Mémoire de Mathématiques Fondamentales : Rack bigèbre et star produit associés aux algèbres de Leibniz

Charles Alexandre
sous la direction de Martin Bordermann

25 septembre 2014

Sommaire

Introduction

La notion d'algèbres de Lie est vieille de plus d'un siècle et s'est retrouvée dans de nombreuses d'applications, elle a donc beaucoup été enrichie par les mathématiciens.
Les premiers résultats importants, trouvés par Sophus Lie lui-même, sont ceux qui permettent de relier chaque algèbre de Lie à un groupe de Lie par la méthode d'intégration. Pour rappel, l'espace tangent à un groupe de Lie en l'élément neutre est une algèbre de Lie.
Un autre espace directement lié à chaque algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. Cet espace, formellement définie comme l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ quotienté par un certain idéal bilatère, est aussi muni d'une structure de cogèbre et possède des propriétés intéressantes comme la propriété universelle qui permet notamment de voir toute représentation de $\mathfrak{g}$ comme une représentation de l'algèbre associative $U(\mathfrak{g})$.
Enfin, un dernier développement plus récent autour des algèbres de Lie est celui trouvé dans le cadre de la quantification par déformation qui introduit le star-produit de Gutt $*$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{K})$. Cette opération, qu'on trouve notamment dans [5] et [6], peut se relier au groupe de Lie et à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.
En effet, en définissant ce qu'on appelera les fonctions polynômes comme $\hat{x_1} \cdots \hat{x_n}$ où $x_1, \cdots, x_1 \in \mathfrak{g}$ et $\hat{x_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{K})$ définie par $\hat{x_i}(\alpha) = \alpha(x_i)$; le star produit converge sur les fonctions polynômes et permet d'établir un isomorphisme entre $U(\mathfrak{g})$ et l'ensemble de ces fonctions polynômes.
De plus, sur les fonctions exponentielles $e^{\hat{x}}$, le star produit vérifie la relation $e^{\hat{x}} * e^{\hat{y}} = e^{\widehat{H(x,y)}}$ où H est le produit de Baker-Campbell-Hausdorff.

Les algèbres de Leibniz ont été introduites par J.-L. Loday (notamment dans [9]) dans le cadre de l'étude des groupes de cohomologie d'une algèbre de Lie. Il s'agit de l'analogue d'une algèbre de Lie sans l'antisymétrie ; concrètement, c'est un espace vectoriel $\mathfrak{h}$ muni d'un crochet vérifiant l'identité de Leibniz.

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g},\ [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Il est à noter d'une part, que le nom de Leibniz a été donné à cet espace par

Loday car cette identité ressemble à une identité de dérivation et d'autre part, qu'en ajoutant l'hypothèse d'antisymétrie, on retrouve l'identité de Jacobi et donc une algèbre de Lie.
Il est alors légitime de se demander si des structures équivalentes à celle qu'on trouve pour les algèbres de Lie existent. Aucune réponse définitive n'as été trouvée à ce jour.
Certaines réponses partielles existent tout de même au problème d'intégration des algèbres de Leibniz. Kinyon propose notamment dans [8] la structure de rack, il s'agit d'un espace muni d'une opération $\triangleright$ dont les éléments vérifient la propriété d'auto-distributivité par rapport à $\triangleright$:

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$$

Cependant, cette structure n'est pas l'analogue parfait des groupes de Lie car dans le cas où l'algèbre de Leibniz considéré est anti-symétrique, le rack correspondant n'est pas le groupe de Lie qu'on espère avoir.
De même, un équivalent au star produit des algèbres de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ a été développé par B.Dherin et F.Wagemann par des méthodes analytiques dans le preprint [3].

Le but de ce mémoire est de comprendre ce star produit algébriquement en construisant, pour les algèbres de Leibniz, une structure analogue aux algèbres enveloppantes. On définit donc une nouvelle structure qu'on appelle *rack bigèbre*. Il s'agit d'une cogèbre muni d'une opération $\triangleright$ avec la propriété de distributivité suivante (avec les notations de Sweedler) :

$$a \triangleright (b \triangleright c) = \sum_{(a)} (a^{(1)} \triangleright b) \triangleright (a^{(2)} \triangleright c)$$

Les deux résultats principaux de ce mémoire sont alors les suivants :
- Pour chaque algèbre de Leibniz $\mathfrak{h}$, on peut construire une rack bigèbre sur la cogèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$.
- Cette structure de rack bigèbre permet une expression explicite du star produit de Dherin-Wagemann plus simple que celui de Gutt.

Ces résultats sont aussi l'objet d'un preprint [1] dont la publication devrait précéder la soutenance de ce mémoire.

Ce mémoire est organisé comme suit : dans une première partie, on exposera les définitions et propriétés importantes des objets dont on se servira dans la suite, à savoir les algèbres de Lie et leur algèbre enveloppante, les algèbres de Leibniz, les cogèbres et les algèbres de Hopf ; dans la deuxième partie, on introduira la définition centrale de rack bigèbre et on expliquera comment munir l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{h})$ (avec $\mathfrak{h}$ une algèbre de Leibniz) d'une structure de rack bigèbre ; enfin, dans la troisième partie, on exposera le lien entre cette structure et le star produit de Dherin-Wagemann afin de trouver l'expression explicite de ce star produit à l'aide des fonctions exponentielles.

Chapitre 1

Prérequis

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0. (La plupart des propriétés sont encore valables dans un anneau)

1.1 Algèbres de Leibniz

Rappelons tout d'abord la définition d'une algèbre de Lie.

Définition 1.1. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une opération $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ qui est $\mathbb{K}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0 \tag{1.1}$$

Définition 1.2. *Une algèbre de Leibniz (à gauche) $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une opération $[.,.] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ qui est $\mathbb{K}$-bilinéaire et vérifiant l'identité de Leibniz (à gauche) :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{h}, [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \tag{1.2}$$

Les algèbres de Leibniz ont été introduites par J-L Loday dans [9] en tant qu'algèbre de Leibniz à droite, c'est-à-dire avec l'identité

$$\forall a, b, z \in \mathfrak{h}, [[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y]$$

Ces deux définitions sont symétriques et l'identité à gauche n'est ici privilégié que pour des raisons pratiques.

Dans cette définition, si le crochet est antisymétrique, il s'agit d'une algèbre de Lie car on peut facilement retrouver l'identité de Jacobi à partir de l'identité de Leibniz.

On définit également deux sous-ensembles d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{h}) &:= \Big\{x \in \mathfrak{h} \mid \exists\ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in K,\ \exists\ x_1, \ldots, x_N\ \in \mathfrak{h} \\ &\qquad\qquad \text{tels que } x = \sum_{r=1}^{N} \lambda_r [x_r, x_r]\Big\}, \qquad (1.3) \\ \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) &:= \Big\{x \in \mathfrak{h} \mid \forall\ y \in \mathfrak{h} :\ [x, y] = 0\Big\}. \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Ces deux ensembles sont des idéaux abéliens bilatères de $\mathfrak{h}$ avec $Q(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ et les algèbres de Leibniz quotient $\overline{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}/Q(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) := \mathfrak{h}/\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ sont en réalité des algèbres de Lie.
En fait, on peut facilement montrer que si $\mathfrak{z}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{h}$ contenant $Q(\mathfrak{h})$, le quotient $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ est une algèbre de Lie.

1.2 Algèbres de Hopf

Pour plus de détails sur les algèbres de Hopf, se reporter à [7]

1.2.1 Algèbres

Dans un premier temps, on va chercher à exprimer les propriétés d'une algèbre A associative et unitaire en termes d'applications linéaires.

La multiplication étant bilinéaire, par la propriété universelle du produit tensoriel, on peut la considérer comme une opération linéaire :

$$\mu := \begin{cases} A \otimes A & \longrightarrow & A \\ a \otimes b & \longmapsto & ab \end{cases}$$

L'associativité de A ($\forall\ a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$) peut alors s'écrire :

$$\mu \circ (\mu \otimes Id) = \mu \circ (Id \otimes \mu)$$

Pour traduire l'axiome d'unité, on introduit l'application unité :

$$\eta := \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & \lambda 1_A \end{cases}$$

L'axiome d'unité de A ($\forall a \in A, a.1_A = a = 1_A.a$) s'écrit alors :

$$\mu \circ (Id \otimes \eta) = Id = \mu \circ (\eta \otimes Id)$$

Ces considérations nous permettent d'établir une nouvelle définition d'algèbre :

Définition 1.3. *Une $\mathbb{K}$-algèbre est un triplet (A, μ, η) où A est un espace vectoriel et $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$, $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow A$ sont des applications vérifiant :*

$$\textbf{1}.\quad \mu \circ (\mu \otimes Id) = \mu \circ (Id \otimes \mu) \tag{1.5}$$

$$\textbf{2}.\quad \mu \circ (Id \otimes \eta) = Id = \mu \circ (\eta \otimes Id) \tag{1.6}$$

A cette définition, on peut rajouter la commutativité en introduisant l'application volte :

$$\tau := \left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes A & \longrightarrow & A \otimes A \\ a \otimes b & \longmapsto & b \otimes a \end{array} \right.$$

L'axiome de commutativité s'écrit alors $\mu \circ \tau = \mu$.

1.2.2 Cogèbres

A présent, il suffit de dualiser la nouvelle définition d'algèbre pour obtenir celle de cogèbre.

Définition 1.4. *Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un triplet (C, Δ, ϵ) où C est un espace vectoriel et $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ (comultiplication), $\epsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$ (counité) sont des applications vérifiant :*

$$\textbf{1}.\quad (\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.7}$$

$$\textbf{2}.\quad (Id \otimes \epsilon) \circ \Delta = Id = (\epsilon \otimes Id) \circ \Delta \tag{1.8}$$

Et de même, la cogèbre est dite cocommutative si $\tau \circ \Delta = \Delta$

La comultiplication d'un élément donne donc une somme de tenseurs, il est particulièrement utile de se servir de la notation de Sweedler pour le manipuler : $\Delta(a) = \sum_a a^{(1)} \otimes a^{(2)}$

Avec cette notation, l'axiome de coassociativité s'écrit alors :

$$\sum_a \sum_{a^{(1)}} (a^{(1)})^{(1)} \otimes (a^{(1)})^{(2)} \otimes a^{(2)} = \sum_a \sum_{a^{(2)}} a^{(1)} \otimes (a^{(2)})^{(1)} \otimes (a^{(2)})^{(2)} \tag{1.9}$$

La notation de Sweedler prend ici tout son intéret puisqu'à la place des expressions ci-dessus, on peut simplement écrire $\sum_x x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$.

De même, on peut écrire l'axiome de counité en utilisant cette notation :

$$\sum_a \epsilon(a^{(1)}) a^{(2)} = a = \sum_a a^{(1)} \epsilon(a^{(2)}) \tag{1.10}$$

Définition 1.5. *Une cogèbre (C, Δ, ϵ) est dite co-augmentée si il existe un élément $\mathbf{1} \in C$ vérifiant $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ et $\epsilon(\mathbf{1}) = 1_{\mathbb{K}}$ où $1_{\mathbb{K}}$ est l'unité de $\mathbb{K}$. On parle alors de la cogèbre co-augmentée $(C, \Delta, \epsilon, \mathbf{1})$.*

Il est dès à présent possible de définir des éléments particuliers des cogèbres co-augmentées : les éléments primitifs.

Définition 1.6. *Soit C une cogèbre. On dit que $a \in C$ est un élément primitif si $\Delta(a) = a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a$. L'ensemble des éléments primitifs d'une bigèbre est noté $Prim(C)$.*

1.2.3 Bigèbres

Définition 1.7. *Une bigèbre est un quintuplet $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ tel que :*

1. *(H, μ, η) est une algèbre.*
2. *(H, Δ, ϵ) est une cogèbre.*
3. *Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres unitaires ou, de manière équivalente, μ et η sont des morphismes de cogèbres.*

Remarque 1.1. *Une troisième façon équivalente de formuler la condition* **3** *de la définition précédente est de vérifier les conditions suivantes :*

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \tag{1.11}$$
$$\epsilon(1) = 1 \tag{1.12}$$
$$\epsilon \circ \mu = \epsilon \otimes \epsilon \tag{1.13}$$
$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta) \tag{1.14}$$

Le théorème suivant permet de construire des exemples de bigèbres très importantes pour la suite :

Théorème 1.1. *Soit V un espace vectoriel.*

1. *L'algèbre tensorielle $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ est munie d'une structure de bigèbre cocommutative définie uniquement par la formule :*
$$\forall v \in V, \Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$$
sur les générateurs.
2. *L'algèbre symétrique $S(V) = T(V)/ < v_1 v_2 - v_2 v_1 >$ est munie d'une structure de bigèbre cocommutative définie uniquement par la formule :*
$$\forall v \in V, \Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$$
sur les générateurs. Cette bigèbre devient alors commutative.

Remarque 1.2. *Dans la suite, la multiplication symétrique de $S(V)$ sera toujours noté $\bullet$.*

1.2.4 Définition et propriétés

Afin de définir ce qu'est une algèbre de Hopf, il est nécessaire de définir le produit de convolution algébrique. Celui-ci découle de la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit $A = (A, m, \eta)$ une algèbre et $C = (C, \Delta, \epsilon)$ une cogèbre. L'espace vectoriel $Hom(C, A)$ est munie d'une structure d'algèbre par l'opération suivante :*

$$\forall f, g \in Hom(C, A), f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \tag{1.15}$$

Ceci s'écrit aussi, avec la notation de Sweedler :

$$\forall f, g \in Hom(C, A), \forall a \in C, (f * g)(a) = \sum_a f(a^{(1)})g(a^{(2)}) \tag{1.16}$$

Ce produit est appellé produit de convolution et son élément neutre est $\eta \circ \epsilon$.

Il est maintenant possible de définir ce qu'est une algèbre de Hopf :

Définition 1.8. *Soit H une bigèbre. On dit que H est une algèbre de Hopf si Id_H possède un inverse dans l'algèbre de convolution $(Hom(H, H), *)$. L'unique inverse de Id_H est alors appelé antipode de H et est noté S. Avec les notations de Sweedler, on a donc :*

$$\sum_a S(a^{(1)})a^{(2)} = \epsilon(a)1 = \sum_a a^{(1)}S(a^{(2)}) \tag{1.17}$$

Proposition 1.2. *L'application S est un antimorphisme de bigèbre. Autrement dit :*

$$\mathbf{1}.\quad S(1) = 1 \tag{1.18}$$

$$\mathbf{2}.\quad \forall a, b \in H,\ S(ab) = S(b)S(a) \tag{1.19}$$

$$\mathbf{3}.\quad \epsilon \circ S = \epsilon \tag{1.20}$$

$$\mathbf{4}.\quad \Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta \tag{1.21}$$

Deux exemples importants d'algèbres de Hopf sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit V un espace vectoriel.*

1. *L'algèbre tensorielle $T(V)$ est une algèbre de Hopf d'antipode :*

$$\forall v_1, \cdots v_n \in V,\ S(v_1 \cdots v_n) = (-1)^n v_n \cdots v_1$$

2. *L'algèbre symétrique $S(V)$ est une algèbre de Hopf d'antipode :*

$$\forall v_1, \cdots, v_n \in V,\ \forall a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N},\ S(v_1^{a_1} \bullet \cdots \bullet v_n^{a_n}) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_n} v_1^{a_1} \bullet \cdots \bullet v_n^{a_n}$$

1.3 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

1.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.9. *L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est définie comme l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ quotientée par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $g_1 \otimes g_2 - g_2 \otimes g_1 - [g_1, g_2]$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$.*
On note l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.

Plusieurs propriétés de $U(\mathfrak{g})$ sont importantes dans la suite, commençons par citer la propriété universelle des algèbres enveloppantes :

Théorème 1.3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, A une algèbre associative unitaire et $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ un morphisme d'algèbre de Lie (A est considérée comme une algèbre de Lie en prenant comme crochet de Lie le commutateur). Alors il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\Psi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tel que $\Psi_{|\mathfrak{g}} = \psi$.*

Proposition 1.3. *$U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf cocommutative.*

On peut ensuite énoncer le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (ou PBW) qu'on retrouve en 3.3.4 de [9] et en V.2.5 de [7].

Proposition 1.4. *Soit $(g_i)_{i\in I}$ base de $\mathfrak{g}$ avec I ordonné. L'application suivante est un isomorphisme de cogèbre (et pas d'algèbre en général) :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & S(\mathfrak{g}) \\ g_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots g_{i_k}^{n_{i_k}} & \longmapsto & g_{i_1}^{n_{i_1}} \bullet \cdots \bullet g_{i_k}^{n_{i_k}} \end{array} \right.$$

Corollaire 1.1. *On a $Prim(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.*

1.3.2 Application de symétrisation

L'application de symétrisation ω (qu'on trouve notamment dans [4] de J.Dixmier) est définie par :

$$\omega := \left\{ \begin{array}{rcl} S(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ g_1 \bullet \cdots \bullet g_k & \longmapsto & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(k)} \end{array} \right. \tag{1.22}$$

Cette application est un isomorphisme de cogèbres cocommutatives.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit de manière naturelle sur $U(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$ respectivement de la manière suivante pour $g \in \mathfrak{g}$:

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}),\ ad_g(u) = gu - ug \tag{1.23}$$

$$\forall v = g_1 \bullet \cdots \bullet g_k \in S(\mathfrak{g}),\ ad^s_g(g_1 \bullet \cdots \bullet g_k) = \sum_{r=1}^{k} g_1 \bullet \cdots \bullet [g, g_r] \bullet \cdots \bullet g_k \tag{1.24}$$

L'application de symétrisation entrelace ces actions ([4] p.80 eqn (3)) :

Proposition 1.5. *Soit $v \in S(\mathfrak{g})$, alors pour tout $g \in \mathfrak{g}$ on a :*

$$ad_g(\omega(v)) = \omega(ad^s_g(v)) \tag{1.25}$$

Il est même possible de prolonger l'action de $\mathfrak{g}$ sur $U(\mathfrak{g})$ à une action de $U(\mathfrak{g})$ sur elle-même en posant avec la notation de Sweedler ([7] de Kassel) :

$$\forall u, v \in U(\mathfrak{g}),\ u.v = ad_u(v) := \sum_{(u)} u^{(1)} v S(u^{(2)}) \tag{1.26}$$

Les deux propriétés suivantes de cette action seront utilisés par la suite :

Proposition 1.6.

$$\forall u_1, u_2, v \in U(\mathfrak{g}),\ ad_{u_1} \circ ad_{u_2}(v) = ad_{u_1 u_2}(v) \tag{1.27}$$

$$\forall u, v_1, v_2 \in U(\mathfrak{g}),\ ad_u(v_1 v_2) = \sum_{(u)} ad_{u_{(1)}}(v_1) ad_{u_{(2)}}(v_2) \tag{1.28}$$

On peut aussi vérifier que cela s'écrit bien avec le ad_g de 1.23, pour $g_1 \cdots g_k \in U(\mathfrak{g})$:

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}),\ ad_{g_1 \cdots g_k}(u) = (ad_{g_1} \circ \cdots \circ ad_{g_k})(u) \tag{1.29}$$

Chapitre 2

Racks bigèbres et algèbres de Leibniz

2.1 Racks pointés

Définition 2.1. *Un rack pointé est un triplet $(X, \mathbf{1}, \triangleright)$ où X est un ensemble, $\mathbf{1}$ un élément de X et $\triangleright$ une opération de $X \times X$ dans X ; tels que :*

1. *Pour tout $a, b \in X$, il existe un unique $x \in X$ tel que $a \triangleright x = b$.*
2. *Pour tout $x \in X$, $\mathbf{1} \triangleright x = x$ et $x \triangleright \mathbf{1} = \mathbf{1}$.*
3. *Pour tout $x, y, z \in X$, $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$.*

Exemple 2.1. – *L'exemple trivial de rack pointé consiste à prendre un ensemble X non vide quelconque, un élément $\mathbf{1} \in X$ quelconque et de définir l'opération $\triangleright$ par :*

$$\forall x, y \in X,\ \ x \triangleright y = y \tag{2.1}$$

– *Soit $(G, .)$ un groupe, $\mathbf{1}$ l'élément neutre de G et $\triangleright$ l'opération définie par :*

$$\forall g, g' \in G,\ \ g \triangleright g^{'} = g.g'.g^{-1} \tag{2.2}$$

Alors $(G, \mathbf{1}, \triangleright)$ est un rack pointé. L'opération $\triangleright$ correspond à la conjugaison dans G et c'est en fait cet exemple qui a motivé la création de la structure de rack pointé.

C'est de cette structure de rack pointé que vient la définition de rack bigèbre qui suit. En effet, un lien analogue existe entre rack pointé et rack bigèbre d'une part, et groupe de Lie et algèbre enveloppante de l'algèbre de

Lie associée d'autre part. Ces liens ne seront pas traités dans ce mémoire, se reporter au preprint [3] pour plus de précisions.
On remarquera tout de même que sur toute algèbre de Leibniz réelle ou complexe, on trouve la structure de rack (encore une fois, il est conseillé de se reporter à [3]) par :

$$\forall x, y \in \mathfrak{h},\ x \blacktriangleright_\hbar y = e^{\hbar \mathrm{ad_x}}(y) \tag{2.3}$$

2.2 Rack bigèbre

Définition 2.2. *Une rack bigèbre est une cogèbre $(C, \Delta, \epsilon, \mathbf{1})$ coassociative, counitaire et coaugmentée sur $\mathbb{K}$ munie d'un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire de cogèbres $\mu : C \otimes C \to C$ noté $\mu(a \otimes b) = a \triangleright b$ tel que pour tout $a, b, c \in C$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \triangleright a &= a, & (2.4)\\ a \triangleright \mathbf{1} &= \epsilon(a)\mathbf{1}, & (2.5)\\ a \triangleright (b \triangleright c) &= \sum_{(a)} (a^{(1)} \triangleright b) \triangleright (a^{(2)} \triangleright c) & (2.6) \end{aligned}$$

Cette structure est cité implicitement dans [2] et dans [10].

Remarque 2.1. *Le fait que μ soit un morphisme de cogèbres se traduit, comme dans la partie sur les bigèbres, par la relation :*

$$\Delta \circ \triangleright \ = \ (\triangleright \otimes \triangleright) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta) \tag{2.7}$$

Exemple 2.2.
- *L'exemple trivial de cette nouvelle structure est obtenu en munissant une cogèbre $(C, \Delta, \epsilon, \mathbf{1})$ de l'opération*

$$\forall a, b \in C,\ a \triangleright_0 b := \epsilon(a)b \tag{2.8}$$

- *Un exemple plus intéressant se construit en prenant une algèbre de Hopf $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ cocommutative et en posant (comme en 1.26) :*

$$\forall h, h' \in H,\ h \triangleright h' := ad_h(h') = \sum_{(h)} h^{(1)} h' S(h^{(2)}) \tag{2.9}$$

Commençons par montrer que cela définit bien un morphisme de cogèbres (l'hypothèse de cocommutativité est indispensable ici).

Pour tout $h_1, h_2 \in H$ *:*

$$\begin{aligned}
\Delta(h_1 \triangleright h_2) &\overset{2.9}{=} \Delta(\sum_{(h_1)} h_1^{(1)} h_2 S(h_1^{(2)})) \\
&= \sum_{(h_1)} \Delta(h_1^{(1)})\Delta(h_2)\Delta(S(h_1^{(2)})) \\
&= \sum_{(h_1)}\sum_{(h_2)} (h_1^{(1)} \otimes h_1^{(2)})(h_2^{(1)} \otimes h_2^{(2)})(S(h_1^{(3)}) \otimes S(h_1^{(4)})) \\
&= \sum_{(h_1)}\sum_{(h_2)} h_1^{(1)} h_2^{(1)} S(h_1^{(3)}) \otimes h_1^{(2)} h_2^{(2)} S(h_1^{(4)}) \\
&= \sum_{(h_1)}\sum_{(h_2)} h_1^{(1)} h_2^{(1)} S(h_1^{(2)}) \otimes h_1^{(3)} h_2^{(2)} S(h_1^{(4)}) \\
&= (\triangleright \otimes \triangleright) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)(h_1 \otimes h_2)
\end{aligned}$$

Les deux premières propriétés de rack bigèbres sont vérifiées de manière évidente, reste à montrer la troisième. Pour tout $h_1, h_2, h_3 \in H$*, on a d'une part :*

$$\begin{aligned}
h_1 \triangleright (h_2 \triangleright h_3) &\overset{2.9}{=} ad_{h_1}(ad_{h_2}(h_3)) \\
&\overset{1.27}{=} ad_{h_1 h_2}(h_3)
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{(h_1)} (h_1^{(1)} \triangleright h_2) \triangleright (h_1^{(2)} \triangleright h_3) &\overset{2.9}{=} \sum_{(h_1)} ad_{h_1^{(1)} \triangleright h_2}(ad_{h_1^{(2)}}(h_3)) \\
&\overset{1.27}{=} \sum_{(h_1)} ad_{(h_1^{(1)} \triangleright h_2) h_1^{(2)}}(h_3)
\end{aligned}$$

On va montrer que $h_1 h_2 = \sum_{(h_1)} (h_1^{(1)} \triangleright h_2) h_1^{(2)}$ *:*

$$\begin{aligned}
\sum_{(h_1)} (h_1^{(1)} \triangleright h_2) h_1^{(2)} &\overset{2.9}{=} \sum_{(h_1)} h_1^{(1)} h_2 S(h_1^{(2)}) h_1^{(3)} \\
&\overset{1.17}{=} \sum_{(h_1)} h_1^{(1)} h_2 \epsilon(h_1^{(2)}) \\
&\overset{1.8}{=} h_1 h_2
\end{aligned}$$

Et ceci implique la troisième identité, on a ainsi fini de montrer qu'on a construit une rack bigèbre non triviale.

L'intéret porté à cette structure de rack bigèbre est justifié par la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soit* $(C, \Delta, \epsilon, \mathbf{1}, \triangleright)$ *un rack bigèbre sur* $\mathbb{K}$.

1. *Le* $\mathbb{K}$*-sous-module* $Prim(C)$ *des éléments primitifs de* C *est une sous-algèbre (avec la multiplication* μ *qu'on note* $\triangleright$*) vérifiant l'identité de Leibniz (à gauche) :*

$$\forall x, y, z \in Prim(C), x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright z + y \triangleright (x \triangleright z) \qquad (2.10)$$

2. *Plus généralement,* $Prim(C)$ *est stable par les* $\triangleright$*-multiplications à gauche.*

Démonstration: **2**. Soit $x \in Prim(C)$ et $a \in C$. Comme μ est un morphisme de cogèbres, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(a \triangleright x) &\overset{2.7}{=} \sum_{(a)(x)} (a^{(1)} \triangleright x^{(1)}) \otimes (a^{(2)} \triangleright x^{(2)}) \\
&= \sum_{(a)} (a^{(1)} \triangleright x) \otimes (a^{(2)} \triangleright \mathbf{1}) + \sum_{(a)} (a^{(1)} \triangleright \mathbf{1}) \otimes (a^{(2)} \triangleright x) \\
&\overset{2.5}{=} \sum_{(a)} \big((a^{(1)} \epsilon(a^{(2)})) \triangleright x\big) \otimes \mathbf{1} + \sum_{(a)} \mathbf{1} \otimes \big((\epsilon(a^{(1)}) a^{(2)}) \triangleright x\big) \\
&\overset{1.8}{=} (a \triangleright x) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (a \triangleright x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $a \triangleright x$ est bien primitif.

1. La partie **2**. montre déjà que $Prim(C)$ est une sous-algèbre.
Soient $x, y, z \in Prim(C)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
x \triangleright (y \triangleright z) &\overset{2.6}{=} \sum_{(x)} (x_{(1)} \triangleright y) \triangleright (x_{(2)} \triangleright z) \\
&= (x \triangleright y) \triangleright (\mathbf{1} \triangleright z) + (\mathbf{1} \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) \\
&\overset{2.4}{=} (x \triangleright y) \triangleright z + y \triangleright (x \triangleright z)
\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé l'identité de Leibniz à gauche. □

Ainsi, l'ensemble des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf $U(\mathfrak{g})$ est exactement l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de manière analogue, l'ensemble des éléments primitifs d'une rack bigèbre C est une algèbre de Leibniz. Il est donc légitime de se demander si, étant donné une algèbre de Leibniz $\mathfrak{h}$, il est possible de construire une rack bigèbre C telle que $Prim(C) = \mathfrak{h}$.

2.3 Une rack bigèbre pour chaque algèbre de Leibniz

Soit $(\mathfrak{h}, [,])$ une algèbre de Leibniz sur $\mathbb{K}$. Il sera question des idéaux bilatères abéliens $Q(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ définis en 1.3 et 1.4 dans la suite.

On commence par choisir $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$ un idéal bilatère tel que $Q(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Comme $Q(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{z}$, l'algèbre quotient $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ est une algèbre de Lie ; notons-la $\mathfrak{g}$ et notons $p : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ la projection naturelle.
Comme $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur $\mathfrak{h}$ de la manière suivante :

$$\forall a, b \in \mathfrak{h},\ p(x).y := [x, y] =: ad_x(y) \tag{2.11}$$

En effet, si $x, x' \in \mathfrak{h}$ sont tels que $p(x) = p(x')$, alors $x - x' \in \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ et donc $[x, y] = [x', y] + [x - x', y] = [x', y]$.
On peut donc écrire cette action $g.y$ pour $g \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{h}$ et considérer $\mathfrak{h}$ comme un $\mathfrak{g}$-module.

Considérons à présent la cogèbre co-augmentée $(S(\mathfrak{h}), \Delta, \epsilon, \mathbf{1})$; $S(\mathfrak{h})$ est même une algèbre de Hopf avec la multiplication $\bullet$ mais cet opérateur $\bullet$ n'est pas celui recherché, il nous faut définir l'opération $\triangleright$ appropriée.

L'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ induit une action de $\mathfrak{g}$ sur $S(\mathfrak{h})$ en prenant pour $g \in \mathfrak{g}$, l'analogue de 1.24 :

$$\forall x_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{h},\ ad^s_g(x_1 \bullet \cdots \bullet x_k) \ := \ \sum_{r=1}^{k} x_1 \bullet \cdots \bullet (g.x_r) \bullet \cdots \bullet x_k \tag{2.12}$$

Il est facile de vérifier que ad^s_g est une dérivation de l'algèbre commutative $S(\mathfrak{h})$ et que $g \mapsto ad^s_g$ est une représentation de l'algèbre de Lie. Montrons le lemme suivant qui nous servira plus tard :

Lemme 2.1.

$$\forall g \in \mathfrak{g},\ \forall v \in S(\mathfrak{h}),\ \Delta(g.v) = \sum_{(v)} (g.v^{(1)} \otimes v^{(2)} + v^{(1)} \otimes g.v^{(2)}) \tag{2.13}$$

Démonstration: En notant $v = x_1 \bullet \cdots \bullet x_k$, la démonstration se fait par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$, alors $v = \lambda\mathbf{1}$ et il est évident que les deux côtés de l'égalité sont égaux à $\lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$.
- Si $k = 1$, alors $v = x \in \mathfrak{h}$ et on a (rappelons que $g.\mathbf{1} = 0$) :

$$\begin{aligned}
\Delta(g.x) \quad &= \quad \sum_{(g.x)} (g.x)^{(1)} \otimes (g.x)^{(2)} \\
&\overset{g.x \in \mathfrak{h}}{=} \quad g.x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes g.x \\
&= \quad \sum_{(x)} (g.x^{(1)} \otimes x^{(2)} + x^{(1)} \otimes g.x^{(2)})
\end{aligned}$$

L'égalité est bien vérifiée pour $k = 1$.

– Supposons l'égalité vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $v' = x_1 \bullet \cdots \bullet x_k \bullet x = v \bullet x$, alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(g.(v \bullet x)) &\overset{2.12}{=} \Delta((g.v) \bullet x + v \bullet (g.x)) \\
&= \Delta(g.v) \bullet \Delta(x) + \Delta(v) \bullet \Delta(g.x)) \\
&\overset{rec}{=} \sum_{(v)} \big((g.v^{(1)} \otimes v^{(2)} + v^{(1)} \otimes g.v^{(2)}) \bullet (x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\
&\qquad + (v^{(1)} \otimes v^{(2)}) \bullet (g.x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes g.x)\big) \\
&= \sum_{(v)} \big((g.v^{(1)}) \bullet x \otimes v^{(2)} + g.v^{(1)} \otimes v^{(2)} \bullet x + v^{(1)} \bullet x \otimes g.v^{(2)} \\
&\quad + v^{(1)} \otimes (g.v^{(2)}) \bullet x + v^{(1)} \bullet (g.x) \otimes v^{(2)} + v^{(1)} \otimes v^{(2)} \bullet (g.x)\big) \\
&= \sum_{(v)} \big(g.(v^{(1)} \bullet x) \otimes v^{(2)} + g.v^{(1)} \otimes v^{(2)} \bullet x \\
&\qquad + v^{(1)} \otimes g.(v^{(2)} \bullet x) + v^{(1)} \bullet x \otimes g.v^{(2)}\big) \\
&= \sum_{(v')} (g.v'^{(1)} \otimes v'^{(2)} + v'^{(1)} \otimes g.v'^{(2)})
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que :

$$\Delta(v \bullet x) = v^{(1)} \bullet x \otimes v^{(2)} + v^{(1)} \otimes v^{(2)} \bullet x$$

Et on a ainsi démontré le lemme.

□

Comme $S(\mathfrak{h})$ est un $\mathfrak{g}$-module on peut le considérer comme un $U(\mathfrak{g})$-module en définissant pour tout $g_1, \cdots, g_k \in \mathfrak{g}$:

$$\forall v \in S(\mathfrak{h}),\ (g_1 \cdots g_k).v \ := \ g_1.(g_2.(\cdots g_k.v) \cdots) \tag{2.14}$$

Lemme 2.2.

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}),\ \forall v \in S(\mathfrak{h}),\ \Delta(u.v) = \sum_{(u)(v)} u^{(1)}.v^{(1)} \otimes u^{(2)}.v^{(2)} \tag{2.15}$$

Démonstration: Cette démonstration se fait aussi par récurrence mais cette fois ci sur le nombre de termes dans u. Le lemme précedent est donc l'initialisation et la récurrence est évidente. □

L'application linéaire $p : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ induit un unique morphisme d'algèbre de Hopf de $S(\mathfrak{h})$ dans $S(\mathfrak{g})$ de la manière suivante (ce morphisme étant bien définie par liberté de $S(\mathfrak{h})$) :

$$\tilde{\Phi} := \left\{ \begin{array}{rcl} S(\mathfrak{h}) & \longrightarrow & S(\mathfrak{g}) \\ x_1 \bullet \cdots \bullet x_k & \longmapsto & p(x_1) \bullet \cdots \bullet p(x_k) \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Il est maintenant possible de définir une application $\mathbb{K}$-linéaire $\Phi : S(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ comme la composée

$$\Phi := \omega \circ \tilde{\Phi} \tag{2.17}$$

Proposition 2.2. *L'application Φ ainsi définie entrelace l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})$ (définie en 2.14) et sur lui-même (définie en 1.26). Autrement dit, pour tout $u \in U(\mathfrak{g})$ et tout $v \in S(\mathfrak{h})$:*

$$\Phi(u.v) \;=\; \sum_{(u)} u^{(1)} \Phi(v) S(u^{(2)}) \tag{2.18}$$

Démonstration: En reprenant sa définition, on voit facilement que $\tilde{\Phi}$ entrelace l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})$ et l'action, noté ad^s, de $U(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g})$.
De plus, on a vu en 1.25 que ω entrelace cette action ad^s et l'action adjointe de $U(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$ de 1.26 ; donc on a bien la relation d'entrelacement de Φ. $\square$

Tout ce qui précède permet à présent de construire la rack bigèbre voulue :

Théorème 2.1. *Soit la cogèbre $(S(\mathfrak{h}), \Delta, \epsilon, \mathbf{1})$. Soit le morphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\mu : S(\mathfrak{h}) \otimes S(\mathfrak{h}) \to S(\mathfrak{h})$ défini pour tout $u, v \in S(\mathfrak{h})$ par :*

$$\mu(u \otimes v) \;:=\; \Phi(u).v \;=:\; u \triangleright v \tag{2.19}$$

Alors $(S(\mathfrak{h}), \Delta, \epsilon, \mathbf{1}, \triangleright)$ est une rack bigèbre.

Démonstration: Ce qui précède montre que Φ est un morphisme de cogèbres co-unitaires, cela servira largement dans cette démonstration, notamment dans la première partie où on montre que μ est un morphisme de cogèbres.
Pour tout $u, v \in S(\mathfrak{h})$:

$$\begin{aligned}
\Delta(u \triangleright v) &\overset{2.19}{=} \Delta(\Phi(u).v) \\
&\overset{2.15}{=} \sum_{(\Phi(u))(v)} \big(\Phi(u)^{(1)}.v^{(1)}\big) \otimes \big(\Phi(u)^{(2)}.v^{(2)}\big) \\
&= \sum_{(u)(v)} \big(\Phi(u^{(1)}).v^{(1)}\big) \otimes \big(\Phi(u^{(2)}).v^{(2)}\big) \\
&\overset{2.19}{=} \sum_{(u)(v)} (u^{(1)} \triangleright v^{(1)}) \otimes (u^{(2)} \triangleright v^{(2)})
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $u \in S(\mathfrak{h})$:

$$1_{S(\mathfrak{h})} \triangleright u \overset{2.19}{=} \Phi(1_{S(\mathfrak{h})}).u = u$$

Et en reprenant l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur l'élément neutre de $S(\mathfrak{h})$, pour tout $u \in S(\mathfrak{h})$:

$$u \triangleright 1_{S(\mathfrak{h})} \overset{2.19}{=} \Phi(u).1_{S(\mathfrak{h})} = \epsilon(\Phi(u)).1_{S(\mathfrak{h})} = \epsilon(u)1_{S(\mathfrak{h})}$$

Reste à montre la dernière identité. Pour tout $u, v, w \in S(\mathfrak{h})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{(u)}(u^{(1)} \triangleright v) \triangleright (u^{(2)} \triangleright w) &\overset{2.19}{=} \sum_{(u)}(\Phi(u^{(1)}).v) \triangleright (\Phi(u^{(2)}).w) \\
&\overset{2.19}{=} \sum_{(u)} \Phi(\Phi(u^{(1)}).v).(\Phi(u^{(2)}).w) \\
&= \sum_{(u)} \big(\Phi(\Phi(u^{(1)}).v)\Phi(u^{(2)})\big).w \\
&\overset{2.18}{=} \sum_{(u)} \Big(\sum_{(u^{(1)})} (\Phi(u^{(1)})^{(1)} v S(\Phi(u^{(1)})^{(2)}))\Phi(u^{(2)})\Big).w \\
&\overset{1.9}{=} \sum_{(u)} \big(\Phi(u)^{(1)} v S(\Phi(u)^{(2)})\Phi(u)^{(3)}\big).w \\
&\overset{1.17}{=} \sum_{(u)} \big(\Phi(u)^{(1)} v \epsilon(\Phi(u)^{(2)})\big).w \\
&\overset{1.8}{=} (\Phi(u)\Phi(v)).w \\
&= \Phi(u).(\Phi(v).w) \\
&\overset{2.19}{=} u \triangleright (v \triangleright w)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.3. *L'opération $\triangleright$ de ce théorème s'écrit explicitement, pour tout $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l \in \mathfrak{h}$:*

$$\big(x_1 \bullet \cdots \bullet x_k\big) \triangleright \big(y_1 \bullet \cdots \bullet y_l\big) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \big(\mathrm{ad}^s_{x_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}^s_{x_{\sigma(k)}}\big)\big(y_1 \bullet \cdots \bullet y_l\big) \tag{2.20}$$

Démonstration: Déjà, en reprenant les définitions des applications, si $x_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1 \bullet \cdots \bullet x_k) &\overset{2.17}{=} \omega \circ \tilde{\Phi}(x_1 \bullet \cdots \bullet x_k) \\
&\overset{2.16}{=} \omega(p(x_1) \bullet \cdots \bullet p(x_k)) \\
&\overset{1.22}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} p(x_{\sigma(1)}) \cdots p(x_{\sigma(k)})
\end{aligned}$$

Et alors, il est évident avec la définition de l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})$ que la formule obtenue pour l'opération $\triangleright$ est celle annoncée. $\square$

Chapitre 3

Lien avec le star produit associé à une algèbre de Leibniz

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

3.1 Contexte

Dans l'article [3] de B.Dherin et F.Wagemann, un star produit sur $\mathfrak{h}^*$ ayant des propriétés de rack est construit par des méthodes analytiques. Le but de cette partie sera de relier ce star-produit à l'opération $\triangleright$ de $S(\mathfrak{h})$ de la partie précedente afin d'en établir une formule explicite.

En général, sur un espace de fonctions quelconque (l'espace de départ doit tout de même contenir un élément neutre), on peut définir un star produit trivial par :

$$f \triangleright_0 g = f(0)g$$

Cette opération est associative mais pas unitaire.

Plaçons-nous maintenant dans l'espace voulu. Soit $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Leibniz réelle de dimension finie n et $\mathfrak{h}^*$ son espace dual. On notera x, y, z les éléments de $\mathfrak{h}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ les éléments de $\mathfrak{h}^*$.

Quand on définit un star produit sur un espace de fonctions, on définit en fait une 'déformation' de cette opération triviale. Concrètement, le star produit Dherin-Wagemann est un opérateur bidifférentiel défini sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ sous la forme ($\hbar$ étant un paramètre formel) :

$$\big(f \triangleright_\hbar g\big)(\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r \mathcal{C}_r(f, g)(\alpha) \text{ avec} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{C}_r(f,g)(\alpha) \quad = \quad \sum_{k,l=0}^{N_r} \sum_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l=1}^{n} C_{r,k,l}^{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_l}(\alpha)\frac{\partial^k f}{\partial\alpha_{i_1}\cdots\partial\alpha_{i_k}}(0)\frac{\partial^l g}{\partial\alpha_{j_1}\cdots\partial\alpha_{j_l}}(\alpha) \tag{3.2}$$

Cependant, avec la formule ci-dessus, $f \triangleright_\hbar g$ n'est qu'une série formelle qui ne converge pas en général, c'est donc un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})[[\hbar]]$ et pas nécessairement de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})$.
On pose, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'opération $\triangleright_r$ définie pour $f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})$ par :

$$\big(f \triangleright_\hbar g\big)(\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r (f \triangleright_r g)(\alpha) \tag{3.3}$$

Ceci nous permet de définir un opérateur $\mathbb{K}[[\hbar]]$-bilinéaire noté $\triangleright_{DW}$ (pour Dherin et Wagemann) définie pour tout $f = \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r\hbar^r$, $g = \sum_{r\in\mathbb{N}} g_r\hbar^r$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})[[\hbar]]$ par :

$$\big(f \triangleright_{DW} g\big)(\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r \sum_{\substack{a,b,c=0\\a+b+c=r}}^{r} (f_a \triangleright_b g_c)(\alpha) \tag{3.4}$$

Cet opérateur est maintenant une application $\mathbb{K}[[\hbar]]$-bilinéaire bien définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})[[\hbar]]$ et détermine entièrement l'opérateur $\triangleright_\hbar$. Dans la suite, on utilisera seulement l'opérateur $\triangleright_\hbar$.

Les fonctions $C_{r,k,l}^{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_l}$ de 3.2 définissent alors entièrement le star produit.De plus, elles sont symétriques sur $(i_1,\cdots,i_k)$ d'une part, et $(j_1,\cdots,j_l)$ d'autre part. Autrement dit :

$$\forall \sigma \in S_k,\ \forall \tau \in S_l,\ C_{r,k,l}^{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_l} = C_{r,k,l}^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(k)},j_{\tau(1)}\cdots j_{\tau(l)}} \tag{3.5}$$

On va maintenant montrer qu'il suffit de connaître le star produit sur des fonctions particulières, les fonctions exponentielles, pour le connaître entièrement.

Pour cela, on commence par définir, pour tout $x \in \mathfrak{h}$ une fonction linéaire $\hat{x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*,\mathbb{K})$ par :

$$\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*,\ \hat{x}(\alpha) := \alpha(x) \tag{3.6}$$

Puis, on définit les fonctions exponentielles $e^{\hat{x}}$ par :

$$\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*,\ e^{\hat{x}}(\alpha) := e^{\alpha(x)} = e^{\hat{x}(\alpha)} \tag{3.7}$$

Dans le cas où les fonctions f et g sont les fonctions exponentielles qu'on vient de définir, les dérivées partielles sont très simples à calculer. Cela donne, pour $x, y \in \mathfrak{h}$:

$$\mathcal{C}_r(e^{\hat{x}}, e^{\hat{y}})(\alpha)e^{-\hat{y}}(\alpha) = \sum_{k,l=0}^{N_r} \sum_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l=1}^{n} C_{r,k,l}^{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_l}(\alpha)x_{i_1}\cdots x_{i_k}y_{j_1}\cdots y_{j_l}$$

En utilisant alors le lemme de polarisation pour les applications multilinéaires symétriques en caractéristique 0 (voir [11]), on voit qu'on peut calculer les $C_{r,k,l}^{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_l}$ si on connait le star produit sur les exponentiels.

3.2 Définition du star produit

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathfrak{h}$ et $e^1, \ldots, e^n$ la base duale de $\mathfrak{h}^*$. On note c_{jk}^i des constantes de structure de la loi [,], i.e.

$$c_{jk}^i := e^i\big([e_j, e_k]\big) \tag{3.8}$$

quels que soient les entiers $1 \leq i, j, k \leq n$. Par rapport à la base $e^1, \ldots, e^n$ soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées naturelles sur $\mathfrak{h}^*$. Pour tout élément $x \in \mathfrak{h}$, on définit l'opérateur différentiel de premier ordre suivant pour toute fonction $f : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$(\widetilde{ad}_x(f))(\alpha) = \sum_{j,k,i=1}^{n} \alpha_k c_{ij}^k x_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha). \tag{3.9}$$

En particulier, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$(\widetilde{ad}_{e_i}(f))(\alpha) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha). \tag{3.10}$$

Enfin, on définit le star produit suivant pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ (où $\hbar$ est un paramètre formel) :

$$\big(f \triangleright_\hbar g\big)(\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hbar^r}{r!} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial \alpha_{i_1}\cdots\partial\alpha_{i_r}}(0)\big((\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_1}} \circ \cdots \circ \widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_r}})(g)\big)(\alpha). \tag{3.11}$$

3.3 Lien avec la rack bigèbre $S(\mathfrak{h})$

Le but est donc de relier ce star-produit à la multiplication $\triangleright$ de la rack bigèbre $S(\mathfrak{h})$ exposé dans la partie précédente.

Notons $\psi : \mathfrak{h} \to \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ l'application qui, à un élément x de $\mathfrak{h}$ associe l'application $\hat{x}$. Par liberté de $S(\mathfrak{h})$, cette application se prolonge de manière unique en un morphisme injectif d'algèbres Ψ :

$$\Psi := \left\{ \begin{array}{rcl} S(\mathfrak{h}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K}) \\ x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(k)} & \longmapsto & \hat{x_{(1)}} \cdots \hat{x_{(k)}} \end{array} \right. \tag{3.12}$$

C'est ce morphisme Ψ qui fait le lien entre le star-produit et la multiplication $\triangleright$ de $S(\mathfrak{h})$. On va donc s'y intéresser plus en détail.

Proposition 3.1. *L'application Ψ entrelace l'opérateur différentiel défini sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ et l'action de $\mathfrak{h}$ sur $S(\mathfrak{h})$ (définie comme en 1.24). Autrement dit, pour tout $a \in S(\mathfrak{h})$ et tout entier $1 \le i \le n$:*

$$\widetilde{ad}_{e_i}\big(\Psi(a)\big) = \Psi\Big(\mathrm{ad}^s_{e_i}(a)\Big) \tag{3.13}$$

Démonstration: La démonstration repose principalement sur le fait que les actions $\widetilde{ad}_{e_i}$ et $\mathrm{ad}^s_{e_i}$ sont des dérivations respectivement sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$ et $S(\mathfrak{h})$. On rappelle qu'une dérivation D sur un espace A vérifie, pour tout $a, b \in A$:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{3.14}$$

Il suffit de montrer la formule sur les générateurs de $S(\mathfrak{h})$, c'est-à-dire sur les éléments de la forme $a = x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(k)}$ où $x_{(1)}, \cdots, x_{(k)}$ sont dans $\mathfrak{h}$ et k est dans $\mathbb{N}$. La démonstration se fera par récurrence sur ce $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$, alors $a = \lambda 1$. Or Ψ envoie l'élément neutre de $S(\mathfrak{h})$ sur l'élément neutre de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$; et les actions $\widetilde{ad}_{e_i}$ et $\mathrm{ad}^s_{e_i}$ sont des dérivations, donc s'annulent sur l'élément neutre. Donc les deux côtés de la formules sont nuls.
- Si $k = 1$, alors $a = x \in \mathfrak{h}$ et on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{ad}_{e_i}(\Psi(x))(\alpha) &\overset{3.12}{=} \widetilde{ad}_{e_i}(\hat{x})(\alpha) \\ &\overset{3.10}{=} \sum_{j,k} \alpha_k c^k_{ij} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial \alpha_j}(\alpha) \\ &= \sum_{j,k} \alpha_k c^k_{ij} x_j \\ &\overset{3.8}{=} \alpha([e_i, x]) \\ &\overset{3.6}{=} \widehat{[e_i, x]}(\alpha) \\ &\overset{2.11}{=} \Psi(ad_{e_i}(x))(\alpha) \end{aligned}$$

Par définition, $ad^s_{e_i} = ad_{e_i}$ sur $\mathfrak{h}$ donc la formule est vérifiée pour $k = 1$.

– Supposons la formule vraie pour tout $0 \leq i \leq k$.
Soit $a = x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(k+1)} = a_{(k)} \bullet x_{(k+1)}$. Comme les actions sont des dérivations, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{ad}_{e_i}(\Psi(a_{(k)} \bullet x_{(k+1)})) &= \widetilde{ad}_{e_i}(\Psi(a_{(k)})\Psi(x_{(k+1)})) \\
&\overset{3.14}{=} \widetilde{ad}_{e_i}(\Psi(a_{(k)}))\Psi(x_{(k+1)}) + \Psi(a_{(k)})\widetilde{ad}_{e_i}(\Psi(x_{(k+1)})) \\
&\overset{rec}{=} \Psi(ad^s_{e_i}(a_{(k)}))\Psi(x_{(k+1)}) + \Psi(a_{(k)})\Psi(ad^s_{e_i}(x_{(k+1)})) \\
&= \Psi(ad^s_{e_i}(a_{(k)}) \bullet x_{(k+1)} + a_{(k)} \bullet ad^s_{e_i}(x_{(k+1)})) \\
&\overset{3.14}{=} \Psi(ad^s_{e_i}(a_{(k)} \bullet x_{(k+1)}))
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vérifiée pour $a = x_1 \bullet \cdots \bullet x_{k+1} = a_k \bullet x_{k+1}$.
Finalement, la formule d'entrelacement est vérifiée sur tous les générateurs de $S(\mathfrak{h})$ et donc, sur tout $S(\mathfrak{h})$. □

Il est maintenant possible d'énoncé le théorème voulu :

Théorème 3.1. *Pour tout $x_{(1)}, \cdots, x_{(r)} \in \mathfrak{h}, y \in S(\mathfrak{h})$, la relation suivante est vérifiée :*

$$\Psi(x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(r)}) \rhd_\hbar \Psi(y) \;=\; \hbar^r \Psi(x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(r)} \rhd y)$$

Démonstration: Le côté gauche de l'égalité s'écrit :

$$\Psi(x_{(1)}\bullet\cdots\bullet x_{(r)}) \rhd_\hbar \Psi(y) \overset{3.11}{=} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\hbar^s}{s!} \sum_{i_1,\ldots,i_s=1}^{n} \frac{\partial^s(\widehat{x_{(1)}} \cdots \widehat{x_{(r)}})}{\partial\alpha_{i_1}\cdots\partial\alpha_{i_s}}(0)\big((\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_1}} \circ\cdots\circ \widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_s}})(\Psi(y))\big)$$

Avant de continuer le calcul, intéressons nous à la partie $L := \frac{\partial^s(\widehat{x_{(1)}}\cdots\widehat{x_{(r)}})}{\partial\alpha_{i_1}\cdots\partial\alpha_{i_s}}(0)$ de cette expression. Trois configurations se présentent suivant la valeur de s dans la somme :

– Si $s > r$, la formule de Leibniz sur les dérivées permet de dire qu'aucun terme ne survit à la dérivation donc $L = 0$ dans ce cas.
– Si $s < r$, cette même formule montre que chaque terme de la dérivation dans L contient encore au moins un $\hat{x_i}$. Et comme il y a évaluation en 0, $D = 0$ dans ce cas aussi.
– Enfin, si $s = r$, L est non nul et on peut véritablement appliquer la formule de Leibniz :

$$L = \sum_{\sigma \in S_r} x_{(\sigma(1))_{i_1}} \cdots x_{(\sigma(r))_{i_r}}$$

Et on se sert de la propriété précédente pour transformer $(\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_1}} \circ\cdots\circ \widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_s}})(\Psi(y))$.
Ainsi, le côté gauche de l'égalité s'écrit maintenant :

$$\Psi(x_{(1)}\bullet\cdots\bullet x_{(r)}) \rhd_\hbar \Psi(y) = \frac{\hbar^r}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} x_{(\sigma(1))_{i_1}} \cdots x_{(\sigma(r))_{i_r}} \Psi(\mathrm{ad}^s_{e_{i_1}} \circ\cdots\circ \mathrm{ad}^s_{e_{i_r}}(y))$$

Il est possible de rentrer les $x_{(\sigma(j))_{i_j}}$ dans Ψ et il faut alors remarquer que pour tout $1 \leq j \leq r$:

$$\sum_{i_j=1}^{n} x_{(\sigma(j))_{i_j}} e_{i_j} = x_{(\sigma(j))}$$

En effet, ceci permet de terminer le calcul :

$$\begin{aligned}
\Psi(x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(r)}) \rhd_{\hbar} \Psi(y) &= \frac{\hbar^r}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \Psi(\mathrm{ad}^s_{x_{(\sigma(1))}} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}^s_{x_{(\sigma(r))}}(y)) \\
&= \hbar^r \Psi(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{ad}^s_{x_{(\sigma(1))}} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}^s_{x_{(\sigma(r))}}(y)) \\
&\overset{2.19}{=} \hbar^r \Psi(x_{(1)} \bullet \cdots \bullet x_{(r)} \rhd y)
\end{aligned}$$

□

3.4 Le star-produit sur les fonctions exponentielles

On sait déjà que les fonctions exponentielles permettent de déterminer entièrement le star-produit.
La proposition suivante permet de calculer $e^{\hat{x}} \rhd_{\hbar} e^{\hat{y}}$:

Proposition 3.2. *Pour tout $x, y \in \mathfrak{h}$:*

$$e^{\hat{x}} \rhd_{\hbar} e^{\hat{y}} = e^{\widehat{x \blacktriangleright_{\hbar} y}} \tag{3.15}$$

où $\blacktriangleright_{\hbar}$: $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ désigne la multiplication de rack sur $\mathfrak{h}$ (voir [3]) définie en 2.3.

Démonstration: Commençons le calcul pour $\alpha \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{h}^*, \mathbb{K})$:

$$e^{\hat{x}} \rhd_{\hbar} e^{\hat{y}}(\alpha) \overset{3.11}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hbar}{r!} \sum_{i_1, \cdots, i_r}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_r} \big(\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_1}} \circ \cdots \circ \widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_r}}(e^{\hat{y}})\big)(\alpha)$$

Avec les définitions de $\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_1}}$ et $\widetilde{\mathrm{ad}}_x$, il est clair que l'égalité suivante est vraie pour tout i_s :

$$\sum_{i_s=1}^{n} x_{i_s} (\widetilde{\mathrm{ad}}_{e_{i_s}}(e^{\hat{y}}))(\alpha) \overset{3.9 et 3.10}{=} \widetilde{\mathrm{ad}}_x(e^{\hat{y}}))(\alpha)$$

L'égalité devient donc :

$$\begin{aligned} e^{\hat{x}} \triangleright_\hbar e^{\hat{y}}(\alpha) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hbar}{r!} \widetilde{\mathrm{ad}}_x \circ \cdots \circ \widetilde{\mathrm{ad}}_x((e^{\hat{y}}))(\alpha) \\ &= e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(e^{\hat{y}})(\alpha) \end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\mathrm{ad}}_x$ est une dérivation, on va maintenant montrer que pour toute dérivation D, $e^{\hbar D}(fg) = e^{\hbar D}(f)e^{\hbar D}(g)$ et donc que $e^{\hbar D}$ est un morphisme d'algèbres associatives :

$$\begin{aligned} e^{\hbar D}(fg) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hbar}{r!} D^r(fg) \\ &\overset{Leibniz}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hbar}{r!} \sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{i!(r-i)!} D^i(f) D^{r-i}(g) \\ &\overset{s:=r-i}{=} (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hbar}{i!} D^i(f))(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\hbar}{s!} D^s(g)) \\ e^{\hbar D}(fg) &= e^{\hbar D}(f) e^{\hbar D}(g) \end{aligned}$$

Continuons le calcul en appliquant ceci à $e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}$:

$$\begin{aligned} e^{\hat{x}} \triangleright_\hbar e^{\hat{y}}(\alpha) &= e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(e^{\hat{y}})(\alpha) \\ &= e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (\hat{y})^r)(\alpha) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}((\hat{y})^r)(\alpha) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(\hat{y}))^r(\alpha) \\ &= e^{e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(\hat{y})}(\alpha) \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x(\hat{y})(\alpha) &\overset{3.9}{=} \sum_{j,k,i=1}^{n} \alpha_k c_{ij}^k x_i \frac{\partial \alpha(y)}{\partial \alpha_j}(\alpha) \\ &= \sum_{j,k,i=1}^{n} \alpha_k c_{ij}^k x_i y_j(\alpha) \\ &\overset{2.11 et 3.6}{=} \widehat{ad_x(y)}(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, $e^{\hbar \widetilde{\mathrm{ad}}_x}(\hat{y}) = e^{\widehat{\hbar \mathrm{ad_x}(y)}}$ et on a fini la preuve. $\square$

Bibliographie

[1] Alexandre, C., Bordermann, M., Rivière, S., Wagemann, F. : *Rack-Bialgebras and Star-Products on duals of Leibniz algebras*. Non publié, Septembre 2014

[2] Carter, J., Crans, A., Elhamdadi, M., Saito, M. : *Cohomology of the Categorical Self-Distributivity*. J. Homotopy Relat. Struct. 3 (2008), no. 1, 13–63.

[3] Dherin, B., Wagemann, F. : *Deformation quantization of Leibniz algebras*. Preprint `arXiv:1310.6854`, Octobre 2013.

[4] Dixmier, J. : *Algèbres enveloppantes*. Gauthier-Villars, Paris 1974.

[5] Drinfel'd, V. : *On constant quasiclassical solutions of the Yang-Baxter Quantum Equation*. Sov.Math.Doklady, 1983

[6] Gutt, S. : *An explicit ∗-product on the cotangent bundle of a Lie group*. Lett.Math.Phys., 1983

[7] Kassel, C. : *Quantum Groups* Springer-Verlag, New York, 1995

[8] Kinyon, M. K. *Leibniz algebras, Lie racks, and digroups*. J. Lie Theory 17 (2007), no. 1, 99–114

[9] Loday, J.-L. : *Cyclic Homology*. Springer, Berlin, 1992.

[10] Rivière, S. : *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras from the rack point of view*. Non publié, Avril 2013

[11] Thomas, Erik G.F. *A polarization identity for multilinear maps*. Preprint `arXiv:1309.1275v4`, Décembre 2013.