la graine correspondante. Soient :

$$H_i(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & x & \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{\bar{i}} = E_i^{tr}$$

Où la dernière ligne de $H_i(x)$ contenant un x et la ligne de E_i contenant l'élément hors diagonale est la ligne i . Pour une tresse à n brins, i prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et les matrices considérées sont taille $n + 1 \times n + 1$.

Par exemple au diagramme correspondant à σ_i (la figure ne représente que la partie du diagramme où "il se passe quelque chose", des bandes blanches et grises au-dessus et en-dessous de notre figure)

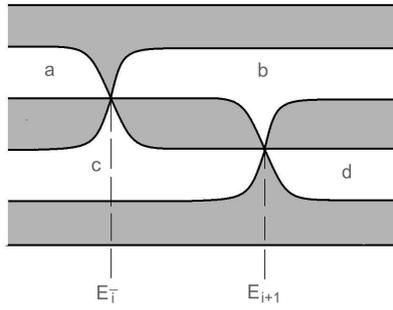


FIGURE 13 – Matrice associée au diagramme de Thurston

La matrice correspondante est

$$H_i(a)E_i H_{i+1}(c)E_{i+1}H_{i+1}(d)$$

Pour obtenir la représentation de Burau nous attribuons les valeurs aux faces blanches selon la règle suivante (qui correspond à la règle de la Figure 5) :

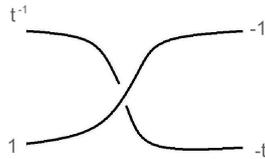


FIGURE 14 – Règle d'attribution des variables

Nous obtenons ainsi pour les générateurs σ_i du groupe de tresses B_n une matrice de taille $(n + 1 \times n + 1)$

$$\sigma_i \rightarrow \begin{pmatrix} I & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & t & -t & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & & I \end{pmatrix}$$

Elles contiennent comme sous matrices celles de la représentation de Burau. On peut le justifier par une action du groupe de tresses sur D_{n+2}

4.2 Diagrammes des entrelacs et diagrammes de Thurston

On peut associer à un diagramme d'entrelacs deux diagrammes de Thurston de la manière suivante : On "double" le diagramme de l'entrelacs et on modifie les croisements de sorte que l'on obtienne deux intersections triples pour chaque croisement.



FIGURE 15 – règle de transformation des croisements

On obtient un diagramme de Thurston pour chacun des deux choix d'orientation que nous avons pour les courbes. On passe d'un diagramme à l'autre en changeant les faces blanches en faces grises et inversement.

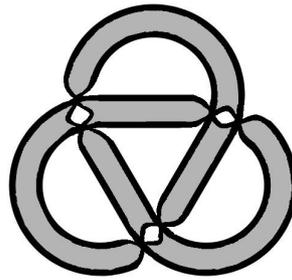


FIGURE 16 – diagramme de Thurston associé au noeud de trèfle

4.2.1 Structure de Poisson, fonctions de Casimir

Pour les deux variétés amassées obtenues nous déterminons les fonctions de Casimir monomiales pour la structure de Poisson associée.

L'espace vectoriel des fonctions Casimir est de dimension $2k$ où k est le nombre de composantes connexes de l'entrelacs. Dans le cas des nœuds, si nous avons N faces blanches, cet espace est engendré par les fonctions suivantes :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \quad x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_N^{\beta_N}$$

où α_i est l'enroulement de la première courbe autour d'un point quelconque de l'intérieur de la face correspondante à la variable x_i et β_i est l'enroulement de la deuxième courbe. Le résultat observé se généralise dans le cas des entrelacs.

4.2.2 Sous-variété lagrangienne

Pour le diagramme de Thurston associé au diagramme d'un entrelacs où les faces blanches correspondent aux croisements et aux faces nous pouvons choisir une sous-variété particulière où l'on fixe les variables dans les faces correspondantes aux croisements.

En effet le changement de variable résultant du mouvement de Thurston centré en une face blanche n'est défini que si la variable dans cette face est différente de -1 . En fixant ces variables on interdit le changement de configuration des croisements. La conjecture est que la sous-variété est une sous-variété lagrangienne.

Références

- [1] V.V. Fock, A..Marshakov, *Integrable systems, Cluster Variables and Dimers.*
- [2] A. B. Goncharov, R. Kenyon, *Dimers and cluster integrable systems*, arXiv :1107.5588
- [3] M. Cohen, O.T. Dasbach, H.M. Russell, *A twisted dimer model for knots*, arXiv :1010.5228
- [4] D.Thurston, *From dominoes to hexagons*, arXiv :math/0405482
- [5] V.V. Fock, A.B. Goncharov, *Dual Teichmuller and lamination spaces*, arXiv :math/0510312
- [6] R. Kenyon, *An introduction to the dimer model*, arXiv :math/0310326
- [7] J.W.Alexander, (1928), *Topological invariants of knots and links*,Tans. Amer. Math. Soc, 30(2) :275-306.
- [8] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*, volume 5 of de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1985.
- [9] Joan S. Birman, *Briads, links, and mapping class groups*, Princeton University Press (1974), Annals of Mathematics Studies, no. 82.
- [10] W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag (1997).
- [11] D. Rolfsen. *Knots and links*, Publish or Perish Inc., Berkeley, Calif., 1976. Mathematics Lecture Series, No. 7.
- [12] A. Hatcher, *Algebraic topology*, [http ://www.math.cornell.edu/ hatcher/](http://www.math.cornell.edu/hatcher/)
- [13] J.F. Davis, J. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, [http ://www.indiana.edu/ jfdavis/teaching/m623/book.pdf](http://www.indiana.edu/jfdavis/teaching/m623/book.pdf)