Sur la trigonométrie de Lobatchevsky

Stephany Mireille
Université de Strasbourg

25 juin 2013

Remerciements

La première personne que je tiens à remercier chaleureusement est Monsieur Papadopoulos Athanase, Professeur à l'Université de Strasbourg de m'avoir proposé ce sujet et de m'avoir encadré lors de ce mémoire. Les documents qu'il m'a indiqués ont facilités mon travail. Grâce à ses seminaires du 5 novembre et du 17 décembre 2012, j'ai pu acquérir les premières notions de ce domaine.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Fock Vladimir, responsable du Master 2, spécialité Mathématiques fondamentales et membre du jury, pour tous les renseignements concernant le mémoire et l'année universitaire.

Je n'oublie pas Messieurs Stolz Michel et Kirsch Ramon, professeurs au Lycée Nic Biever à Dudelange, Luxembourg, de m'avoir donné des consignes sur mon sujet et de m'avoir proposé un livre de référence lors d'un stage d'observation.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études, ainsi qu'à Madame Gross Fabienne, gestionnaire du Master, qui a toujours prêté une oreille attentive à toutes mes questions administratives.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à ma famille, mon copain et mes amis pour leurs soutiens et leurs patiences.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire consiste à trouver l'angle de parallélisme et se base sur l'article "Sur la trigonométrie de Lobatchevsky" de S. Straszewicz parue dans le volume 3 des "Annales Polonici Mathematici" de page 225-239 datant de 1957 [1]. Lobatchevsky n'a pas reconnu le postulat des parallèles comme on le connaît en géométrie euclidienne. Il a commencé par définir une géométrie dans laquelle ce postulat ne convient pas. De plus il y a encore d'autres propriétés qui ne sont pas vérifiées dans cette géométrie, comme la somme des angles d'un triangle vaut π. Nous étudions dans ce mémoire des triangles, dont la somme des angles est strictement inférieur à π.

Dans notre première section, on va voir des remarques préliminaires qui sont nécessaires dans toute la suite. Ce sont surtout des lemmes sur la variation d'une fonction. Puis on verra l'équation fonctionnelle de d'Alembert, dont surtout les solutions nous intéressent.

Dans la deuxième section, des fonctions à deux variables φ et ψ dans un quadrilatère trirectangle sont définies. Cette section est dominée de ces quadrilatères. Puis dans la troisième section, des fonctions à deux variables C et S dans des triangles rectangles seront expliquées. Ces deux sections sont surtout basées de la variation des fonctions par rapport à toutes ces variables.

Par après, les sections quatre et cinq définissent des fonctions à une variable φ, C et S à partir des fonctions définies dans les sections précédentes. Ces fonctions sont définies à l'aide de formules trigonométriques.

La dernière section consiste à construire l'angle de parallélisme.

1 Remarques préliminaires

Dans cette section, on va introduire quelques notions de base que nous utiliserons dans la suite. Ce sont des termes comme la décroissance et croissance d'une fonction f qu'on définit dans la première sous-section. Puis on va introduire une équation fonctionnelle.

1.1 Termes arithmétiques

Tout d'abord on va se consacrer à des lemmes arithmétiques pour voir la variation d'une fonction f qui s'exprime $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ avec g strictement positive et strictement croissante. Expliquons les termes de fonction strictement positive et strictement croissante.

Définition 1.1. *Soit g une fonction dont l'ensemble de départ est E et $\forall x \in E$ $g(x) > 0$ on dit que g est une fonction strictement positive.*

Définition 1.2. *Soit g une fonction dont l'ensemble de départ est E et $\forall x \in E$ et $\forall y \in E$ avec $x < y$ on a que $g(x) < g(y)$ on dit que g est une fonction strictement croissante.*

De même on peut définir une fonction étant strictement décroissante.

Définition 1.3. *Soit g une fonction dont l'ensemble de départ est E et $\forall x \in E$ et $\forall y \in E$ avec $x < y$ on a que $g(x) > g(y)$ on dit que g est une fonction strictement décroissante.*

A partir de maintenant on va prendre E un ensemble de nombres strictement positifs dans lequel si $x, y \in E$ alors $\frac{1}{2}x$ et $x+y$ appartiennent au même ensemble. De plus on va utiliser f une fonction qui s'écrit de la manière suivante $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ avec g une fonction strictement positive et strictement croissante pour tout $x \in E$.

Lemme 1.1. *Soit f une fonction qui vérifie*

1. $\forall x \in E$ $f(\frac{x}{2}) > f(x)$

2. $\forall x, y \in E$ tel que $x < y$ et $f(x) > f(y)$, $f(\frac{x+y}{2}) > f(y)$

alors $f(x)$ est une fonction strictement décroissante de x.

Démonstration. On veut monter que f est une fonction strictement décroissante. Soit $x, y \in E$ et $x < y$ on veut montrer que $f(x) > f(y)$ d'après la définition de décroissance stricte.
On montre par récurrence sur n que $f(2^{-n}kx) > f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $k < 2^n$.
Soit $n = 1$ alors on a $f(2^{-1}kx)$ avec $k < 2^1 = 2$ et donc $k = 1$. D'où on a $f(\frac{x}{2})$ et d'après la condition 1 on a que $f(\frac{x}{2}) > f(x)$. D'où c'est bien vérifié pour $n = 1$.
Supposons maintenant que c'est satisfait pour n et montrons-le pour $n + 1$. On a donc $k < 2^{n+1}$, il faut distinguer trois cas.
Premier cas : si $k = 2^n$, alors $f(2^{-(n+1)}kx) = f(2^{-n-1} \cdot 2^n x) = f(\frac{x}{2}) > f(x)$

d'après la condition 1.
Deuxième cas : si $k < 2^n$
On a $f(2^{-(n+1)}kx) = f(2^{-1}(2^{-n}kx)) = f(\frac{1}{2}(2^{-n}kx))$. En effet $2^{-n}kx \in E$ car la somme de x et la moitié de chaque nombre appartient à E. De plus d'après la condition 1, on a que $f(\frac{1}{2}(2^{-n}kx)) > f(2^{-n}kx)$ et lors de l'hypothèse de récurrence on a que $f(2^{-n}kx) > f(x)$. D'où on trouve pour ce cas le résultat voulue $f(2^{-(n+1)}kx) > f(x)$.
Troisième cas : si $2^n < k < 2^{n+1}$
On peut écrire $f(2^{-(n+1)}kx) = f(\frac{1}{2}(2^{-n}(k-2^n)+1)x)$ et puis on utilise la condition 2. Regardons si les hypothèses sont vérifiées pour la condition 2. On a $2^n < k < 2^{n+1}$, cela implique que $0 < 2^{-n}k - 1 < 1$. De plus comme $2^{-n}k - 1 = 2^{-n}(k-2^n)$, on a que $2^{-n}(k-2^n)x < x$ et c'est la première hypothèse de la condition 2 de l'énoncé. Il faut maintenant encore trouver la deuxième, c'est à dire que $f(2^{-n}(k-2^n)x) > f(x)$. Or ceci est l'hypothèse de récurrence car $k < 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$, cela implique que $k - 2^n < 2^n$. Donc on peut utiliser la condition 2 qui dit que $f(\frac{2^{-n}(k-2^n)x+x}{2}) > f(x)$ et donc on a trouvé pour ce cas aussi le résultat voulue.
Donc on a que $f(2^{-n}kx) > f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $k < 2^n$.
Comme $x < y$, on peut aussi trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ qui vérifie $x > 2^{n_0}y$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors $\exists k < 2^n$ tel que $2^{-n}ky < x \leq 2^{-n}(k+1)y$. On a donc

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{g(x)} \leq \frac{2^{-n}(k+1)y}{g(x)}$$

d'après notre inégalité $x \leq 2^{-n}(k+1)y$. De plus on trouve l'inégalité suivante

$$\frac{2^{-n}(k+1)y}{g(x)} = \frac{2^{-n}ky}{g(x)} + \frac{2^{-n}y}{g(x)} < \frac{2^{-n}ky}{g(2^{-n}ky)} + \frac{y}{2^n g(x)} = \frac{1}{f(2^{-n}ky)} + \frac{y}{2^n g(x)}$$

en utilisant que $2^{-n}ky < x$ et le fait que la fonction g est strictement croissante. Puisque $f(2^{-n}ky) > f(y)$ d'après ce qu'on a montré tout au début de cette démonstration, on a donc que

$$\frac{1}{f(2^{-n}ky)} + \frac{y}{2^n g(x)} < \frac{1}{f(y)} + \frac{y}{2^n g(x)}$$

La limite du terme $\frac{y}{2^n g(x)}$ si n tend vers ∞ tend vers 0 alors

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(y)} \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Or on veut avoir égalité stricte. Donc on peut prendre k' et n' des entiers tel que $x < 2^{-n'}k'y < y$. Donc d'après ce qu'on a montré dans la première partie $f(x) \geq f(2^{-n'}k'y) > f(y)$. Donc on a montré que $f(x)$ est une fonction strictement décroissante de x. $\square$

Le prochain lemme est celui qui explique le fait quand la fonction est croissante de x. On va garder les mêmes notations pour E, f et g.

Lemme 1.2. *Soit f une fonction qui vérifie*

1. $\forall x \in E\ f(\frac{x}{2}) < f(x)$
2. $\forall x, y \in E$ *tel que* $x < y$ *et* $f(x) < f(y)$, $f(\frac{x+y}{2}) > f(y)$

alors $f(x)$ est une fonction strictement croissante de x.

Remarque 1.1. *La démonstration se fait de manière analogue.*

Démonstration. On veut monter que f est une fonction strictement croissante. Soit $x, y \in E$ et $x < y$, on veut montrer que $f(x) < f(y)$ d'après la définition de croissance stricte.
On montre par récurrence sur n que $f(2^{-n}kx) < f(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $k < 2^n$.
Soit $n = 1$ alors on a comme dans la démonstration du lemme 1.1 l'utilisation de la condition 1, c'est à dire dans ce lemme $f(\frac{x}{2}) < f(x)$. D'où c'est bien vérifié pour $n = 1$.
Supposons de nouveau que c'est satisfait pour n et montrons-le pour $n+1$. On a donc $k < 2^{n+1}$, il faut distinguer trois cas.
Premier cas : si $k = 2^n$, alors $f(2^{-(n+1)}kx) = f(2^{-n-1} \cdot 2^n x) = f(\frac{x}{2}) < f(x)$ d'après la condition 1.
Deuxième cas : si $k \leq 2^n$
On a $f(2^{-(n+1)}kx) = f(\frac{1}{2}(2^{-n}kx)) < f(2^{-n}kx) < f(x)$, d'après la condition 1 et de l'hypothèse de récurrence. D'où on trouve pour ce cas le résultat voulue $f(2^{-(n+1)}kx) < f(x)$.
Troisième cas : si $2^n < k < 2^{n+1}$
On peut écrire $f(2^{-(n+1)}kx) = f(\frac{1}{2}(2^{-n}(k - 2^n) + 1)x)$ et puis on utilise la condition 2. La première hypothèse est vérifiée pour la condition 2, on l'a déjà montré dans la démonstration du lemme 1.1 et la deuxième hypothèse est l'hypothèse de récurrence. Donc on peut utiliser la condition 2 qui affirme que $f(\frac{2^{-n}(k-2^n)x+x}{2}) < f(x)$ et donc on a trouvé pour ce cas le résultat voulue.
Donc on a que $f(2^{-n}kx) < f(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $k < 2^n$.
Comme $x < y$, on peut aussi trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ qui vérifie $x > 2^{n_0}y$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors $\exists k < 2^n$ tel que $2^{-n}(k-1)y < x \leq 2^{-n}ky$. On a donc

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{g(x)} \geq \frac{2^{-n}(k-1)y}{g(x)}$$

d'après notre inégalité $x \geq 2^{-n}(k-1)y$. De plus on trouve l'inégalité suivante

$$\frac{2^{-n}(k-1)y}{g(x)} = \frac{2^{-n}ky}{g(x)} - \frac{2^{-n}y}{g(x)} > \frac{2^{-n}ky}{g(2^{-n}ky)} - \frac{y}{2^n g(x)} = \frac{1}{f(2^{-n}ky)} - \frac{y}{2^n g(x)}$$

en utilisant que $2^{-n}ky > x$ et le fait que la fonction g est strictement croissante. Puisque $f(2^{-n}ky) < f(y)$ d'après ce qu'on a montré tout au début de cette démonstration, on a donc que

$$\frac{1}{f(2^{-n}ky)} - \frac{y}{2^n g(x)} > \frac{1}{f(y)} - \frac{y}{2^n g(x)}$$

Donc

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{y}{2^n g(x)} > \frac{1}{f(y)}$$

La limite du terme $\frac{y}{2^n g(x)}$ si n tend vers ∞ tend vers 0 alors

$$\frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{f(y)} \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Or on veut avoir égalité stricte. Donc on peut prendre k' et n' des entiers tel que $x < 2^{-n'}k'y < y$. Donc d'après ce qu'on a montré dans la première partie $f(x) \leq f(2^{-n'}k'y) < f(y)$. Donc on a montré que $f(x)$ est une fonction strictement croissante de x. □

1.2 Equation fonctionnelle

Dans cette sous-section, on parle d'équations fonctionnelles [4],[5] et en particulier de l'équation fonctionnelle de d'Alembert. Cette équation sera particulièrement étudiée dans ce mémoire. On va de nouveau utiliser la fonction définit dans la sous-section 1.1.

Considérons l'équation fonctionnelle de d'Alembert qui a l'allure suivante

$$f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x-y) \tag{1}$$

Soient a un nombre strictement positif fixé et n et $k \leq 2^n$ des nombres entiers postifs arbitraires, alors on définit $F = \{x | x = 2^{-n}ka\}$

Remarque 1.2. *En prenant $k = 2^n$ on voit que $a \in F$. De plus $0 \in F$, car il suffit de choisir $k = 0$.*

Proposition 1.1. *Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation fonctionnelle de d'Alembert tel que chaque ensemble image est inclus dans F et si $f_1(0) = f_2(0)$ et $f_1(a) = f_2(a)$ avec 0 et a dans l'ensemble F, alors $f_1(x) = f_2(x)$ $\forall x$ dans l'ensemble de départ F.*

Démonstration. Faisons un raisonnement par récurrence sur n. Soit $n = 1$ alors $k \leq 2^1$ et donc on a soit $k = 1$, soit $k = 2$.
Prenons d'abord le cas $k = 1$: soit x et y dans F, donc on a que $x = y = 2^{-1}a$. Ecrivons l'équation fonctionnelle de d'Alembert avec x et y, car on sait que f_1 est solution :

$$f_1\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 2f_1\left(\frac{a}{2}\right)f_1\left(\frac{a}{2}\right) - f_1\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

Et donc on trouve l'équation suivante

$$f_1(a) = 2\left(f_1\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 - f_1(0)$$

De même f_2 est solution de l'équation fonctionnelle de d'Alembert et donc

$$f_2(a) = 2\left(f_2\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 - f_2(0)$$

De plus on sait que $f_1(0) = f_2(0)$ et $f_1(a) = f_2(a)$, d'où en faisant la différence des deux équations trouvées on a que

$$f_1(a) - f_2(a) = 2\left(f_1\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 - f_1(0) - 2\left(f_2\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 + f_2(0)$$

$$\Rightarrow \left(f_1\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 = \left(f_2\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

Or comme l'ensemble d'image est dans F, on a que toutes les valeurs sont positives et alors

$$f_1\left(\frac{a}{2}\right) = f_2\left(\frac{a}{2}\right)$$

De plus comme tout x dans F s'écrit de cette façon, on a que $f_1(x) = f_2(x)$.
Prenons maintenant le cas si k=2 : soit $x = y = 2 \cdot 2^{-1}a$ et ceci est immédiate car $f_1(a) = f_2(a)$ et donc $f_1(x) = f_2(x)$.
Supposons maintenant que pour $x = 2^{-n}ka$ on a que $f_1(x) = f_2(x)$, montrons le pour $n+1$. Donc $x = 2^{-n-1}ka$ avec $k \leq 2^{n+1}$. Soit $k \leq 2^{n+1}$:

$$f_1(2^{-n-1}ka + 2^{-n-1}ka) = 2f_1(2^{-n-1}ka)f_1(2^{-n-1}ka) - f_1(2^{-n-1}ka - 2^{-n-1}ka)$$

$$\Rightarrow f_1(2^{-n}ka) = 2(f_1(2^{-n-1}ka))^2 - f_1(0)$$

De plus f_2 est aussi solution et s'écrit donc aussi

$$f_2(2^{-n}ka) = 2(f_2(2^{-n-1}ka))^2 - f_2(0)$$

Comme on a que d'après l'hypothèse de récurrence que $f_1(2^{-n}ka) = f_2(2^{-n}ka)$ et que d'après l'énoncé $f_1(0) = f_2(0)$ on trouve que d'après le même raisonnement que au-dessus que $f_1(2^{-n-1}ka) = f_2(2^{-n-1}ka)$ et donc $f_1(x) = f_2(x)$.
Donc on a montré par récurrence le résultat voulu. □

Ce qui nous intéresse surtout de cette équation, ce sont les solutions. En effet les solutions ont l'allure trigonométrique ou hyperbolique. Cette discussion se fait entre autre sur la valeur en 0.

Proposition 1.2. *Si f une fonction qui vérifie l'équation (1) alors $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$.*

Démonstration. On va remplacer dans l'équation fonctionnelle x et y par 0 et on va essayer de trouver des solutions pour $f(0)$.

$$f(0+0) = 2f(0)f(0) - f(0-0) \Rightarrow 2f^2(0) - 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0)(f(0)-1) = 0$$

Et donc on trouve les solutions $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Ce sont les seules solutions pour 0. □

Lemme 1.3. *La seule solution qui satisfait $f(0) = 0$ est la fonction identiquement nulle.*

Démonstration. Supposons f une fonction non identiquement nulle qui est solution de (1) et qui satisfait $f(0) = 0$. De plus en posant $y = 0$, on trouve en utilisant $f(0) = 0$ que

$$f(x+0) = 2f(x)f(0) - f(x-0) \Rightarrow 2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$$

Donc on a $f(x) = 0 \ \forall x$, or on avait posé f non identiquement nulle et c'est donc absurde. D'où la seule solution qui vérifie $f(0) = 0$ est la fonction nulle. $\square$

Dans la suite on va exclure la fonction identiquement nulle. A partir de maintenant, on peut supposer que $f(0) = 1$.

Proposition 1.3. *Si f une fonction qui satisfait l'équation (1) alors f est une fonction paire.*

Démonstration. Prenons d'abord $x = y$ et écrivons l'équation, on a donc

$$f(x+x) = 2f^2(x) - f(x-x) \Rightarrow f(2x) = 2f^2(x) - f(0) \Rightarrow f(2x) + 1 = 2f^2(x)$$

En posant $y = -x$

$$f(x-x) = 2f(x)f(-x) - f(x+x) \Rightarrow f(2x) + 1 = 2f(x)f(-x)$$

D'où on a d'après les deux équations que $f^2(x) = f(x)f(-x)$ et comme on a supposer que f n'et pas identiquement nulle, on peut diviser par $f(x) \neq 0$. Donc on trouve $f(x) = f(-x)$ et c'est bien la définition d'une fonction paire. $\square$

Proposition 1.4. *Si f une fonction qui satisfait l'équation (1) alors f est soit la fonction* $\cos$*, soit la fonction* $\cosh$*.*

Démonstration. La fonction f est dérivable sur E en tant que produit de deux fonctions dérivables sur E. En effet $\frac{1}{x}$ est dérivable sur E et comme $g(x)$ est une fonction croissante sur E, elle est dérivable sur E. En dérivant l'équation deux fois par rapport à x et une fois par rapport à y, on trouve une équation avec une dérivée seconde et une avec une dérivée première. En dérivons par rapport à x on trouve

$$f''(x+y) = 2f''(x)f(y) - f''(x-y)$$

Remplaçons maintenant x par 0 et on trouve

$$f''(y) = 2f''(0)f(y) - f''(-y)$$

De plus $f(y) = f(-y)$ d'après la proposition 1.3, d'où on a $f'(y) = -f'(y)$ et donc $f''(y) = f''(y)$. D'où l'équation suivante

$$f''(y) = 2f''(0)f(y) - f''(y) \Rightarrow f''(y) = f''(0)f(y)$$

Faisons ensuite la dérivée première par rapport à y, alors on a

$$f'(x+y) = 2f(x)f'(y) + f'(x-y)$$

Remplaçons maintenant y par 0 et on trouve

$$f'(x) = 2f(x)f'(0) + f'(x) \Rightarrow f(x)f'(0) = 0$$

Or comme f n'est pas identiuement nulle, on a que $f'(0) = 0$. De plus d'après l'énoncé $f(0) = 1$. D'après un résultat d'équations différentielle la seule fonction qui vérifie cette équation du deuxième degrée est la fonction cos si $f''(0) \leq 0$ et cosh si $f''(0) \geq 0$. $\square$

1.3 Déficit angulaire

On se place dans la géométrie de Lobatchevsky, donc la somme des angles d'un triangle est strictement inférieure à π. Pour étudier le déficit angulaire [2],[3], le choix de la géométrie est importante, car il nous donne le signe.

Définition 1.4. *Le déficit angulaire d'un triangle ABC vaut*

$$\mathcal{A}(ABC) = \pi - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB})$$

Remarque 1.3. *En géométrie euclidienne, le déficit angulaire vaut 0, car la somme des angles dans un triangle est π. Par contre en géométrie sphérique, le déficit angulaire est strictement négatif, car la somme des angles d'un triangle est strictement supérieur à π. En géométrie hyperbolique, le déficit angulaire est strictement positif.*

Théorème 1.1. *En multipliant le déficit angulaire par un scalaire, on trouve l'aire du triangle. De plus ce scalaire est l'opposé de la courbure. Donc en géométrie hyperbolique la courbure est négative.*

Remarque 1.4. *Dans le cas de la géométrie sphérique, ce théorème s'appelle théorème de Girard.*

On a introduit assez de notions pour commencer notre étude sur l'angle de parallélisme. Dans la prochaine section on va surtout se servir de ce qu'on a introduit sur l'arithmétique et dans des sections plus tards on utilisera l'équation fonctionnelle de d'Alembert. A partir de maintenant on va aussi utiliser les segments de droites et les angles par les notions de leurs mesures. De plus on va supposer que l'unité est fixée et l'angle droit mesure par définition $\frac{\pi}{2}$.

2 Les fonctions $\varphi(p,q)$ et $\psi(p,q)$ du quadrilatère trirectangle

Dans cette section, le travail se fait dans les quadrilatères trirectangles. On commence par définir un tel quadrilatère et puis on discute sur ces côtés. En effet on veut regarder les côtés qui croissent, respectivement décroissent avec les autres. Ensuite on vient à la définition de φ et ψ. En utilisant les lemmes 1.2 et 1.1 on peut étudier la variation des fonctions φ et ψ par rapport à ces variables.

Définition 2.1. *Un quadrilatère trirectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits et la somme des angles est* $< 2\pi$.

Remarque 2.1. *Comme la somme des angles est* $< 2\pi$, *le quatrième angle est aigu.*

A partir de maintenant désignons les côtés du quadrilatère trirectangle par les variables r, p, q et s comme dans la figure 1. De plus le quadrilatère est définit par le symbole $(p, q; r, s)$.

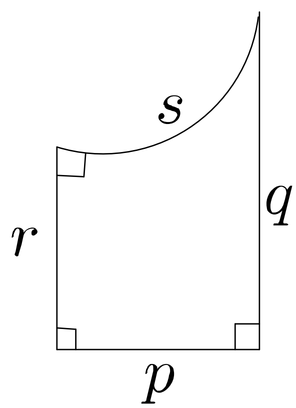


FIGURE 1 – quadrilatère trirectangle

En fixant les côtés p et q, on peut observer que les côtés r et s dépendent de p et q. En faisant une rotation d'angle π et une symétrie orthogonal d'axe p, on peut voir que $(p, q; r, s)$ et $(r, s; p, q)$ sont des quadrilatères équivalents, car en effet ces transformations conservent l'allure des figures.

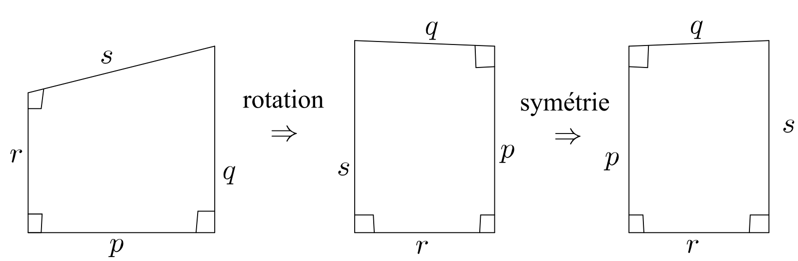


FIGURE 2 –

On va d'abord discuter sur les longueurs des côtés. [2],[6]

Proposition 2.1. *Soit* $(p, q; r, s)$ *un quadrilatère trirectangle, alors* $p < s$ *et* $r < q$.

Démonstration. Appelons les sommets de cet quadrilatère A, B, C, D tel que $AB = p$, $BC = q$, $DC = s$ et $AD = r$. Montrons d'abord que $p < s$. Traçons d'abord un segment perpendiculaire au côté AD qui coupe AD en son milieu E et BC en F. Le point symétrique de A par rapport à EF est D et le point symétrique de B est G. Pour montrer que $p < s$ il suffit de montrer que $DG < DC$, car d'après la symétrie d'axe EF $AB = DG$.

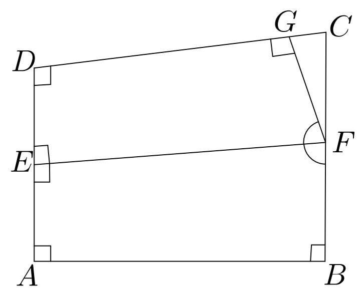


Figure 3 –

Le quadrilatère $ABFE$ est trirectangle par construction, d'où $DEFG$ est aussi trirectangle. De plus l'angle $BFE = EFG$ est aigu et donc comme B, F et C sont alignées EFC est obtu. Donc l'angle $EFG < EFC$ et par conséquent $DG < DC$. D'où on a que $AB < DC$, c'est à dire $p < s$.
Faisons maintenant le même raisonnement avec $r < q$. E est le milieu de AB et par ce point on prend la perdendiculaire par rapport à AB. G le point symétrique de D par rapport à EF. Comme l'angle $DFE = EFG$ est aigu et EFC est obtu, alors on a que $AD = BG < BC$, donc $r < q$.

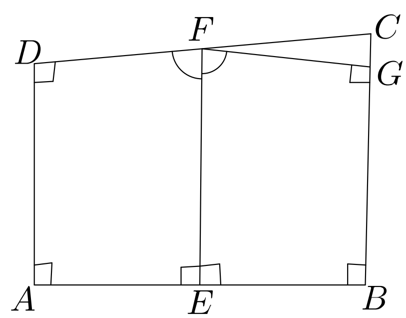


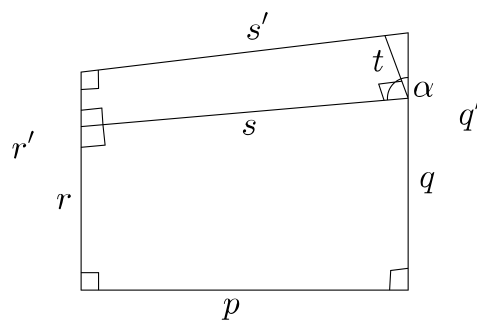
Figure 4 –

D'où on a montré que $r < q$ et $p < s$. □

Remarque 2.2. *En effet dans cette preuve on avait dit pour le premier cas que EF coupe CB. Si ce résultat ne serait pas vrai, on aurait que EF coupera AB ou DC en F. Si ce serait le cas, on aurait un triangle dont la somme des angles serait $> \pi$. En effet $EDF = \frac{\pi}{2}$ et $DEF = \frac{\pi}{2}$, donc on aurait déjà π. Or ce résultat est absurde en géométrie hyperbolique. C'est le même raisonnement pour le deuxième cas.*

Proposition 2.2. *Si p est constant alors r et s sont des fonction strictement croissantes de q.*

Démonstration. Soit p constant et $q' > q$ montrons que $r' > r$ et $s' > s$. On va alors prolonger q en q'. Maintenant on passe du point extrémité de q' perpendiculairement au segment prolongé de r, appelons ce segment prolongé r'. En effet d'après la remarque 2.2, on peut en déduire que $r' > r$. Soit s' le segment qui relie l'extrémité de q' avec celle de r'. De plus traçons maintenant une droite perpendiculaire à s et passant par s'. Soit t ce segment et s'' le segment placé sur s' jusqu'au point d'intersection avec t, alors $(s, t; r' - r, s'')$ est un quadrilatère trirectangle et d'après la proposition 2.1 on a que $s < s''$. De plus puisque $(p, q; r, s)$ est trirectangle, l'angle α est obtu et $s'' < s'$, d'où $s < s'$. Donc si p constant, r et s sont des fonctions strictement croissantes de q.



□

Proposition 2.3. *Si q est constant alors r est une fonction strictement décroissante de p et s une fonction strictement croissante de p.*

Démonstration. Appelons notre quadrilatère $(p, q; r, s)$ de nouveau $ABCD$ comme dans la preuve de la proposition 2.1. Soit $BE = p' < p$ et montrons que $r' > r$ et $s' < s$. Traçons la droite passant par E et perpendiculaire à AB et qui coupe DC en F. Soit G le point d'intersection entre EF et la perpendiculaire à EF passant par C. On peut voir la construction sur la figure 5.
Les angles EFD et CFG sont des angles opposés au sommet F et donc égaux. De plus comme $AEFD$ est un quadrilatère trirectangle on a que ces angles sont aigus. D'où G se trouve sur le prolongement de EF. On a que $r' = EG$ et

$s' = GC$. En utilisant la proposition 2.1 dans le quadrilatère $AEFD$, on a que $AD < EF$. De plus $AD < EF < EG$ et $GC < FC < DC$ ce qui implique que $r < r'$ et $s' < s$. D'où r décroît strictement avec p et s croît strictement avec p.

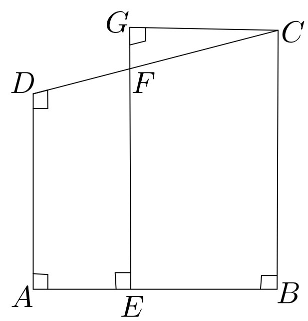


FIGURE 5 –

□

Après avoir vu comment les côtés varient l'une de l'autre, les définitions de φ et ψ dans un quadrilatère font l'objet de notre discussion.

Définition 2.2. *Soit $(p, q; r, s)$ un quadrilatère trirectangle, on définit φ et ψ de manière suivante :*

$$\varphi(p, q) = \frac{q}{r}$$

$$\psi(p, q) = \frac{s}{p}$$

Remarque 2.3. *D'après les propositions 2.2 et 2.3, φ et ψ dépendent que du choix du couple (p, q).*

Regardons maintenant quelques propriétés des deux fonctions définies.

Propriété 2.1. *Soit $(p, q; r, s)$ un quadrilatère trirectangle, alors $\varphi(p, q) > 1$ et $\psi(p, q) > 1$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.1 $p < s$ et $r < q$. Donc en divisant par p et r on a que $\varphi(p, q) = \frac{q}{r} > 1$ et $\psi(p, q) = \frac{s}{p} > 1$. □

Propriété 2.2. *Soit $(p, q; r, s)$, alors $\varphi(p, q) = \psi(r, s)$ et $\psi(p, q) = \varphi(r, s)$.*

Démonstration. On prend le fait qu'à partir d'un quadrilatère $(p, q; r, s)$ on peut trouver $(r, s; p, q)$ par une rotation d'angle π et une symétrie d'axe p. Expliquons ce fait par la figure 2.

En effet $(p, q; r, s)$ et $(r, s; p, q)$ ont la même allure, car ces transformations conservent les longueurs et les angles. On prend maintenant les définitions de

φ et ψ dans le quadrilatère obtenu par transformation et dans le quadrilatère initial. On trouve les résultats suivants :

$$\varphi(r,s) = \frac{s}{p} = \psi(p,q)$$

$$\psi(r,s) = \frac{q}{r} = \varphi(p,q)$$

□

Dans la suite, on va se placer dans un quadrilatère trirectangle $(p,q;r,s)$. Dans les propositions suivantes, nous étudions la variation des deux fonctions par rapport à ces variables. On va utiliser les propositions 2.2 et 2.3 ainsi que les lemmes arithmétiques de la section 1.

Proposition 2.4. *La fonction $\varphi(p,q)$ est strictement croissante par rapport à p.*

Démonstration. Supposons q constant. D'après la proposition 2.3, r est strictement décroissante par rapport à p si q reste constant. Alors on a que $\frac{1}{r}$ est une fonction strictement croissante par rapport à p et donc aussi en multipliant par q constant. D'où $\varphi(p,q) = \frac{q}{r}$ est une fonction croissante de p. □

Proposition 2.5. *La fonction $\psi(p,q)$ est strictement croissante par rapport à q.*

Démonstration. Supposons p constant. D'après la proposition 2.2, s est strictement croissante par rapport à q si p reste constant. La variation ne change pas en divisant par une constante positive p. D'où $\psi(p,q) = \frac{s}{p}$ est une fonction strictement croissante par rapport à q. □

Proposition 2.6. *La fonction $\psi(p,q)$ est strictement décroissante par rapport à p.*

Démonstration. Fixons q. On va utiliser le lemme 1.1, car $\psi(p,q) = \frac{s}{p}$ et s est une fonction strictement croissante de p par la proposition 2.3. De plus s est une fonction strictement positive. Il faut montrer les hypothèses pour pouvoir tirer la conclusion.
Montrons d'abord que $\psi(\frac{p}{2},q) > \psi(p,q)$. Pour montrer ceci on reprend d'abord la figure 5 avec E placé au milieu de AB et on trace H le point symétrique de C par rapport à EG. On remarque que les points C, G et H sont alignés, car $\widehat{CGE} + \widehat{EGH} = \pi$. On utilise la définition de ψ dans le quadrilatère $EBCG$ et la définition des longueurs $GC = \frac{1}{2}HC$ et $EB = \frac{1}{2}AB$.

$$\psi\left(\frac{p}{2},q\right) = \frac{GC}{EB} = \frac{HC}{AB}$$

De plus $DC < HC$, donc

$$\frac{HC}{AB} > \frac{DC}{AB} = \psi(p,q)$$

D'où la première hypothèse.
Montrons maintenant la deuxième hypothèse, à savoir si $p' < p$ et $\psi(p', q) > \psi(p, q)$, alors

$$\psi\left(\frac{p'+p}{2}\right) > \psi(p)$$

On reprend la figure 5 et on trace par le milieu E' de AE une perpendiculaire m à AB. Soit G' le point d'intersection de m avec la perpendiculaire à m passant par C. Soient K le point d'intersection de CG' avec EG et L le poient d'intersection de CG' avec le prolongement AD. On remarque que $KG' = G'L$, en effet K est le symétrique de L par rapport à la droite $E'G'$.

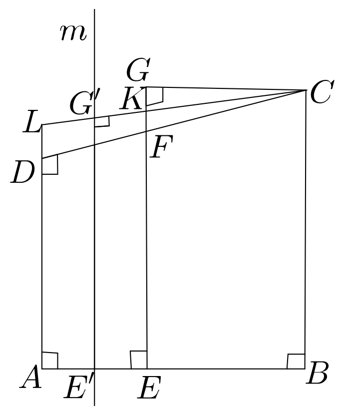


FIGURE 6 –

On a construit E' de cette façon pour que $BE' = \frac{p+p'}{2}$. On a que

$$\psi\left(\frac{p'+p}{2}, q\right) = \frac{CG'}{BE'} = \frac{2CG'}{2BE'} = \frac{CK + KG' + CG'}{BE + EE' + BE'}$$

En plus $KG' = G'L$ et $EE' = E'A$. D'où on a l'égalité suivante

$$\frac{CK + KG' + CG'}{BE + EE' + BE'} = \frac{CK + G'L + CG'}{BE + E'A + BE'} = \frac{CK + CL}{BE + BA}$$

De plus $CK > CG$ et $CL > CD$.

$$\frac{CK + CL}{BE + BA} > \frac{CG + CD}{BE + BA}$$

En outre $\frac{CG}{BE} = \psi(p', q) > \psi(p, q) = \frac{CD}{AB}$, cela implique que $\frac{BE}{CG} < \frac{AB}{CD}$.
De plus

$$\frac{BE + BA}{CG + CD} = \frac{BE}{CG + CD} + \frac{BA}{CG + CD} < \frac{BE}{CG} + \frac{BA}{CD} < \frac{2AB}{2CD} = \frac{AB}{CD}$$

D'où en prenant l'inverse des deux rapports

$$\frac{CG + CD}{BE + BA} > \frac{CD}{BA} = \psi(p, q)$$

Donc on a le résultat suivant

$$\psi\left(\frac{p' + p}{2}, q\right) > \psi(p, q)$$

D'où la deuxième hypothèse, on peut donc utiliser le lemme 1.1. Alors on a que $\psi(p, q)$ est une fonction strictement décroissante par rapport à p. $\square$

Proposition 2.7. *La fonction $\varphi(p, q)$ est strictement croissante par rapport à q.*

Démonstration. Soit $ABCD$ le quadrilatère trirectangle $(p, q; r, s)$ avec $AB = p$ et $AD = q$. Soient p fixe et $q' < q$, montrons que $\varphi(p, q') < \varphi(p, q)$. Plaçons D' sur AD tel que $AD' = p'$. En plus soit C' sur BC tel que DC' est perpendiculaire à BC et soit G sur le prolongement de $C'D'$ tel que DG perpendiculaire à $C'D'$. On a d'après la construction que $r' = BC' < BC = r$.

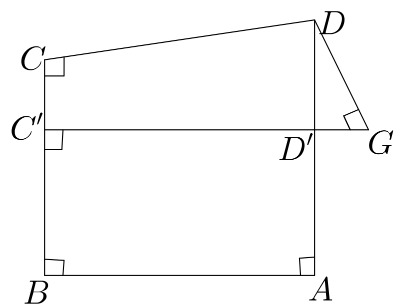


Figure 7 –

Ensuite on va utiliser la propriété 2.2 et donc $\varphi(p, q) = \psi(r, s)$. De plus la proposition 2.6 nous mentionne la décroissance stricte de ψ par rapport à la première variable. On a s reste constant, donc $\psi(r, s) < \psi(CC', s)$ avec les quadrilatères triectangles $ABCD$ et $GC'CD$. D'autre part

$$\psi(CC', s) = \frac{DG}{CC'} < \frac{DD'}{CC'} = \frac{q - q'}{r - r'}$$

D'où on en tire le résultat suivant

$$\varphi(p, q) < \frac{q - q'}{r - r'}$$

D'où $\frac{q}{r} < \frac{q-q'}{r-r'}$ qui implique que $q(r-r') < r(q-q')$. En éliminant les parenthèses on a que $qr - qr' < qr - q'r$. En résolvant cette inéquation on aboutit au résultat final

$$q'r < qr' \Rightarrow \frac{q'}{r'} < \frac{q}{r}$$

Et donc par définition de φ on a que $\varphi(p,q') < \varphi(p,q)$. D'où $\varphi(p,q)$ est une fonction strictement croissante par rapport à q. $\square$

3 Les fonctions $C(c,\alpha)$ et $S(c,\alpha)$ du triangle rectangle

Dans cette section on prend les notions de triangles rectangles. Rappelons que la somme des triangles avec lesquels nous travaillons est $< \pi$. Prenons pour la suite les notations suivantes, ABC est un triangle rectangle en C, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, l'angle en A est α et l'angle en B est β. On va utiliser ce triangle pour définir les fonctions $C(c,\alpha)$ et $S(c,\alpha)$. Puis on va étudier leur variation par rapport à leurs variables.

Remarque 3.1. *Les variables a et b dépendent de c et de α.*

Propriété 3.1. *Soit ABC un triangle rectangle en C, fixons α, alors a et b sont des fonctions strictement croissantes de c.*

Démonstration. Soit $AB' = c' < c$, menons à AC sa perpendiculaire qui passe par B' et soit C' ce point d'intersection. G est le point d'intersection de CD et de la perpendiculaire à $B'C'$.

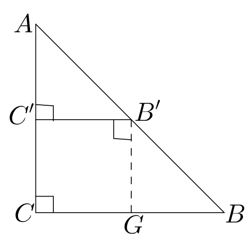


FIGURE 8 –

Par construction on a que $b' = AC' < AC = b$. $CC'B'G$ est un quadrilatère trirectangle avec angle aigu en G et d'après la proposition 2.1 $CG > B'C'$. Donc $a' = B'C' < GC < BC = a$. Donc si α est fixé, a et b sont des fonctions strictement croissantes de c. $\square$

Définition 3.1. *Soit ABC un triangle rectangle, on définit C et S pour (c,α) avec $\alpha < 2\pi$ de la manière suivante*

$$C(c,\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$S(c,\alpha) = \frac{a}{c}$$

On va maintenant regarder quelques propriétés des deux fonctions définies.

Propriété 3.2. *Soit ABC un triangle rectangle défini par (c, α), alors on a $C(c, \alpha) < 1$ et $S(c, \alpha) < 1$.*

Démonstration. D'après la définition d'un triangle, on a que l'hypothénuse est le côté le plus long, d'où $a < c$ et $b < c$. En divisant par c, on trouve $\frac{a}{c} < 1$ et $\frac{b}{c} < 1$. On utilise la définition de S et C et on trouve le résultat voulu $C(c, \alpha) < 1$ et $S(c, \alpha) < 1$. □

Propriété 3.3. *Soit ABC un triangle rectangle défini par (c, α), alors on a $C(c, \beta) = S(c, \alpha)$ et $S(c, \beta) = C(c, \alpha)$.*

Démonstration. De l'angle β on sait que son côté adjacent est a et son côté opposé est b. En effet nous nous plaçons dans un triangle construit par symétrie d'axe AC et rotation d'angle π or qui reste équivalent à celui de ABC.

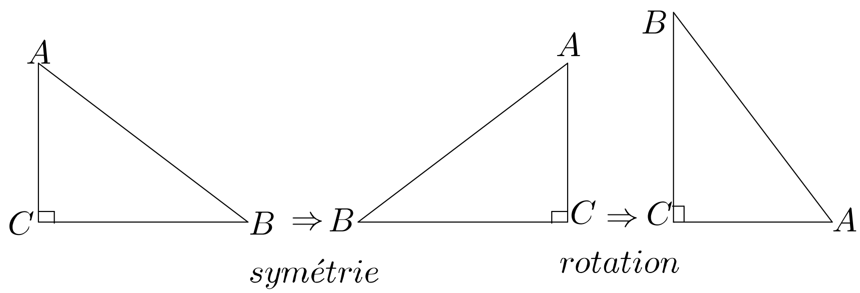


FIGURE 9 –

Donc en utilisant la définition de C en (c, β), on a $C(c, \beta) = \frac{a}{c} = S(c, \alpha)$. De plus en utilisant le même raisonnement $S(c, \beta) = \frac{b}{c} = C(c, \alpha)$. □

A partir de maintenant, on va définir la variation des fonctions définies par rapports à leurs variables, c'est à dire la variation par rapport à α et par rapport à c. Etudions d'abord la variation par rapport à α.

Proposition 3.1. *Soit c constant, alors $C(c, \alpha)$ est une fonction strictement décroissante de α.*

Démonstration. On suppose $\alpha' > \alpha$, alors montrons d'abord que $b' < b$. Expliquons le fait par la figure 10. Soit ABC un triangle rectangle en C, alors on va construire à partir de ce triangle le triangle ABC' rectangle en C' qui est défini par (c, α'). Appelons d la droite tel que l'angle entre d et AB mesure α' et A le sommet de cet angle. Soit C' le point d'intersection de la droite d et de la droite passant par B et perpendiculaire à d. D est le point d'intersection de AC avec BC'.

Comme $\alpha' > \alpha$ on que $AD < AC = b$, de plus $b' = AC' < AD$. Donc $b' < b$. Ce qui montre que b est strictement décroissante en fonction de α. Le fait de diviser par un nombre constant positif ne change pas la variation. D'où $C(c, \alpha) = \frac{b}{c}$ est une fonction strictement décroissante de α. □

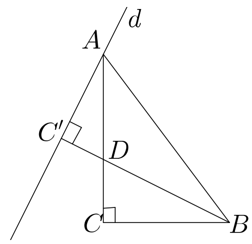


FIGURE 10 –

Proposition 3.2. *Soit c constant, alors $S(c,\alpha)$ est une fonction strictement croissante de α.*

Démonstration. On pose $\alpha' > \alpha$ et utilise de nouveau la figure 10. On a par construction que $BD < BC'$. En outre $BC' = a'$ et $a = CB < BD$. D'où $a < a'$, c'est à dire a est une fonction strictement croissante de α. De plus en divisant par un nombre constant positif on ne change pas la variation, d'où $S(c,\alpha) = \frac{a}{c}$ est une fonction strictement croissante de α. □

Dans la suite, on étudie la variation par rapport à c, pour ceci on va utiliser un lemme arithmétique défini dans la section 2.

Proposition 3.3. *Soit α fixe, alors $S(c,\alpha)$ et une fonction strictement croissante de c.*

Démonstration. D'après la propriété 3.1, on a que a est une fonction strictement croissante de c et a est strictement positive. De plus $S(c,\alpha) = \frac{a}{c}$, donc on peut utiliser le lemme arithmétique 1.2. Il faut donc prouver ses hypothèses.
On va commencer par prouver que $S(\frac{c}{2},\alpha) < S(c,\alpha)$. Soit E le milieu de AB et soit EF la perdendiculaire à AC. On définit G comme point d'intersection entre EF et sa perpendiculaire passant par B.

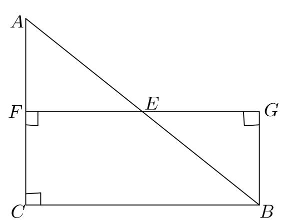


FIGURE 11 –

Comme les angles AEF et GEB sont des angles opposés au sommet, donc égaux et comme $AE = EB$ on a que les triangles rectangles AEF et GEB sont équivalents et donc $GE = EF$. D'où

$$S\left(\frac{c}{2},\alpha\right) = \frac{EF}{AE} = \frac{2EF}{2AE} = \frac{GE+EF}{AE+EB} = \frac{FG}{AB}$$

De plus le quadrilatère $FGCB$ est trirectangle, et donc $GF < CB$ par la proposition 2.1.

$$\frac{FG}{AB} < \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = S(c, \alpha)$$

Donc $S(\frac{c}{2}, \alpha) < S(c, \alpha)$, c'est la première hypothèse.
Prouvons maintenant la deuxième hypothèse, soit $c' < c$ et $S(c', \alpha) < S(c, \alpha)$. On prend ABC un triangle rectangle en C et B' tel que $AB' = c'$. On pose maintenant B'' le milieu de $B'B$. $B'C'$ et $B''C''$ sont tous les deux perpendiculaires à AC. Soit $B'H$ perpendiculaire à $C''B''$ et BG perpendiculaire au prolongement de $C''B''$, alors on a la figure suivante

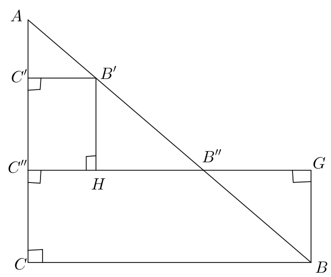


Figure 12 –

Puisque les angles $B'B''H$ et $GB''B$ sont opposés au sommets, ils sont égaux et comme $B'B'' = B''B$, alors on que les deux triangles rectangles $B'B''H$ et $GB''B$ sont équivalents et donc $B''H = B''G$. Par construction $AB'' = \frac{c'+c}{2}$, d'où

$$S\left(\frac{c'+c}{2}, \alpha\right) = \frac{C''B''}{AB''} = \frac{2C''B''}{2AB''} = \frac{C''H + HB'' + C''B''}{AB'' + AB' + B'B''}$$
$$= \frac{C''H + B''G + C''B''}{AB'' + AB' + B''B} = \frac{C''H + C''G}{AB + AB'}$$

De plus les deux quadrilatères $C'C''HB'$ et $C''CBG$ sont trirectangles et d'après la proposition 2.1 $HC'' < B'C'$ et $GC'' < BC$. D'où on a le résultat suivant

$$\frac{C''H + C''G}{AB + AB'} < \frac{B'C' + BC}{AB' + AB}$$

De plus d'après l'énoncé, on a que $S(c', \alpha) < S(c, \alpha)$ avec $S(c', \alpha) = \frac{B'C'}{AB'}$ et $S(c, \alpha) = \frac{BC}{AB}$. D'où on a

$$\frac{B'C' + BC}{AB' + AB} = \frac{B'C'}{AB' + AB} + \frac{BC}{AB' + AB} < \frac{B'C'}{AB'} + \frac{BC}{AB} < \frac{2BC}{2AB} = \frac{BC}{AB} = S(c, \alpha)$$

Donc on a prouvé que celon ces hypothèses que

$$S\left(\frac{c'+c}{2}, \alpha\right) < S(c, \alpha)$$

On peut maintenant tirer la conclusion avec le lemme 1.2, d'où on a montré que $S(c, \alpha)$ est une fonction strictement croissante de c. $\square$

On va maintenant regarder la variation de la fonction $C(c, \alpha)$ par rapport à la variable c. Pour ceci on va utiliser le résultat précédent et la propriété 3.3.

Proposition 3.4. *Soit α fixe, alors $C(c, \alpha)$ est une fonction strictement décroissante de c.*

Démonstration. Soit $c' < c$ et B' tel que $B'A = c'$. On va placer C' sur AC tel que $B'C'$ est perpendiculaire à AC et de même H sur BC tel que $B'H$ est perpendiculaire à BC.

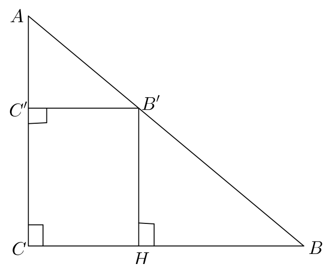


FIGURE 13 –

On a d'après la propriété 3.3 que $C(c, \alpha) = S(c, \beta) = \frac{b}{c}$. De plus d'après la proposition 3.3, $S(c, \beta)$ est une fonction strictement croissante de c. D'où $S(c, \beta) > S(c - c', \beta)$ avec $c' = AB'$ et $S(c - c', \beta) = \frac{B'H}{B'B}$ dans le triangle BHB'. De plus dans le quadrilatère trirectangle $CHB'C'$ on a que $B'H > CC'$. On que $CC' = b - b'$ et $BB' = c - c'$ et on trouve par notre raisonnement que

$$\frac{b}{c} > \frac{B'H}{B'B} > \frac{CC'}{BB'} = \frac{b - b'}{c - c'}$$

Ceci implique que $b(c - c') > (b - b')c$ et donc en supprimant les parenthèses $bc - bc' > bc - b'c$. Cette inégalité devient $bc' < b'c$ et en divisant par c et c', on trouve le résultat voulu.

$$S(c, \alpha) = \frac{b}{c} < \frac{b'}{c'} = S(c', \alpha)$$

D'où $S(c, \alpha)$ est une fonction strictement décroissante de c. □

4 La fonction $\varphi(x)$

Dans cette section, le point important est de définir $\varphi(x)$ explicitement par une formule trigonométrique. Or on commence cette section par la définition de $\varphi(x)$ à l'aide de $\varphi(p, q)$. Ensuite on verra quelques propositions de cette fonction pour parvenir au point important.

Proposition 4.1. *Soit $\varphi(p, q)$ définit comme dans la section 2, alors pour tout p il existe une limite lorsque q tend vers 0.*

Démonstration. Ce résultat est immédiate, car d'après la section 2, on a la propriété $\varphi(p,q) > 1$ et que c'est une fonction strictement croissante de q. D'où si q tend vers 0, alors la fonction est inférieurement borné. Donc la limite existe. □

La définition de $\varphi(x)$ résulte du fait que la limite de la fonction $\varphi(p,q)$ existe.

Définition 4.1. *On définit $\varphi(p)$ pour tout p de la manière suivante*

$$\varphi(p) = \lim_{q \to 0} \varphi(p,q)$$

On va énoncer une remarque importante.

Remarque 4.1. *Si $p = 0$ alors les longueurs q et r d'un quadrilatère trirectangle sont égales, et donc le rapport entre les deux vaut 1. En prenant la limite de ce rapport, la valeur est encore 1. Alors on a $\varphi(0) = 1$. Le fait que $\varphi(p,q) > 1$ et que $\varphi(p,q)$ est strictement croissante par rapport à q, donne l'inégalité $1 \leq \varphi(p) < \varphi(p,q)$.*

Il faut maintenant voir quelques propositions qui nous servent pour la formule trigonométrique.

Proposition 4.2. *La fonction $\varphi(x)$ est croissante de x.*

Démonstration. Soit $0 < x < y$, d'après la proposition 2.4 pour q une constante on a que $\varphi(x,p)$ est strictement croissante de x, c'est à dire $\varphi(x,q) < \varphi(y,q)$. En prenant la limite, on trouve l'inégalité $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. D'où $\varphi(x)$ est croissante. □

Proposition 4.3. *Si $x \geq y$, alors φ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(x+y) = 2\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(x-y)$$

Démonstration. Si $y = 0$, c'est évident car on aurait l'équation bien vérifé

$$\varphi(x) = 2\varphi(x)\varphi(0) - \varphi(x) = 2\varphi(x) - \varphi(x) = \varphi(x)$$

Supposons maintenant que $x > y$. Pour ce raisonnement, on utilise la figure 14.

Soient K, L, M et N des points alignés tel que les distances sont : $KM = x+y$, $KN = x-y$, $KL = x$ et $LM = y = LN$. A chaque point on désigne par k, l, m et n la demi-droite perpendiculaire à KM. Les demi-droites sont toutes supposées du même côté de KM. Du point K' qui est sur k et différent de K on trace une perpendiculaire à m et une à l, appelons M' et L' les points d'intersection respectifs. Du point L'' qui est l'intersection de la droite $K'M'$ avec l, on mène la perpendiculaire à n avec N' le point d'intersection. La droite $L''N'$ coupe la droite k en K''. Et de K'' on mène la perpendiculaire à l avec L''' son point d'intersection. On a maintenant introduit toutes les droites et points qui sont nécessaire pour notre preuve.

Faisons maintenant une discussion sur les positions des points par rapport aux autres, ainsi que sur des formes qui apparaissent. L'angle $KK'M'$ est

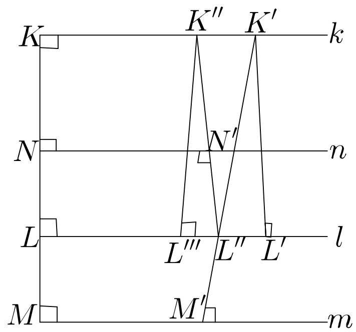


FIGURE 14 –

aigu car par construction $KK'M'M$ est un quadrilatère trirectangle. De même $LL'''M'M$ est un quadrilatère trirectangle, donc l'angle $LL''M'$ est aigu, par conséquent L'' est placé entre L et L'. Les quadrilatères trirectangles sont caractérisés par les côtés p et q d'après la section 2, alors dans ce cas $LL''N'N$ est définit par LN et LL'' et $LL''M'M$ par LM et LL''. Par construction de M, N et L on a $LM = y = LN$, d'où les deux quadrilatères sont équivalents. En effet, on peut dire qu'ils sont symétriques par rapport à LL''. Ce qui a pour conséquence que $MM' = NN'$ et les angles $N'L''L$ et $M'L''L$ sont égaux. En plus l'angle $K'L''L'$ a même amplitude, car il est angle opposé au sommet avec $\widehat{M'L''L}$. Le point K'' se situe entre K et K' car l'angle $LL''N'$ est aigu, tandis que l'angle $LL''K'$ est obtu. Le point L''' se trouve entre L'' et L. Le quadrilatère birectangle $K'K''L'''L'$ l'angle $K'K''L'''$ est obtu, car l'angle $KK''L'''$ est aigu dans le quadrilatère trirectangle $KK''L'''L$. Donc on peut comparer les longueurs des triangles rectangles $K''L'''L''$ et $K'L''L'$. En effet comme l'angle est obtu, on a que l'autre angle, à savoir $K''K'L'$ est aigu, car il faut que la somme des angles soit $< 2\pi$. D'où par l'égalité des deux angles de bases $K'L' > K''L'''$, $L'L'' > L''L'''$ et $K'L'' > K''L''$. On a préparé le travail et on commence par la définition de C dans les triangles $K''L'''L''$ et $K'L'L''$. De plus on utilise la proposition 3.4 qui nous dit que C est strictement décroissante de c et le fait que les angles $K''L''L'''$ et $K'L''L'$ ont même amplitude. Donc comme $K''L'' < K'L''$ on a

$$\frac{L''L'''}{K''L''} = C(K''L'', \widehat{K''L''L'''}) > C(K'L'', \widehat{K'L''L'}) = \frac{L'L''}{K'L''}$$

Donc comme $L''L' > L''L'''$ on a l'inéquation avec les rapports suivants

$$\frac{K'L''}{K''L''} > \frac{L'L''}{L''L'''} > \frac{L''L'''}{L''L'''} = 1$$

On part maintenant de $\varphi(x+y, KK') = \varphi(KM, KK') = \frac{KK'}{MM'}$ et on veut l'écrire à l'aide de $\varphi(x, KK') = \frac{KK'}{LL'}$, $\varphi(y, LL'') = \frac{LL''}{MM'}$ et $\varphi(x-y, KK'') = \frac{KK''}{NN'}$. Donc en utilisant la figure 14 on a le calcul suivant

$$\frac{KK'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL'' + L''L'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL''}{MM'} + \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{L''L'}{MM'}$$

De plus on utilise que $L'''L'' = LL'' - LL'''$, d'où

$$\frac{KK'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL''}{MM'} + \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{LL'' - LL'''}{MM'}$$

Donc en faisant une mise en évidence

$$\frac{KK'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL''}{MM'} \cdot \left(1 + \frac{L''L'}{L'''L''}\right) - \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{LL'''}{MM'}$$

De plus on peut séparer la fraction $\frac{LL'''}{MM'} = \frac{LL'''}{KK''} \cdot \frac{KK''}{MM'}$ et on utilise $MM' = NN'$. D'où

$$\frac{KK'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL''}{MM'} \cdot \left(1 + \frac{L''L'}{L'''L''}\right) - \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{LL'''}{KK''} \cdot \frac{KK''}{NN'}$$

En utilisant la définition de $\varphi(p, q)$ on peut reécrire cette équation.

$$\varphi(x + y, KK') = \varphi(x, KK') \cdot \varphi(y, LL'') \cdot \left(1 + \frac{L''L'}{L'''L''}\right)$$
$$-\varphi(x, KK') \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{1}{\varphi(x, KK'')} \cdot \varphi(x - y, KK'')$$

Pour utiliser la définition, on fait tendre KK' vers 0, or comme K'' compris entre K et K', on a que KK'' tend aussi vers 0. De plus comme K' tend vers K et $K'L''$ est perpendiculaire à m, alors $K'L''$ tend vers KL car KL perpendiculaire à m et donc LL'' tend vers 0. Si K' tend vers K alors les distances $K'L'$ et $K''L'''$ tendent tous les deux vers la limite $KL = x$. Donc les deux triangles deviennent égaux et donc les distances $L''L'$ et $L'''L''$ seront les mêmes. Comme on discute ici sur le rapport des deux distances, on remarque que si $K'K$ tend vers 0 alors ce rapport tend vers 1. Donc en prenant la limite, l'équation devient

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot (1 + 1) - \varphi(x) \cdot 1 \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi(x - y)$$

Donc pour $y < x$, on trouve le résultat voulu

$$\varphi(x + y) = 2\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(x - y)$$

Il faut maintenant encore prouver le résultat si $y = x$. On reprend la figure, mais dans ce cas $KL = x = LM$, $KN = 0$ et $KM = 2x$, c'est à dire L se trouve au milieu de KM et on ne tient pas compte du point N. De plus l'angle $KK'L''$ est un angle droit par construction. On fait le même raisonnement et on aboutit au résultat suivant, en utilisant que $KK'' = NN'$ et par conséquent le rapport vaut 1.

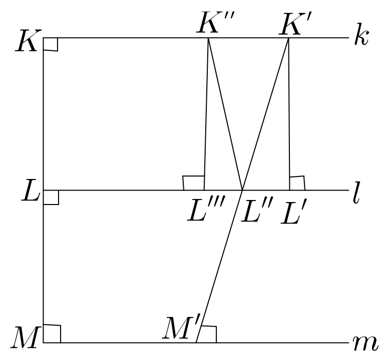


FIGURE 15 –

$$\frac{KK'}{MM'} = \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{LL''}{MM'} \cdot \left(1 + \frac{L''L'}{L'''L''}\right) - \frac{KK'}{LL'} \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{LL'''}{KK''} \cdot 1$$

En utilisant la définition de $\varphi(p,q)$, on a d'après la figure que

$$\varphi(2x, KK') = \varphi(x, KK') \cdot \varphi(x, LL'') \cdot \left(1 + \frac{L''L'}{L'''L''}\right)$$

$$-\varphi(x, KK') \cdot \frac{L''L'}{L'''L''} \cdot \frac{1}{\varphi(x, KK'')}$$

On fait maintenant tendre KK' vers 0 et on reprend la même argumentation qu'au-dessus, d'où en prenant la limite on trouve

$$\varphi(2x) = \varphi(x) \cdot \varphi(x) \cdot (1+1) - \varphi(x) \cdot 1 \cdot \frac{1}{\varphi(x)}$$

Et finalement on trouve le résultat voulu

$$\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1 \tag{2}$$

□

Le point important de cette section est le théorème 4.1, qui nous exprime $\varphi(x)$ à l'aide d'une formule trigonométrique.

Théorème 4.1. *Si* $h = \frac{1}{\operatorname{arccosh}(\varphi(1))}$, *alors*

$$\varphi(x) = \cosh\left(\frac{x}{h}\right)$$

Démonstration. On va utiliser la proposition 1.1. Or d'abord, d'après 1.4 φ est soit cos, soit cosh, car elle vérifie l'équation (1). De plus on a $\varphi(x) \geq 1$ d'après la

remarque 4.1, ce qui implique que φ ne peut pas être cos. Donc on doit prendre cosh. On a que $\varphi(0) = 1 = \cosh(0)$ et $\cosh(\frac{1}{h}) = \cosh(\text{arccosh}(\varphi(1))) = \varphi(1)$ et montrons par récurrence sur n que $\cosh(\frac{2^n}{h}) = \varphi(2^n)$.
Pour $n = 0$, c'est vérifié, car $\cosh(\frac{1}{h}) = \varphi(1)$. Supposons maintenant que c'est vérifié pour n et montrons le pour $n+1$. On va utiliser l'équation (2) pour utiliser l'hypothèse de récurrence $\cosh(\frac{2^n}{h}) = \varphi(2^n)$. Alors on a

$$\varphi(2^{n+1}) = \varphi(2 \cdot 2^n) = 2\varphi^2(2^n) - 1 = 2\cosh^2\left(\frac{2^n}{h}\right) - 1$$

De plus on va utiliser la formule $2\cosh^2(x) = 1 + \cosh(2x)$.

$$2\cosh^2\left(\frac{2^n}{h}\right) - 1 = 1 + \cosh\left(2 \cdot \frac{2^n}{h}\right) - 1 = \cosh\left(\frac{2^{n+1}}{h}\right)$$

Donc on a montré par récurrence que pour tout entier naturel n $\cosh(\frac{2^n}{h}) = \varphi(2^n)$.
On peut utiliser la proposition 1.1 et on a $\cosh(\frac{k}{2^n h}) = \varphi(\frac{k}{2^n})$ pour n et k des entiers positifs. On avait vu que la fonction $\varphi(x)$ est une fonction monotone, de plus la fonction cosh est une fonction continue, donc pour tout x qui appartient au domaine de définition de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \cosh\left(\frac{x}{h}\right)$$

□

Discutons des conséquences de ce théorème.

Proposition 4.4. *Soit $(p, q; r, s)$ un quadrilatère trirectangle, alors*

$$\cosh\left(\frac{r}{h}\right) < \psi(p, q) < \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$$

Démonstration. Le théorème 4.1 et la remarque 4.1 affirment que

$$\cosh\left(\frac{r}{h}\right) = \varphi(r) < \varphi(r, s)$$

La propriété 2.2 donne la première partie de l'inégalité, car $\varphi(r, s) = \psi(p, q)$. D'où on a que

$$\cosh\left(\frac{r}{h}\right) < \psi(p, q)$$

Montrons maintenant la deuxième partie de l'inégalité. On va prendre un quadrilatère trirectangle (p',q',r',s') qui est définit de la manière suivante $r' = q$ et $s' < p$. On a que $\psi(p, q) < \psi(p', q)$, car d'aprés la proposition 2.6, la fonction $\psi(p, q)$ est strictement décroissante par rapport à p et $p' < s' < p$. Comme $q = r' < q'$, la proposition 2.5 donne le fait que $\psi(p', q) < \psi(p', q')$. De plus $\psi(p', q') = \varphi(r', s') = \varphi(q, s')$, donc $\psi(p, q) < \varphi(q, s')$. Or il faut prendre la limite. Si s' tend vers 0, et puisque $p' < s'$, alors p' tend aussi vers 0.

Donc $\lim_{s'\to 0}\psi(p',q) = \lim_{p'\to 0}\psi(p',q)$.
De plus la proposition 2.6 affirme que $\psi(p,q) < \lim_{p'\to 0}\psi(p',q)$ et d'après la proposition 2.5, $\lim_{p'\to 0}\psi(p',q) < \lim_{s'\to 0}\varphi(q,s')$ et $\lim_{s'\to 0}\varphi(q,s') = \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$. D'où on a que

$$\psi(p,q) < \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$$

□

Remarque 4.2. $\lim_{p\to 0}\psi(p,q) = \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$*, car si* p *tend vers* 0*, alors* r *tend vers* q *et donc on a l'inégalité suivante*

$$\cosh\left(\frac{q}{h}\right) \le \lim_{p\to 0}\psi(p,q) \le \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$$

Donc l'égalité des deux termes par le théorème des gendarmes.

Proposition 4.5. *Soit* $\varepsilon > 0$*, alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* p *et* $q < \delta$

$$1 < \psi(p,q) < 1 + \varepsilon$$

Démonstration. En effet le résultat provient de la propriété 2.1, $1 < \psi(p,q)$ et de la proposition 4.4 $\psi(p,q) < \cosh\left(\frac{q}{h}\right)$. De plus par l'existence de la limite de $\cosh(x)$ on a que $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tel que $\forall x < \delta\ \cosh(x) < 1 + \varepsilon$. Et donc en prenant $\frac{\delta}{h}$ on a que $\frac{q}{h} < \frac{\delta}{h}$ et donc $q < \delta$. D'où avec ces conditions on a que $\cosh\left(\frac{q}{h}\right) < 1 + \varepsilon$. Donc on a le résultat voulu

$$1 < \psi(p,q) < 1 + \varepsilon$$

□

Remarque 4.3. *D'après ce qu'on a maintenant montré* $\lim_{q\to 0}\psi(p,q) = 1$*. Donc on a aussi* $\lim_{p\to 0}\varphi(p,q) = 1$*. En effet si* p *tend vers* 0*, alors* r *tend vers* q *et donc* s *tend vers* 0*. De plus puisque* $\varphi(p,q) = \psi(r,s)$ *on a* $\lim_{p\to 0}\varphi(p,q) = \lim_{s\to 0}\psi(r,s) = 1$.

5 Les fonctions $C(x)$ et $S(x)$

Le but de cette section est de définir les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ à l'aide de formules trigonométriques. Or on commence par la définition à l'aide $C(p,q)$ et $S(p,q)$. Puis on verra quelques propositions importantes pour arriver au but.

On va supposer que c est une longueur et x un angle aigu.

Proposition 5.1. *La limite lorsque* c *tend vers* 0 *des fonctions* $C(c,x)$ *et* $S(c,x)$ *existe.*

Démonstration. $S(c,x)$ est une fonction strictement croissante de c et elle est strictement positive, donc elle est borné inférieurement, et donc la limite existe. $C(c,x)$ est une fonction strictement décroissante de c et $C(c,x) < 1$, alors elle est borné supérieurement et donc la limite existe. □

Graçe à cette proposition on peut définir les fonctions $C(x)$ et $S(x)$.

Définition 5.1. *Les fontions $C(x)$ et $S(x)$ sont définis de la façon suivante*

$$C(x) = \lim_{c \to 0} C(c, x)$$

$$S(x) = \lim_{c \to 0} S(c, x)$$

Il faut voir quelques propriétés sur les deux fonctions définies.

Propriété 5.1. *On a les inégalités $C(c, x) < C(x) \leq 1$ et $S(x) < S(c, x) < 1$.*

Démonstration. La fonction $C(c, x)$ est une fonction strictement décroissante de c d'après la proposition 3.4 et donc $C(x) > C(c, x)$. De plus la limite de $C(c, x)$ est inférieure ou égale à sa borne supérieure d'où la première inégalité $C(c, x) < C(x) \leq 1$. La fonction $S(c, x)$ est une fonction strictement croissante de c d'après la proposition 3.3 et donc $S(x) < S(c, x)$. Et d'après la propriété 3.2 $S(c, x) < 1$ et donc on a la deuxième inégalité $S(x) < S(c, x) < 1$. $\square$

On va poser que $C(0) = S(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $C(\frac{\pi}{2}) = S(0) = 0$

Remarque 5.1. *En effet si $x = 0$ alors a tend vers 0, donc le rapport $\frac{a}{c}$ devient 0. De plus b tend vers c, donc $\frac{b}{c}$ tend vers 1. D'où $C(0) = 1$ et $S(0) = 0$.*

Proposition 5.2. $S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Démonstration. Si $x = 0$, on a $S(0) = C(\frac{\pi}{2})$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, on a $C(0) = S(\frac{\pi}{2})$. C'est vérifié d'après ce qu'on a posé. On peut donc supposer que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, car x est un angle aigu. On va construire un triangle rectangle ABC avec $AB = c$ et $\widehat{BAC} = x$. On trace m la perpendiculaire à AC et D est le point tel que BD est perpendiculaire à m.

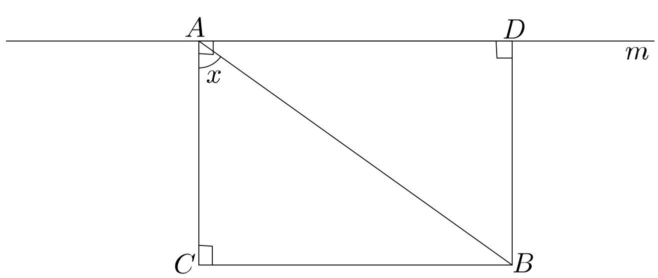


Figure 16 –

D'après cette figure, on voit que

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} - \widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - x$$

On veut exprimer $S(c, x) = \frac{BC}{AB}$ en fonction de $C\left(c, \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{AD}{AB}$.

$$S(c, x) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB}$$

De plus $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC}$ et les angles ABC et DBA sont aigus. Le quadrilatère $ABCD$ est trirectangle et donc $\frac{BC}{AD} = \psi(AD, BD)$. D'où on a $S(c, x) = \psi(AD, BD) \cdot C\left(c, \frac{\pi}{2} - x\right)$. On prend la limite si c tend vers 0. Or si c tend vers 0, alors B se rapproche vers A et donc BD et AC tendent vers 0. Par conséquence BC tend vers AD et donc le rapport $\frac{BC}{AD}$ tend vers $\frac{AD}{AD} = 1$. D'où

$$\lim_{c \to 0} S(c, x) = \lim_{c \to 0} \psi(AD, BD) \cdot \lim_{c \to 0} C\left(c, \frac{\pi}{2} - x\right)$$

Ceci implique que

$$S(x) = 1 \cdot C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

□

Remarque 5.2. *Une conséquence de cette proposition est que* $C(x) < 1$ *pour tout* x *strictement positif. En effet cette conséquence vient du fait que* $S(x) < 1$ *pour tout* $0 < x < \frac{\pi}{2}$*. Donc* $C(x) = S(x - \frac{\pi}{2}) < 1$*, si* x *strictement positif.*

Proposition 5.3. *Soient* x *et* y *deux angles aigus et* $x < y$*, alors* $C(x) \geq C(y)$ *et* $S(x) \leq S(y)$*.*

Démonstration. On a déjà montré que $C(c, x)$ est une fonction strictement décroissante de x, c'est à dire que $C(c, x) > C(c, y)$. Prenons maintenant la limite si c tend vers 0, alors on a $C(x) \geq C(y)$. On a prouvé la première partie. Pour la deuxième partie on utilise la proposition 5.2, $S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. De plus $x < y$ implique que $\frac{\pi}{2} - x > \frac{\pi}{2} - y$ et donc d'après la première partie on a que

$$S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq C\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = S(y)$$

Donc on a que $C(x)$ est une fonction décroissante de x et $S(x)$ croissante de x. □

Proposition 5.4. $C(x)$ *et* $S(x)$ *sont des fonctions continues.*

Démonstration. On va d'abord montrer la continuité à droite. Soient x un angle aigu, $\varepsilon > 0$ et c un nombre positif tel que $C(c, x) > C(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $S(c, x) < S(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. On va construire un triangle rectangle tel que $AB = c$ et $\widehat{BAC} = x$. De plus soit δ l'angle DAC avec D qui appartient au prolongement de CB tel que $\frac{BD}{AB} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant $\mid (x + h) - x \mid= h < \delta$ et B' sur le prolongement de CB entre B et D avec $\widehat{B'AB} = h$.

Calculons $\mid C(x + h) - C(x) \mid$ et utilisons le fait que C est décroissante par la proposition 5.3. Donc on a que

$$\mid C(x + h) - C(x) \mid= C(x) - C(x + h)$$

On avait posé que $C(c, x) > C(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $C(c, x) + \frac{\varepsilon}{2} > C(x)$. De plus $C(x, c) < C(x)$ par la proposition 5.1 et donc l'inégalité devient

$$\mid C(x + h) - C(x) \mid= C(x) - C(x + h) < C(AB, x) + \frac{\varepsilon}{2} - C(AB', x + h)$$

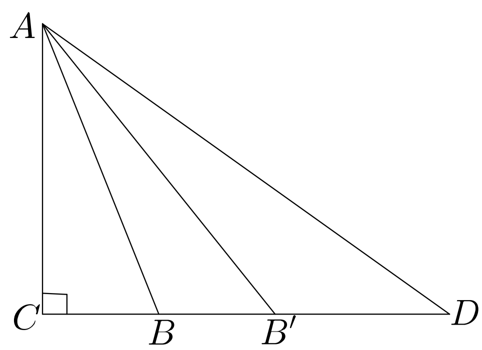


Figure 17 –

Or $C(AB, x) = \frac{AC}{AB}$ et $C(AB', x+h) = \frac{AC}{AB'}$ et on trouve l'inégalité suivante.

$$| C(x+h) - C(x) | < \frac{AC}{AB} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{AC}{AB'}$$

Faisons le calcul $\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{AB'}$

$$\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{AB'} = \frac{AC \cdot AB' - AC \cdot AB}{AB \cdot AB'} = \frac{AC \cdot BB'}{AB \cdot AB'} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{BB'}{AB}$$

Comme $AC < AB'$ on a que le premier rapport est inférieur à 1 et $BB' < BD$, d'où $\frac{BB'}{AB} < \frac{BD}{AB} < \frac{\varepsilon}{2}$ d'après la position de D.

$$\frac{AC}{AB} - \frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{BB'}{AB} < 1 \cdot \frac{BD}{AB} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc on a

$$| C(x+h) - C(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où $C(x)$ est continue à droite.

Raisonnons de façon identique pour la continuité à droite de $S(x)$. On va utiliser les faits $S(x)$ est une fonction croissante, $S(c, x) < S(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $S(x+h) < S(AB', x+h)$

$$| S(x+h) - S(x) | = S(x+h) - S(x) < S(AB', x+h) - S(AB, x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{B'C}{AB'} - \frac{BC}{AB} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Calculons $\frac{B'C}{AB'} - \frac{BC}{AB}$ et utilisons que $AB' > AB$

$$\frac{B'C}{AB'} - \frac{BC}{AB} < \frac{B'C}{AB} - \frac{BC}{AB} = \frac{B'B}{AB} < \frac{BD}{AB} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc l'inégalité devient

$$| S(x+h) - S(x) |< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où la continuité de $S(x)$ à droite.
Ensuite on montre la continuité à gauche en utilisant les notations d'au-dessus et la propostion 5.2. De plus $S(x)$ et C(x) sont continues à droite et comme $h > 0$ on a $\frac{\pi}{2} - x + h > \frac{\pi}{2} - x$.

$$| C(x-h) - C(x) |=| S\left(\frac{\pi}{2} - x + h\right) - S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) |< \epsilon$$

$$| S(x-h) - S(x) |=| C\left(\frac{\pi}{2} - x + h\right) - C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) |< \epsilon$$

D'où la continuité à gauche. D'où la continuité pour $x > 0$. Maintenant il faut encore prouver la continuité pour $x = 0$. Si x tend vers 0, alors AC tend vers AB, d'où le rapport tend vers 1. De plus BC tend alors vers 0 et le rapport $\frac{BC}{AB}$ tend vers 0. D'après les propositions 5.1 et 5.3 on a $\frac{AC}{AB} = C(c,x) < C(x) < C(0)$ et $\frac{BC}{AB} = S(c,x) > S(x) > S(0)$. Et donc en prenant la limite x tend vers 0. On a le résultat suivant par le théorème des gendarmes.

$$\lim_{x \to 0} C(x) = 1 = C(0)$$

$$\lim_{x \to 0} S(x) = 1 = S(0)$$

□

Proposition 5.5. *Soit α un angle aigu et c une longueur, alors on a*

$$\lim_{(c,x) \to (0^+, \alpha^-)} C(c,x) = C(\alpha)$$

$$\lim_{(c,x) \to (0^+, \alpha^-)} S(c,x) = S(\alpha)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, alors d'après la définition de la limite, il existe $\delta' > 0$ tel que $c < \delta'$ imlique $C(c,\alpha) > C(\alpha) - \varepsilon$ et $S(c,\alpha) < S(\alpha) + \varepsilon$. Supposons maintenant que $x < \alpha$, d'après la croissance stricte de $S(c,x)$ et la décroissance stricte de $C(c,x)$ par rapport à x, on a les inégalités suivantes

$$C(c,x) > C(c,\alpha) > C(\alpha) - \varepsilon$$

$$S(c,x) < S(c,\alpha) < S(\alpha) + \varepsilon$$

On va utiliser la limite à gauche, elle existe d'après la proposition 5.4. Soit h comme dans la démonstration de la proposition mentionnée avec $h = \alpha - x > 0$. Il existe un $\delta'' > 0$ tel que $h < \delta''$ implique

$$| C(\alpha - h) - C(\alpha) |< \varepsilon$$

$$| S(\alpha - h) - S(\alpha) |< \varepsilon$$

Maintenant on va remplacer h par $\alpha - x$ et on utilise la croissance de $S(x)$ et la décroissancec de $C(x)$. Donc $| C(\alpha - \alpha + x) - C(\alpha) |=| C(x) - C(\alpha) |= C(x) - C(\alpha)$ et $| S(\alpha - \alpha + x) - S(\alpha) |=| S(x) - S(\alpha) |= S(\alpha) - S(x)$. D'où on trouve les inégalités $C(x) < C(\alpha) + \varepsilon$ et $S(x) > S(\alpha) - \varepsilon$. Les inégalités de la propriété 5.1 nous donnent

$$C(c, x) < C(x) < C(\alpha) + \varepsilon$$

$$S(c, x) > S(x) > S(\alpha) - \varepsilon$$

On trouve que $C(\alpha) - \varepsilon < C(c, x) < C(\alpha) + \varepsilon$ et $S(\alpha) - \varepsilon < S(c, x) < S(\alpha) + \varepsilon$. Et donc si $\varepsilon > 0$ alors il existe $\delta = \min(\delta', \delta'') > 0$ tel que $c < \delta$ et $\alpha - x < \delta$ implique

$$| C(c, x) - C(\alpha) |< \varepsilon$$

$$| S(c, x) - S(\alpha) |< \varepsilon$$

L'existence d'une limite est donc prouvé et on a bien que

$$\lim_{(c,x)\to(0^+,\alpha^-)} C(c, x) = C(\alpha)$$

$$\lim_{(c,x)\to(0^+,\alpha^-)} S(c, x) = S(\alpha)$$

$\square$

Proposition 5.6. *Si $x \geq y \geq 0$ et $x + y \leq \frac{\pi}{2}$, alors C vérifie l'équation fonctionnelle*

$$C(x + y) = 2C(x)C(y) - C(x - y)$$

Démonstration. Si $y = 0$, c'est évident, car on aurait l'équation bien vérifié

$$C(x) = 2C(x)C(0) - C(x) = 2C(x) - C(x) = C(x)$$

Supposons maintenant que $x > y > 0$ et $x + y < \frac{\pi}{2}$. Pour ce raisonnement, on va faire la figure suivante.

Soit O un point commun où sont issues quatres demi-droites k, l, n et m tel que l'angle entre k et l a comme amplitude x. L'amplitude de l'angle entre l et m est la même qu'entre l et n et mesure y. De plus l'angle entre k et m vaut $x + y$ et celui entre k et n vaut $x - y$. Soit maintenant K un point sur k et différent de O. On mène par K une droite perpendiculaire à l et m et on appelle les point d'intersection L et M respectivement. Soit L' le point d'intersection de KM avec l. L' est situé entre O et L. Soit maintenant $L'N$ la perpendiculaire à n avec N qui appartient à n. Le prolongement de $L'N$ intersecte k en K'. Soit KL'' la perpendiculaire à l avec L'' qui appartient à l. L'' est donc compris entre L' et O. $\widehat{MOL'} = \widehat{L'ON}$ et OL' est commun des deux triangles rectangles NOL' et MOL' et donc ces triangles sont semblables et on a $L'N = L'M$ et $ON = OM$. De plus d'après ces triangless semblables et le fait que $\widehat{ML'O}$

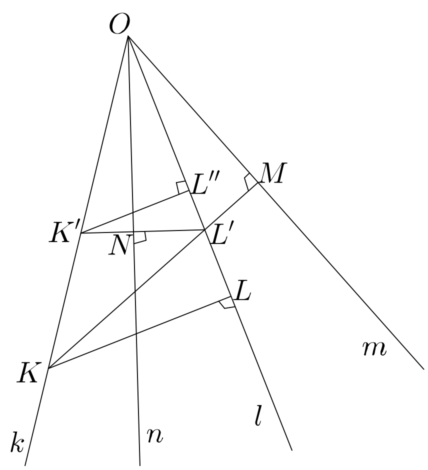


FIGURE 18 –

et $\widehat{KL'L}$ sont des angles opposés au sommet L' on a l'égalité des amplitudes $\widehat{ML'O} = \widehat{KL'L} = \widehat{NL'O}$.
On veut maintenant exprimer $C(OK, x+y) + C(OK', x-y)$ en fonction de $C(OK, x)$ et $C(OL', y)$. En regardant la figure on peut voir que $C(OK, x+y)$ est exprimé dans le triangle OKM et égal à $\frac{OM}{OK}$. De même dans le triangle $OK'N$, on a $C(OK', x-y) = \frac{ON}{OK'}$. On fait le calcul suivant, en utilisant la figure et l'égalité $ON = OM$.

$$\frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK'} = \frac{OM}{OK} + \frac{OM}{OK'} = \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL'}{OK} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL'}{OK'}$$

OL' peut s'écrire des deux manières $OL' = OL - LL'$ et $OL' = OL'' + L'L''$.

$$\frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK'} = \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL - LL'}{OK} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL'' + L'L''}{OK'}$$

On va l'écrire pour avoir quatres termes.

$$\frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK'} = \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL}{OK} - \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{LL'}{OK} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL''}{OK'} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{L'L''}{OK'}$$

On regroupe pour retrouver les rapports $C(OK, x) = \frac{OL}{OK}$ et $C(OL', y) = \frac{OM}{OL'}$.

$$\frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK'} = \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL}{OK} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL''}{OK'} + \frac{OM}{OL'} \cdot \left(\frac{L'L''}{OK'} - \frac{LL'}{OK} \right)$$

Puis on reécrit le terme entre parenthèses pour que cette parenthèse va s'annuler.

$$\frac{OM}{OK} + \frac{ON}{OK'} = \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL}{OK} + \frac{OM}{OL'} \cdot \frac{OL''}{OK'} + \frac{OM}{OL'} \cdot \left(\frac{L'L''}{K'L''} \cdot \frac{K'L''}{OK'} - \frac{LL'}{KL} \cdot \frac{KL}{OK} \right)$$

Donc avec les définitions on a que $C(OK, x+y) = \frac{OM}{OK}$, $C(OK', x-y) = \frac{ON}{OK'}$, $C(OK, x) = \frac{OL}{OK}$, $C(OL', y) = \frac{OM}{OL'}$, $C(OK', x) = \frac{OL''}{OK'}$, $S(OK', x) = \frac{K'L''}{OK'}$ et $S(OK, x) = \frac{KL}{OK}$. L'expression qui se trouve entre parenthèse peut aussi s'écrire avec les fonctions à deux variables C et S. Soit $z = \widehat{OL'N} = \widehat{KL'L}$, on a donc dans le triangle $K'LL'$ que

$$\frac{L'L''}{K'L''} = \frac{L'L''}{K'L'} \cdot \frac{K'L'}{K'L''} = C(K'L', z) \cdot \frac{1}{S(K'L', z)} = \frac{C(K'L', z)}{S(K'L', z)}$$

On fait le même raisonnement dans le triangle KLL'.

$$\frac{L'L}{KL} = \frac{L'L}{KL'} \cdot \frac{KL'}{KL} = C(KL', z) \cdot \frac{1}{S(KL', z)} = \frac{C(KL', z)}{S(KL', z)}$$

Donc en remplaçant les fractions par les fonctions C et S, on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} C(OK, x+y) + C(OK', x-y) &= C(OL', y) \cdot C(OK, x) + C(OL', y) \cdot C(OK', x) \\ &+ C(OL', y) \cdot \left(\frac{C(K'L', z)}{S(K'L', z)} \cdot S(OK', x) - \frac{C(KL', z)}{S(KL', z)} \cdot S(OK, x) \right) \end{aligned}$$

On va maintenant prendre cette expression si OK tend vers 0. Or si OK tend vers 0, il est de même pour OK', car K' est compris entre O et K. De plus M et L tendent alors vers le point O et donc OL' tend vers 0, car il est compris entre O et L. Regardons l'angle z. Pour ce raisonnement, on prend P le milieu de OM et on trace QP la perpendiculaire à OM avec Q qui appartient à OL'.

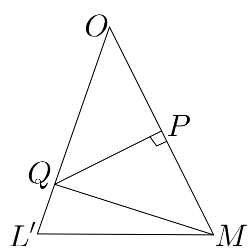


Figure 19 –

On discute sur le déficit angulaire et on utilise toutes les notions vues en sous-section 1.3. Comme $\widehat{QOP} = \widehat{L'OM} = y$, le déficit angulaire du triangle OPQ est

$$\pi - \widehat{OPQ} - \widehat{PQO} - \widehat{QOP} = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{PQO} - y = \frac{\pi}{2} - y - \widehat{PQO}$$

Le déficit angulaire de $OL'M$ vaut

$$\pi - \widehat{OML'} - \widehat{ML'O} - \widehat{L'OM} = \pi - \frac{\pi}{2} - z - y = \frac{\pi}{2} - z - y$$

Les triangles OPQ et POM sont équivalents, car $OP = PM$, OP est commun et l'angle compris entre les deux côtés est rectangle. Les déficits angulaires des deux triangles sont les mêmes et on remarque que la somme des deux est plus petit que celui du triangle OML'. D'où on trouve l'inégalité

$$2\left(\frac{\pi}{2} - y - \widehat{PQO}\right) < \frac{\pi}{2} - z - y$$

Cette inégalité implique que $\frac{\pi}{2} - y + z < 2\widehat{PQO}$. De plus comme L' et M tendent vers O, il est de même pour P et Q et donc $\widehat{PQO}$ tend vers $\widehat{ML'O} = z$. L'inégalité se reécrit $\frac{\pi}{2} - y + z < 2z$. Ce qui implique que $\frac{\pi}{2} - y < z$. De plus le déficit angulaire dans la géométrie hyperbolique est > 0, ce qui implique pour le déficit angulaire du triangle $OL'M$ l'inégalité $z < \frac{\pi}{2} - y$. Donc on a bien que z tend vers $\frac{\pi}{2} - y$.
Donc on peut maintenant écrire le calcul en prenant la limite si OK tend vers 0. Montrons d'abord que le terme qu'on avait entre parenthèses vaut 0.

$$\frac{C(K'L', z)}{S(K'L', z)} S(OK', x) - \frac{C(K'L', z)}{S(K'L', z)} S(OK, x) = \frac{C(\frac{\pi}{2} - y)}{S(\frac{\pi}{2} - y)} S(x) - \frac{C(\frac{\pi}{2} - y)}{S(\frac{\pi}{2} - y)} S(x)$$

Ce terme vaut bien 0 et on trouve pour $x > y$ l'équation fonctionnelle voulue.

$$C(x + y) + C(x - y) = C(y)C(x) + C(y)C(x) = 2C(x)C(y)$$

Il faut le montrer encore si $x = y$ et $x+y < \frac{\pi}{2}$. Supposons que $x < \frac{\pi}{4}$, en effet le résultat devient le même, on a seulement que $\frac{ON}{OK'} = 1 = C(0) = C(x - x)$, car n et k coïncident. Les autres rapports ne changent pas. Donc en remplaçant y par x, on trouve $C(2x) + 1 = 2C(x)^2$.

Il nous faut encore le cas si $x \geq y$ et $x + y = \frac{\pi}{2}$. On utilise $X = \frac{2^n - 1}{2^n} x$ et $Y = \frac{2^n - 1}{2^n} y$. De plus $X \geq Y$ car $x \geq y$ et $X + Y < \frac{\pi}{2}$ car $\frac{2^n - 1}{2^n} < 1$ et $x + y = \frac{\pi}{2}$. D'où on peut utiliser pour X et Y ce qu'on a prouvé au-dessus.

$$C\left(\frac{2^n - 1}{2^n}(x + y)\right) = 2C\left(\frac{2^n - 1}{2^n} x\right) C\left(\frac{2^n - 1}{2^n} y\right) - C\left(\frac{2^n - 1}{2^n}(x - y)\right)$$

De plus si n tend vers ∞, $\frac{2^n - 1}{2^n}$ tend vers 1 et donc comme la fonction $C(x)$ est continue on a que

$$\lim_{n \to \infty} C\left(\frac{2^n - 1}{2^n} x\right) = C\left(\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} x\right) = C(x)$$

L'équation pour $x \geq y$ et $x+y = \frac{\pi}{2}$ devient $C(x+y) = 2C(x)C(y) - C(x-y)$. □

Le but de cette section est le théorème 5.1, qui nous exprime $C(x)$ et $S(x)$ à l'aide d'une fonction trigonométrique.

Théorème 5.1. *Soit* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, *alors* $C(x) = \cos(x)$ *et* $S(x) = \sin(x)$.

Démonstration. D'après la proposition 1.4, C est soit cos, soit cosh, car elle vérifie l'equation (1). De plus on a $C(x) \leq 1$, ce qui implique que C ne peut pas être cosh. Donc on doit prendre cos. On a que $C(0) = 1 = \cos(0)$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = C(\frac{\pi}{2})$ et alors d'après la proposition 1.1, on a que pour les entiers positifs n et $k \leq 2^n$

$$C\left(\frac{k}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{k}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

On avait vu que la fonction $C(x)$ est une fonction continue, de plus la fonction cos est aussi continue, donc on a pour tout x qui appartient au domaine de définition de $C(x)$ que $C(x) = \cos(x)$. Pour montrer que $S(x) = \sin(x)$ on va utiliser la proposition 5.2 et le fait que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

$$S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

□

6 Relation entre les éléments du triangle rectangle

Cette section consiste à construire l'angle de parallélisme. Pour arriver à ce résultat il faut énoncer un théorème important. A partir de maintenant on va se placer dans ABC un triangle rectangle en C avec $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{BAC} = \alpha$. Les fontions φ, ψ, C et S sont reprises dans la démonstration du théorème.

Théorème 6.1. *Soit* $h = \frac{1}{\operatorname{arccos}(\varphi(1))}$ *une constante alors*

$$\cosh\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\cosh\left(\frac{b}{h}\right) = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

Démonstration. On raisonne de nouveau à l'aide d'une figure. Soit ABC le triangle rectangle en C et prenons M un point sur le prolongement de AC, du côté de C. N est le point sur le prolongement de CB tel que la distance BB' avec B' sur le prolongement de AB et sur MN est strictement inférieure à celle de AB. Soit D sur le prolongement de AC tel que $\widehat{BB'D} = \beta = \widehat{ABC}$. On remarque que D est placé entre C et M, car l'angle $\widehat{MB'B}$ est supérieur à $\widehat{B'BN}$. Ce dernier vaut β, car son angle opposé au sommet B est ABC. On va placer A' sur AB tel que $A'B' = AB$ donc A' se trouve entre A et B. Soit maintenant C' sur $B'D$ tel que $B'A'C'$ vaut α. Par conséquent C' est compris entre B' et D. On appelle D' l'intersection de $A'C'$ avec BC. Puisque $AB = A'B'$, $\widehat{B'A'C'} = \alpha = \widehat{BAC}$ et $\widehat{A'B'C'} = \beta = \widehat{ABC}$, on a que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont équivalents et donc par conséquence $B'C' = BC = a$,

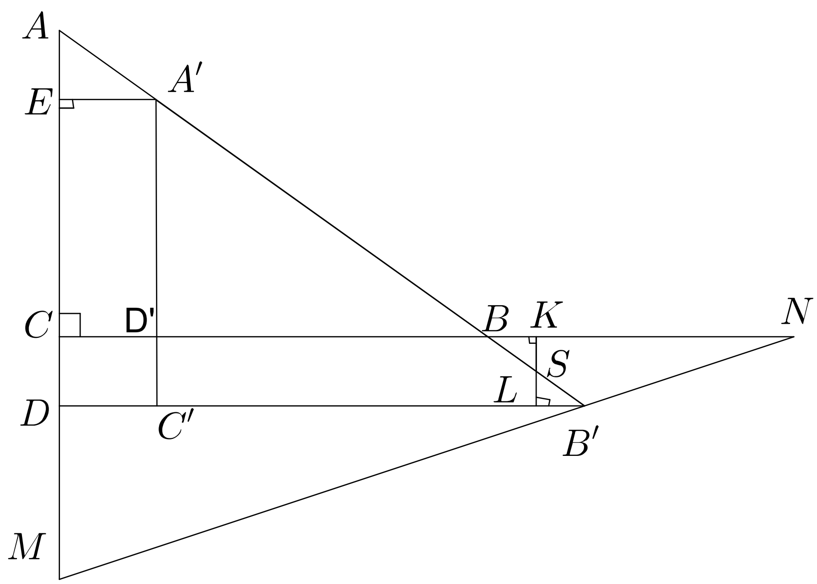


FIGURE 20 –

$A'C' = AC = b$ et $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$. Soit S le milieu de BB' et menons la perpendiculaire à BN avec K point d'intersection.

L est sur $B'C'$ tel que SL est perpendiculaire à $B'C'$. CNM est un angle aigu et puisque NBB' est aussi aigu, on a que K est placé entre B et N. De même pour L qui se trouve entre B' et C' car l'angle $BB'D$ est aigu. Puisque $BS = B'S$, $\widehat{SB'L} = \beta = \widehat{SBK}$ et $\widehat{BKS} = \frac{\pi}{2} = \widehat{B'LS}$, on a que les triangles KSB et LSB' sont équivalents. Donc $BK = B'L$, $SK = SL$ et les points K, S et L sont alignés. On voit d'après la figure 20 que $CKLD$ et $C'LKD'$ sont des quadrilatères trirectangles avec angle aigu en D et D' respectivement. On va maintenant encore construire le point E tel que $A'E$ est perpendiculaire à AC avec E qui appartient à la droite AC. Par conséquence de cette construction, E est compris entre A et C. Puisque $AC = A'C'$, on a que $AE+EC = A'D'+D'C'$. De plus $AE < A'D'$, car les angles CEA' et $D'CE$ sont rectangles et donc la distance la plus petite est EC. Or comme on avait cette égalité, il en suit que $D'C' < AE$. Discutons sur l'angle $EA'C'$. $\widehat{AA'E} + \widehat{EA'C'} + \widehat{C'A'B} = \pi$ et $\widehat{AA'E} + \widehat{C'A'B} = \widehat{AA'E} + \widehat{A'AE} < \frac{\pi}{2}$, car la somme des angles dans un triangle est inférieur à π. Or puisque le triangle $AA'E$ est rectangle, la somme des angles restantes est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Donc $\widehat{EA'C'} > \frac{\pi}{2}$, c'est à dire l'angle $EA'C'$ est obtu. Puisque cet angle est obtu et l'angle EDC' est aigu, alors on a $A'C' < ED$. De plus $AC = AE+EC$, $ED = EC+CD$ et $AC = A'C' < ED$, donc $AE+EC < EC+CD$ et par conséquent $AE < CD$. En résumant on a $D'C' < AE < CD$ et donc pour les rapports $\psi(KL, KD') = \frac{D'C'}{KL} < \frac{AE}{KL} < \frac{CD}{KL} = \psi(KL, LD)$. On veut exprimer $\frac{AE}{KL}$ à l'aide des fonctions S et C.

$$\frac{AE}{KL} = \frac{AE}{AA'} \cdot \frac{AA'}{KL}$$

On utilise que $AA' = AB + BA' = A'B' + BA' = BB' = 2BS$ et $KL = 2KS$, car S est le milieu de BB' et de KL.

$$\frac{AE}{KL} = \frac{AE}{AA'} \cdot \frac{BB'}{KL} = \frac{AE}{AA'} \cdot \frac{BS}{KS}$$

Dans le triangle AEA', on a $\frac{AE}{AA'} = C(AA', \alpha)$ et dans le triangle BKS le rapport $\frac{BS}{KS}$ vaut $\frac{1}{S(BS,\beta)}$. Et donc

$$\frac{AE}{AA'} = \frac{C(AA', \alpha)}{S(BS, \beta)}$$

De plus pour les autres rapports, on va utiliser la propostion 4.4 dans les quadrilatères $KLD'C'$ et $KLDC$

$$\frac{D'C'}{KL} = \psi(KL, KD') > \cosh\left(\frac{LC'}{h}\right)$$

$$\frac{CD}{KL} = \psi(KL, LD) < \cosh\left(\frac{LD}{h}\right)$$

De plus $LC' = B'C' - B'L = BC - BK$, $LD < B'D < BB' + BC + CD$ et $\cosh(x)$ est une fonction croissante de x. Donc on a

$$\frac{D'C'}{KL} = \psi(KL, KD') > \cosh\left(\frac{LC'}{h}\right) = \cosh\left(\frac{BC - BK}{h}\right)$$

$$\frac{CD}{KL} = \psi(KL, LD) < \cosh\left(\frac{LD}{h}\right) < \cosh\left(\frac{BB' + BC + CD}{h}\right)$$

Donc à l'aide de l'inégalité $\frac{D'C'}{KL} < \frac{AE}{KL} < \frac{CD}{KL}$, on trouve le résultat suivant

$$\cosh\left(\frac{BC - BK}{h}\right) < \frac{C(AA', \alpha)}{S(BS, \beta)} < \cosh\left(\frac{BB' + BC + CD}{h}\right)$$

Prenons la limite si CM tend vers 0, car alors B' tend vers B, A' vers A et D vers C. La distance BK tend vers 0, car S tend vers B. De plus $BC = a$, d'où l'inégalité implique que

$$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{C(\alpha)}{S(\beta)} = \cosh\left(\frac{a}{h}\right)$$

Il faut maintenant prouver que $\frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha)} = \cosh\left(\frac{b}{h}\right)$. On prend le triangle initial, on fait une symétrie orthogonale d'axe AC et une rotation d'angle π comme dans le figure 9. Puis on peut utiliser la formule qu'on a prouvé.

Donc

$$\frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\widehat{ABC})}{\sin(\widehat{BAC})} = \cosh\left(\frac{AC}{h}\right) = \cosh\left(\frac{b}{h}\right)$$

□

Ce théorème nous donne le résultat suivant

Corollaire 6.1.

$$\cosh\left(\frac{c}{h}\right) = \cot(\alpha)\cot(\beta)$$

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en C, on appelle $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{CBA}$. De plus $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. On a d'après le théorème 6.1 $\cosh\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}$ et $\cosh(\frac{b}{h}) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha)}$. Soit maintenant CD la hauteur du triangle et appliquons les formules au-dessus pour les triangles ACD et BCD. Par conséquent, on a les formules suivantes avec $\widehat{DCB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DCA}$

$$\cosh\left(\frac{CD}{h}\right) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\widehat{DCB})} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\widehat{ACD})}$$

$$\cosh\left(\frac{CD}{h}\right) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\widehat{ACD})}$$

$$\cosh\left(\frac{BD}{h}\right) = \frac{\cos(\widehat{DCB})}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\widehat{ACD})}{\sin(\beta)}$$

$$\cosh\left(\frac{AD}{h}\right) = \frac{\cos(\widehat{ACD})}{\sin(\alpha)}$$

De plus on a que $AB = AD + DB$ et on continue notre calcul

$$\cosh\left(\frac{AD+DB}{h}\right) = \cosh\left(\frac{AD}{h}\right)\cosh\left(\frac{DB}{h}\right) - \sinh\left(\frac{AD}{h}\right)\sinh\left(\frac{DB}{h}\right)$$

Donc en remplaçant les formules dans cette équation, il faut trouver

$$\cosh\left(\frac{c}{h}\right) = \cot(\alpha)\cot(\beta)$$

□

Remarque 6.1. *D'après ce corollaire on peut voir que*

$$\cosh\left(\frac{c}{h}\right) = \cosh\left(\frac{a}{h}\right) \cdot \cosh\left(\frac{b}{h}\right)$$

Finalement l'angle de parallélisme peut être défini. On se place de nouveau dans un triangle ABC rectangle en C. Si BC reste constant et AC devient de plus en plus grand, alors $\widehat{BAC}$ tend vers 0 et $\widehat{ABC}$ tend vers une limite qu'on appelle ω.

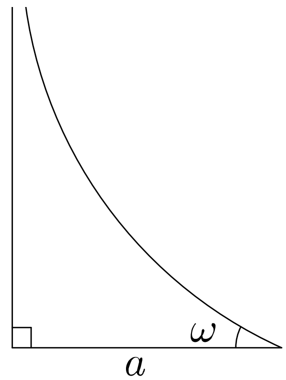


FIGURE 21 –

Définition 6.1. *Dans un triangle ABC rectangle en C, la limite de $\widehat{ABC}$ lorsque AC tend vers l'infini est appelée angle de parallélisme.*

Proposition 6.1. $\omega = 2\arctan(\mathrm{e}^{-\frac{a}{h}}) = \Pi(a)$

Démonstration. En effet d'après le théorème 6.1

$$\cosh\left(\frac{BC}{h}\right) = \frac{\cos 0}{\sin\omega} = \frac{1}{\sin\omega}$$

Donc en intégrant $\frac{1}{\cosh(\frac{a}{h})}$, on trouve

$$\int \frac{1}{\cosh(\frac{a}{h})} = \int \frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{a}{h}} + \mathrm{e}^{-\frac{a}{h}}} = \int \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{a}{h}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{2a}{h}}} = 2\arctan(\mathrm{e}^{-\frac{a}{h}})$$

Donc on trouve bien la fonction de Lobatchevsky $\Pi(a)$. □

L'angle ω qui vaut $\Pi(a)$ est appelé angle de parallélisme. Cet angle dépend de la mesure de a.

La formule suivante paraît dans [3].

Proposition 6.2. $\sinh(\frac{a}{h}) = \cot\Pi(a)$

Démonstration. cosh est exprimé en fonction de $\Pi(a)$ et en prenant $\sinh(\frac{a}{h}) > 0$

$$\sinh\left(\frac{a}{h}\right) = \sqrt{cosh^2\left(\frac{a}{h}\right) - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\Pi(a)} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\Pi(a) + \cos^2\Pi(a) - \sin^2\Pi(a)}{\sin^2\Pi(a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 \Pi(a)}{\sin^2 \Pi(a)}} = \sqrt{\cot^2 \Pi(a)} = \cot \Pi(a)$$

$\square$

Les formules de $\cosh(\frac{a}{h}) = \frac{1}{\sin \Pi(a)}$ et $\sinh(\frac{a}{h}) = \cot \Pi(a)$ déterminent les fonctions hyperboliques à l'aide de l'angle de parallélisme. A l'aide des fonctions φ, ψ, C et S, on est donc aboutit à notre but final.

Avec cette mesure de Lobatchevsky, la construction de quelques formules importantes se simlpifie [2]. Dans un triangle ABC rectangle en C, Lobatchevsky utilise la formule

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)$$

Ceci vient de la remarque 6.1. Dans un quadrilatère trirectangle $(p, q; r, s)$, soit δ l'angle aigu, alors

$$\cos \Pi(r) = \sin \Pi(p) \cos \pi(q)$$

$$\tan \delta = \frac{\tan \Pi(q)}{\cos \Pi(p)}$$

Dans tout ce mémoire on n'a pas utilisé qu'il existent des parallèles au sens de Lobatchevsky, mais si on admet l'existence d'un tel angle, alors c'est bien un angle de parallélisme qui est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, car sinon il existe un triangle où la somme des angles est supérieur ou égal à π.

Références

[1] S. Straszewicz, Sur la trigonométrie de Lobatchevsky, Annales Polonici Mathematici, volume 3, page 225-239, 1957

[2] Nobert A'Campo and Athanase Papadopoulos, Notes on non-Euclidean geometry, Strasbourg Master Class on Geometry, 2012

[3] Jos Merten, Die Möglichkeit mehrerer Geometrien, Imprimerie J. Schroell, Diekirch, 1913

[4] J.-E. Rombaldi, Equations fonctionnelles, Université Joseph Fourier Grenoble, `www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/245.pdf`

[5] Pierre Bornsztein et Moubinool Omarjee, Cours-Equations fonctionnelles, Stage olympique de Saint-Malo, 2003, `www.animath.fr/IMG/pdf/cours-eqfonc.pdf`

[6] L. Gérard, Sur la géométrie non-Euclidienne, Gauthier-Villards et fils, 1892