# STRUCTURES DE CONTACT INVARIANTES PAR ACTION DU CERCLE

FLAVIEN GRYCAN

## Table des matières



## Introduction

La première trace de l'étude des structures de contact invariantes par une action du cercle remonte à un travail de Boothby et Wang [BW58]. Dans cet article, ils montrent que sur tout fibré principal en cercles au dessus d'une variété symplectique dont la classe d'Euler est représentable par une forme symplectique sur la base, il existe une 1-forme de connexion qui va être une forme de contact invariante sur l'espace fibré. Ils montrent aussi que toute forme de contact dont le champ de Reeb est un champ de vecteurs régulier provient d'une connexion sur un fibré principal en cercles. Ici, régulier siginifie que pour tout point de la variété, il existe

*Date*: 6 juin 2014.

un voisinage de ce dernier qui soit transpercé exactement une fois par une courbe intégrale du champ de Reeb.

Quelques décennies plus tard, Lutz donne dans [Lut77] une classification des structures de contact invariantes sur les fibrés en cercles au dessus des surfaces. Voici brièvement les résultats obtenus par Lutz. Il montre que l'espace quotient d'une 3-variété munie d'une action du cercle est une surface qui est découpée en domaines sur lesquels la structure est positivement ou négativement transversale aux fibres. Ces domaines sont séparés par des cercles qui correspondent aux points où la structure de contact est tangente aux fibres. Ce découpage caractérise entièrement la structure de contact et donc la classification des 3-variétés combinée avec celles des structures de contact invariantes par une action du cercle est relativement simple. Il propose aussi un résultat sur les classes d'homotopies de champs de plans. Dans ces classes, il montre qu'il existe deux formes de contact invariantes d'orientation opposées.

Plus de 30 ans après sa publication, l'article de Lutz reste assez moderne. Les structures de contact invariantes par une action du cercle sont très particulières. En comparant l'angle de la structure de contact par rapport aux orbites, certaines notions capitales de la géométrie de contact en dimension 3 ont été développée, par exemple les notions de vrillé, torsion de Giroux ... Ces structures sont encore utilisées pour tester les invariants de topologie de contact récents.

En grande dimension, le travail a été commencé par Giroux dans [Gir91] et continué par la suite par Geiges et Stipsicz dans [GS09] puis par Ding et Geiges dans [DG12] pour les actions libres du cercle. Ils construisent une structure de contact invariante à partir d'un découpage symplectique de la base d'un fibré principal en cercles et d'une structure de contact sur le bord de ce découpage. A l'inverse, il montre qu'une telle structure induit un découpage en morceaux symplectiques séparés par des hypersurfaces correspondant aux points où la structure de contact est tangente aux fibres.

Peu de temps après la publication de [DG12], Massot *et al.* définissent de façon précise dans [MNW13] une notion introduite par Giroux appelée domaine idéal de Liouville. C'est une compactification d'une variété complète de Liouville. Son produit avec $S^1$ porte naturellement une structure de contact et produit ce qu'on appelle alors un domaine de Giroux.

L'objectif de ce mémoire est de reformuler et de démontrer les résultats obtenus par Ding et Geiges en terme de domaines idéaux de Liouville et de domaine de Giroux. Bien sûr, ces notions ne sont définies que pour des fibrés principaux en cercles triviaux. On reformulera alors ces définitions pour qu'elles s'adaptent à n'importe quel fibré principal en cercles. On obtient alors que pour deux domaines idéaux de Liouville tel qu'il existe un contactomorphisme renversant la coorientation, on peut trouver une structure de contact invariante sur la variété obtenue en recollant les domaines de Giroux associés. On montre aussi qu'à partir d'une structure de contact invariante sur l'espace total d'un fibré principal en cercles, on peut découper la base en deux morceaux, non nécessairement connexe, qui vont être des domaines idéaux de Liouville.

Dans un second temps, on s'intéresse aux classes d'homotopies de structures presque contact en toute dimension sur les variétés qui sont espaces totales d'un fibré en cercles. On cherche à en obtenir une classification.

**Organisation du mémoire.** Dans la première partie du mémoire, on rappelle quelques faits importants de topologie de contact et sur la géométrie des fibrés principaux en cercles.

Dans la deuxième partie, on traite des domaines idéaux de Liouville, on les définit ainsi que les domaines de Giroux et on montre certaines propriétés pour avoir des modèles locaux près de leurs bords afin de nous faciliter le recollement.

Dans la troisième partie, on donne des exemples et des applications de cette construction.

Dans la dernière partie, on présente une classification des classes d'homotopie de structures presque contact en dimension 3 à l'aide des variétés de Pontryagin. On présente aussi un début de classification pour la dimension 5. Pour les plus grandes dimensions,on verra que cette classification est plus difficilement accessible.

**Remerciements.** Je tiens à remercier tout particulièrement Klaus Niederkrüger qui a accepté d'encadrer ce mémoire. Je veux le remercier pour le temps qu'il m'a consacré et les discussions stimulantes autour de ce mémoire. Je voudrais également remercier Bruno Sévennec, son aide a été très précieuse dans la démonstration du théorème de lissage des cycles en codimension 2. Que soient remerciées les secrétaires de l'IMT et de l'UFR de Maths-Info de Strasbourg, Jocelyne Picard et Fabienne Grauss qui ont donné de leur temps pour organiser le déplacement sur Toulouse pour effectuer ce travail. Je souhaiterai également remercier Mihai Damian qui durant ces trois années de magistère a toujours été là pour répondre à mes questions et m'orienter.

## 1. Notions de topologie de contact et sur les fibrés principaux

Dans cette partie, on donne les bases de topologie de contact pour comprendre la suite de ce travail, puis quelques notions sur les fibrés principaux en cercle.

### 1.1. Topologie de contact.

On donne sans démonstration les notions de bases nécessaires au travail. Pour plus de détails, on renvoie au très complet [Gei08].

**Définition 1.1.** *Soit $M$ une variété de dimension $2n+1$. Une structure de contact $\xi$ est une distribution d'hyperplans de $M$ totalement non intégrable. C'est-à-dire que $\xi$ est un sous-fibré du fibré tangent de codimension 1 et si $\alpha$ est une 1-forme dont le noyau représente localement $\xi$, alors elle doit vérifier*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

*Une telle forme $\alpha$ est appelée forme de contact pour $\xi$. Le couple $(M, \xi)$ est appelé variété de contact.*

Il est possible de définir une structure de contact $\xi$ globalement comme le noyau d'une 1-forme si et seulement si $\xi$ est coorientable, ce qui signifie que le fibré $TM/\xi$ est trivial. On supposera par la suite que toutes nos structures de contact sont coorientables. En fait, $\alpha$ est une forme de contact si $\alpha \wedge d\alpha^n$ est une forme de volume sur $M$. La condition $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ est indépendante du choix de la forme $\alpha$. En effet, soit $\alpha$ une forme de contact et $\alpha'$ une 1-forme telle que $\xi = \ker \alpha$. Alors il existe une fonction non nulle $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha' = f\alpha$ et on a donc

$$(f\alpha) \wedge (d(f\alpha))^n = f^{n+1} \alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Le premier exemple de variétés de contact est $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de la forme de contact $\alpha_{std} = dz + \sum x_i dy_i$ où $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ désigne les coordonnées de $\mathbb{R}^{2n+1}$. La structure $\xi_{std} = \ker \alpha_{std}$ est appelée structure de contact standard sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Le deuxième exemple de variétés de contact est $S^{2n+1}$. En effet, la structure de contact sur $S^{2n+1}$ est donnée par le champ de tangence complexe de la sphère unité dans $\mathbb{C}^{n+1}$. C'est-à-dire

$$\xi_0 = TS^{2n+1} \cap (i \cdot TS^{2n+1}),$$

où $i$ désigne la multiplication complexe sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Localement, toute structure de contact est difféomorphe à la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Ceci a pour conséquence que les structures de contact ne peuvent pas être distinguée au point de vue local.

Un objet fondamental en topologie de contact est le champ de Reeb associé à une forme de contact.

**Définition 1.2.** *Soit $\alpha$ une forme de contact sur une variété $M$. On définit le champ de Reeb associé à $\alpha$ comme l'unique champ de vecteurs $R$ vérifiant*

$$\iota_R\alpha = 1 \text{ et } \iota_R d\alpha = 0.$$

Les orbites périodiques de ce champ de vecteurs font l'objet de beaucoup de travaux de recherche. C'est la conjecture de Weinstein, celle-ci affirme que tout champ de Reeb admet au moins une orbite périodique [Hof93].

**Définition 1.3.** *Deux variétés de contact $(M_1, \xi_1)$ et $(M_2, \xi_2)$ sont dites contactomorphes s'il existe un difféomorphisme $\Phi : M_1 \to M_2$ tel que $T\Phi(\xi_1) = \xi_2$.*

On a alors un théorème de Gray pour trouver une isotopie entre structures de contact :

**Théorème 1.4.** ***[Stabilité de Gray].*** *Soit $\xi_t$, $t \in [0,1]$ une famille de structures de contact sur une variété $M$ fermée. Alors il existe une isotopie $\psi_t$ sur $M$ telle que $T\psi_t(\xi_0) = \xi_t$.*

En annexe de ce mémoire, on donne une démonstration d'un raffinement de ce théorème adapté aux structures de contact invariantes pour une action du cercle.

En dimension 3, il y a deux grandes familles de structures de contact. Les structures vrillées et les structures tendues. Une structure de contact est dite vrillée s'il existe un disque plongé qui est tangent à la structure de contact en tout point de son bord. Une structure de contact est tendue si elle n'est pas vrillée.

Les structures de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ et $S^3$ sont des exemples de structures tendues. En grande dimension, on a pas encore de classification des structures de contact. C'est l'objet aussi de beaucoup de recherche. En fait, en grande dimension, il se peut qu'il n'existe pas de structures de contact sur la variété, alors que en dimension 3, toute variété a une structure de contact.

1.2. **Fibrés principaux en cercles.** Un fibré principal en cercles $M$ au dessus d'une variété $B$ est la donnée d'une action lisse et libre à droite du cercle sur une variété $M$ telle que tout les points d'une orbite sont envoyés sur le même point de $B$ par l'application lisse de projection $\pi : M \to B$ et telle que l'on ait la propriété de trivialisation locale suivante : soit $x \in B$, il existe un voisinage $U$ de $x$ et un difféomorphisme $f : \pi^{-1}(U) \to U \times S^1$ de la forme $f(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ tels que $\varphi(pe^{i\phi}) = \varphi(p)e^{i\phi}$ pour tout $p \in \pi^{-1}(U)$ et tout $e^{i\phi} \in S^1$. (On a pris pour notation de l'action la multiplication à droite). Le fibré principal en cercle trivial sur $B$ est donné par $B \times S^1$.

Soit $\pi : M \to B$ un fibré principal en cercle. Notons $\partial_\theta$ le champ de vecteurs générant l'action de $S^1$. Une connexion sur $M$ est une 1-forme $\psi$ invariante par l'action de $S^1$ telle que $\psi(\partial_\theta) = 1$.

La 2-forme $d\psi$ est alors horizontale, c'est-à-dire $\iota_{\partial_\theta} d\psi = 0$, et invariante. Donc $d\psi$ induit une 2-forme fermée $\omega$ sur $B$ vérifiant $d\psi = \pi^*\omega$. La 2-forme $\omega$ est appelée courbure de la connexion $\psi$. Dans la suite, on se permettra de ne plus faire la distinction entre une 2-forme invariante et horizontale et la 2-forme induite.

La classe d'Euler d'un fibré en cercles est la classe de cohomologie donnée par $c = -[\omega/2\pi] \in H^2_{dR}(B)$, où $H^*_{dR}$ désigne la cohomologie de de Rham. La classe d'Euler du fibré est une classe entière de cohomologie, c'est-à-dire qu'elle est dans l'image de l'application $H^2(B,\mathbb{Z}) \to H^2_{dR}(B)$.

Les fibrés principaux en cercles sur $B$ sont classifiés par leur classe d'Euler entière dans $H^2(B,\mathbb{Z})$. En effet, la classe $c \in H^2_{dR}(B)$ ne classifie pas totalement les fibrés en cercles s'il y a des éléments de torsion dans $H^2(B,\mathbb{Z})$.

Pour plus de détails, on renvoie au classique [Kob56].

## 2. Domaines de Giroux

Un domaine idéal de Liouville est une façon de voir une variété symplectique à bord mais en voyant le bord de celle-ci à l'infini. Les domaines de Giroux sont des contactisées de ces derniers. Dans leur article [MNW13], Massot *et al.* introduisent la notion de *domaine idéal de Liouville* et de *domaine de Giroux*. Ils les définissent dans le cadre de fibrés en cercle $S^1$ triviaux. Dans ce mémoire, nous sommes intéressés par les fibrés en cercle non-triviaux. On donnera alors un raffinement de cette définition adapté à notre cadre de travail. Le but de cette partie est alors dans un premier temps d'introduire ces nouveaux objets de la topologie de contact, puis, dans un deuxième temps, d'étudier le recollement des domaines de Giroux.

2.1. **Domaines idéaux de Liouville.** On commence par donner la définition de l'article [MNW13].

**Définition 2.1.** *Soit $B$ une variété compacte à bord, $\omega_{Int}$ une forme symplectique sur l'intérieur* $\mathrm{Int}(B)$ *de $B$ et $\xi$ une structure de contact sur $\partial B$. Le triplé $(B, \omega_{Int}, \xi)$ est un* ***domaine idéal de Liouville*** *s'il existe une 1-forme auxiliaire $\lambda$ sur* $\mathrm{Int}(B)$ *telle que*

(1) $d\lambda = \omega_{Int}$ sur $\mathrm{Int}(B)$
(2) *Pour toute fonction lisse $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ayant pour ensemble de niveau régulier $\partial B = f^{-1}(0)$, la 1-forme $f\lambda$ s'étend de façon lisse à $\partial B$ et telle que sa restriction à $\partial B$ soit une forme de contact pour $\xi$.*

*Dans ce cas, $\lambda$ est appelée forme de Liouville pour $(B, \omega_{Int}, \xi)$.*

Soit $(B, \omega_{Int}, \xi)$ un domaine idéal de Liouville, soit $\lambda$ une forme de Liouville pour cet idéal. On peut munir $B \times S^1$ d'une structure de contact $S^1$-invariante $\xi' = \ker(fdt + f\lambda)$ pour toute fonction lisse $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ayant pour ensemble de niveau régulier $\partial B = f^{-1}(0)$. Le couple $(B \times S^1, \xi')$ est appelé domaine de Giroux associé à $(B, \omega, \xi)$.

Maintenant, on adapte ces définitions au cas des fibrés non triviaux en cercle.

**Définition 2.2.** *Soit $B$ et $\xi$ comme avant, $\omega_{Int}$ une forme symplectique sur* $\mathrm{Int}(B)$ *et $c \in H^2(B,\mathbb{Z})$ une classe de cohomologie. Le quadruplet $(B, \omega_{Int}, \xi, c)$ est appelé* ***domaine idéal de Liouville*** *si, pour toute 2-formes fermée $\Omega$ sur $B$ avec $-[\Omega/2\pi] = c \otimes \mathbb{R} \in H^2_{dR}(B)$, il existe une 1-forme $\lambda$ telle que $d\lambda = \omega_{Int} - \Omega$ et telle que la condition (2) de la définition précédente soit vérifiée.*

*Ici encore, $\lambda$ est appelée forme de Liouville pour $(B, \omega_{Int}, \xi, c)$ .*

**Remarque :**

(1) On peut choisir n'importe quelle 2-forme fermée à la place de $\Omega$. Soit $\Omega'$ telle que $[\Omega] = [\Omega']$ alors $\Omega = \Omega' + d\beta$ avec $\beta$ une 1-forme sur $B$. On doit alors remplacer $\lambda$

par $\lambda' = \lambda - \beta$. Comme $\beta$ est bien définie sur tout $B$, le prolongement de $f\lambda'$ à $\partial B$ coïncide avec celui de $f\lambda$.

(2) La forme $\Omega$ n'est en général pas symplectique et n'a aucune raison de l'être.

(3) Dans ces nouveaux termes, $(B, \omega, \xi, 0)$ est un domaine idéal de Liouville au sens de [MNW13].

2.2. **Domaine de Giroux.** Considérons un domaine idéal de Liouville $(B, \omega_{Int}, \xi, c)$. Soit $\Omega$ une 2-forme fermée et $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ comme dans la définition précédente. Notons que comme $\omega_{Int}$ n'est pas définie globalement, il faut que l'on trouve une autre forme de volume sur $B$.

**Lemme 2.3.** *La forme $\mu = f(d(f\lambda) + f\Omega)^n - ndf \wedge (f\lambda) \wedge (d(f\lambda) + f\Omega)^{n-1}$ définit une forme volume sur $B$*

*Démonstration.* En effet, considérons la forme de volume $\mu = f(f\omega_{Int})^n$ sur $\text{Int}(B)$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \mu & = & f(f\omega_{Int})^n \\ & = & f(f(d\lambda + \Omega))^n \\ & = & f(fd\lambda + f\Omega)^n \\ & = & f(d(f\lambda) - df \wedge \lambda + f\Omega)^n \\ & = & f(d(f\lambda) + f\Omega)^n - ndf \wedge (f\lambda) \wedge (d(f\lambda) + f\Omega)^{n-1} \end{array}.$$

Sur le bord, cette dernière expression vaut $-ndf \wedge (f\lambda) \wedge (d(f\lambda))^{n-1}$ qui est bien une forme volume car $f\lambda$ se prolonge en une forme de contact pour $\xi$ sur $\partial B$. □

Dans la notion de domaine idéal de Liouville, il y a des problèmes de définition près du bord pour la forme symplectique. On propose alors un modèle local pour la forme de Liouville $\lambda$ près du bord.

**Lemme 2.4.** *Soit $(B, \omega_{Int}, \xi, c)$ un domaine idéal de Liouville avec pour forme auxiliaire $\lambda$. Soit $X$ le champ de vecteurs vérifiant $\iota_X \omega_{Int} = \lambda$. Soit $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction à niveau régulier $\partial B = f^{-1}(0)$. Alors*

(1) *Le champ de vecteurs $X_f = \frac{1}{f}X$ sur $\text{Int}(B)$ se prolonge de façon lisse sur $\partial B$ de façon à ce qu'il lui soit transverse et qu'il pointe vers l'extérieur.*

(2) *Il existe un voisinage collier de $\partial B$ identifiable à $(-\varepsilon, 0] \times \partial B$ avec coordonnée $s \in (-\varepsilon, 0]$ sur lequel $\lambda$ est de la forme $\lambda = -\frac{\alpha}{s} + \tilde{\lambda}$, où $\alpha$ est une forme de contact pour $\xi$ et $\tilde{\lambda}$ est une 1-forme dépendant de $\Omega$.*

*Démonstration.* On utilise la forme volume $\mu$ construite dans le lemme précédent. Il existe alors un unique champ de vecteurs $X_f$ sur $B$ qui vérifie

$$\iota_{X_f}\mu = nf\lambda \wedge (d(f\lambda) + f\omega)^{n-1}.$$

Considérons le champ de vecteurs $X' = \frac{1}{f}X$ sur l'intérieur de $B$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \iota_{X'}\mu|_{\text{Int}(B)} & = & \iota_{X'} f(f\omega_{Int})^n \\ & = & f\iota_{X'}(f\omega_{Int})^n \\ & = & nf(\iota_{X'} f\omega_{Int}) \wedge (f\omega_{Int})^{n-1} \\ & = & nf\lambda \wedge (f\omega_{Int})^{n-1} \\ & = & n(f\lambda) \wedge (f\omega + d(f\lambda))^{n-1} \end{array}$$

Donc, sur l'intérieur de $B$, $X'$ et $X_f$ vérifient la même équation. Par unicité, ce sont donc les mêmes sur l'intérieur. Or, comme $f : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction à niveau régulier $\partial B = f^{-1}(0)$, $X_f$ est transverse à $\partial B$ et pointe vers l'extérieur par construction. En effet, $df(X_f) < 0$ près du bord.

Pour construire le voisinage collier de $\partial B$, on va suivre en tant négatif le flot de $X_f$ jusqu'au temps $-\varepsilon$. On a alors un voisinage collier de $\partial B$ de la forme $(-\varepsilon, 0] \times \partial B$. On notera, alors, $s$ le paramètre temporel. La fonction $f$ a été choisie arbitrairement. On va chercher une fonction $h$ de la forme $h := gf$ avec $g$ une fonction à valeur strictement positive sur $B$ de façon que

$$\mathcal{L}_{X_h}(h\lambda) = -\iota_X\Omega.$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{X_h}(h\lambda) & = & \iota_{X_h} d(h\lambda) \\ & = & \iota_{X_h}(dh \wedge \lambda + hd\lambda) \\ & = & \iota_{X_h}(dh \wedge \lambda + h\omega_{Int} - h\Omega) \\ & = & dh(X_h) \cdot \lambda + h\iota_{X_h}\omega_{Int} - \iota_{X_h} h\Omega \\ & = & dh(X_h) \cdot \lambda + \lambda - \iota_X\Omega \end{array}.$$

Notre condition se transforme alors en

$$dh(X_h) = -1.$$

et

$$\begin{array}{rcrcl} dh(X_h) = -1 & \Leftrightarrow & gdf(X_h) + fdg(X_h) & = & -1 \\ & \Leftrightarrow & df(X_f) + \frac{f}{g}dg(X_f) & = & -1 \\ & \Leftrightarrow & dg(X_f) & = & \frac{-1-df(X_f)}{f}g \end{array}.$$

Or, sur le bord, on a $\iota_{X_f}(-ndf \wedge (f\lambda) \wedge (d(f\lambda))^{n-1}) = nf\lambda \wedge (d(f\lambda))^{n-1}$. On en déduit donc que $df(X_f) = -1$. Sur le bord, on a donc $dg(X_f) = 0$. On peut donc poser comme condition initiale à cette équation différentielle $g|_{\partial B} \equiv 1$. On a donc un problème de Cauchy à résoudre pour trouver $g$. On trouve alors une solution près du bord en appliquant Cauchy-Lipschitz, et on la prolonge en une fonction lisse définie sur $B$. Donc une telle fonction $h$, vérifiant $\mathcal{L}_{X_h}(h\lambda) = -\iota_X\Omega$ peut être trouvée.

Maintenant, $h\lambda$ se prolonge en une forme de contact pour $\xi$ sur $\partial B$. On notera $\alpha$ cette forme. Sur le voisinage collier, on trouve alors

$$\begin{array}{rrcl} & \Phi_s^{X_h\ *}(h\lambda) & = & \alpha - s\Phi_s^{X_h\ *}\iota_X\Omega \\ \Leftrightarrow & -s\Phi_s^{X_h\ *}\lambda & = & \alpha - s\Phi_s^{X_h\ *}\iota_X\Omega \\ \Leftrightarrow & \Phi_s^{X_h\ *}\lambda & = & -\frac{\alpha}{s} + \Phi_s^{X_h\ *}\iota_X\Omega \end{array}.$$

□

Notons $E_c$ le fibré en cercles de classe $c$ au dessus de $B$. Considérons maintenant une connexion $\psi$ sur $E_c$ ayant pour forme de courbure $\pi^*\Omega$. Pour alléger la suite, on oubliera les pull-backs.

**Lemme 2.5.** *La 1-forme $\eta = f\lambda + f\psi$ définit une structure de contact sur $E_c$.*

*Démonstration.* On vérifie la condition de contact $\eta \wedge (d\eta)^n > 0$.

$$\begin{aligned}
\eta \wedge (d\eta)^n &= (f\lambda + f\psi) \wedge (d(f\lambda + f\psi))^n \\
&= (f\lambda + f\psi) \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + df \wedge \psi + fd\psi)^n \\
&= (f\lambda + f\psi) \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + df \wedge \psi + f\Omega)^n \\
&= f\lambda \wedge (fd\lambda + df \wedge \psi + f\Omega)^n + f\psi \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + f\Omega)^n \\
&= f\lambda \wedge (\omega_{Int} + df \wedge \psi)^n + f\psi \wedge (df \wedge \lambda + f\omega_{int})^n \\
&= nf\lambda \wedge df \wedge \psi \wedge (f\omega_{Int} + df \wedge \psi)^{n-1} + f\psi \wedge (df \wedge \lambda + f\omega_{Int})^n \\
&= f\psi \wedge (n\lambda \wedge df \wedge (f\omega_{Int} + df \wedge \psi)^{n-1} + (df \wedge \lambda + f\omega_{Int})^n) \\
&= f\psi \wedge (n\lambda \wedge df \wedge (f\omega_{Int} + df \wedge \psi)^{n-1} + (f\omega_{Int})^n + ndf \wedge \lambda \wedge (f\omega_{Int})^{n-1}) \\
&= f\psi \wedge (f\omega_{Int})^n \\
&= \psi \wedge \mu > 0
\end{aligned}$$

□

On appellera, par analogie à [MNW13], le couple $(E_c, \ker(\eta))$ **domaine de Giroux** associé au domaine de Liouville idéal $(B, \omega_{Int}, \xi, c)$.

Beaucoup de choix on était fait dans ce qui précède pour définir $\eta$ : le choix de $f$, $\psi$, $\Omega$ ... En fait la forme de contact que l'on a trouvé sur le domaine de Giroux est essentiellement unique à difféomorphisme $S^1$-équivariant près.

**Proposition 2.6.** *Il n'y a qu'une seule structure de contact, sur un domaine de Giroux, induisant un domaine idéal de Liouville donné, à isotopie équivariante près*

*Démonstration.* Commençons par remarquer que l'ensemble des connexions sur $E_c$ ayant pour forme de courbure $\Omega$ est un convexe. En effet, soit $\psi$ et $\psi'$ deux connexions sur $E_c$ ayant pour forme de courbure $\Omega$. Alors $t\psi + (1-t)\psi'$ est une connexion ayant pour forme de courbure $\Omega$. De la même façon, on voit que l'ensemble des $\lambda$ vérifiant $d\lambda = \omega_{Int} - \Omega$ est un convexe.

Enfin, pour deux fonctions $f, g : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ à zéro régulier $\partial B$, il existe une fonction strictement positive $h : B \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $f = hg$.

Considérons alors deux formes de contact $\alpha_0 = f_0\lambda_0 + f_0\psi_0$ et $\alpha_1 = f_1\lambda_1 + f_1\psi_1$. Par la remarque précédente, on peut supposer que les fonctions sont les mêmes. On considère alors pour tout $t$ la 1-forme

$$\alpha_t = f(t\lambda_0 + (1-t)\lambda_1 + t\psi_0 + (1-t)\psi_1).$$

Pour tout $t$, $\alpha_t$ est une forme de contact. On va alors utiliser le théorème de stabilité de Gray équivariant (voir annexe A). Il faut juste vérifier que le champ de vecteur qui définit l'isotopie produite par le théorème de Gray est bien défini. Ce champ de vecteurs vérifie

$$\alpha_t(X_t) = 0 \text{ et}( \ \dot{\alpha}_t + i_{X_t} d\alpha_t)|_{\ker \alpha_t} = 0.$$

Or, les $\alpha_t$ coïncident tous sur $T\partial E_c$. Donc, pour tout $v \in \ker \alpha_t \cap \partial TE_c$, on a $d\alpha_t(X_t, v) = 0$. Donc le flot préserve $\partial E_c$. Donc il est bien définit et $\ker \alpha_0$ et $\ker \alpha_1$ sont isotopes. □

Notre prochain but est de recoller deux domaines de Giroux. Pour ce faire, on aura besoin d'un modèle local près du bord de $E_c$ pour la forme de contact. On va alors définir une notion un peu plus générale qui nous produira le modèle local rapidement. Cette notion est ce qui est appelé "$\xi$-round hypersurfaces" dans [MNW13]. On adapte alors à notre cadre. Une hypersurface $H$ d'une variété de contact $(V, \xi)$ est appelée hypersurface de classe $c$ modelée sur une variété de contact fermée $(M, \xi_M)$ si elle est transverse à $\xi$ et qu'il existe une identification préservant l'orientation avec $M_c$, fibré principal en cercles de classe $c \in H^2(M,\mathbb{Z})$ au dessus de $M$ telle que $\xi \cap TH$ se projette par $T\pi$ sur $\xi_M$, où $\pi$ est la projection du fibré.L'orientation d'une telle hypersurface est choisie comme l'orientation opposée à celle de l'orientation naturelle du bord de $V$.

On a alors le lemme suivant

**Lemme 2.7.** *Toute hypersurface modelée $H = M_c$ dans l'intérieur (ou sur le bord) d'une variété de contact a un voisinage $(-\varepsilon,\varepsilon) \times H$ (ou $(-\varepsilon,0] \times H$ respectivement) sur lequel une forme de contact pour $\xi$ est $\alpha_M - s\psi$, où $s$ est la coordonnée sur l'intervalle et $\alpha_M$ est une forme de contact pour $\xi_M$.*

*Démonstration.* Comme on appliquera ce résultat pour le bord d'un domaine de Giroux, on va démontrer la version pour un voisinage collier. Commençons par construire un voisinage collier de $H$. Pour ce faire, on va considérer une métrique riemannienne $g$ sur $V$ et une fonction $\delta$ telle que $d\delta \neq 0$ sur le bord de $V$. Alors le champ de gradient $\nabla_g(\delta)$ est défini sur $H$ et transverse à ce dernier. En suivant le flot de gradient en temps négatif, on définit un voisinage collier de $H$ identifiable à $(-\varepsilon,0] \times H$. La forme de contact donnée dans l'énoncé du lemme induit le même champ d'hyperplans que $\xi$ sur $H$. Donc, il existe une isotopie fixant $H$ entre ses deux champs de plans. En faisant le pull-back du voisinage construit ci-dessus par l'isotopie, on obtient le résultat du lemme. □

Remarquons que le bord d'un domaine de Giroux est une hypersurface modelée sur le bord du domaine idéal de Liouville. Un autre intérêt de cette notion est qu'elle vient naturellement avec une opération de blow-down. Maintenant, soit $(B,\omega_{Int},\xi,c)$ un domaine idéal de Liouville et $(E_c,\eta)$ le domaine de Giroux associé. On a donc un modèle pour $\eta$ près de $\partial E_c$ donné par le lemme précédent. Observons qu'il existe un plongement $\partial E_c \times (-\varepsilon,0] \hookrightarrow \partial E_c \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, on prolonge alors la forme de contact sur $\partial E_c \times [0,\varepsilon)$ par $\alpha_{\partial B} - s\psi$ sur tout le collier. On a alors construit un voisinage tubulaire du bord d'un domaine de Giroux.

2.3. **Recollement de domaines de Giroux.** Considérons deux domaines idéaux de Liouville $(B_+,\omega_+,\xi_+,c_+)$ et $(B_-,\omega_-,\xi_-,c_-)$. Supposons qu'il existe un contactomorphisme $\Phi : \partial B_+ \to \partial B_-$, c'est-à-dire que $\Phi^*\xi_- = \xi_+$ tel que $\Phi^* c_-|_{\partial B_-} = c_+|_{\partial B_+}$, qui renverse la coorientation des structures de contact. Notons $(E_{c_+}, \ker \eta_+)$ et $(E_{c_-}, \ker(-\eta_-))$ les domaines de Giroux correspondant. Remarquons que l'on a choisi $-\eta_-$ comme forme de contact sur $E_{c_-}$.

Soit $\alpha_{B_+}$ et $\alpha_{B_-}$ des formes de contacts pour $\xi_+$ et $\xi_-$ respectivement, alors il existe une fonction $g : \partial B_- \to \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\Phi^*\alpha_{B_-} = -g\alpha_{B_+}$.

Il existe alors un isomorphisme de fibré $\tilde{\Phi} : \partial E_{c_+} \to \partial E_{c_-}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\partial E_{c_+} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi_+"'] & \partial E_{c_-} \arrow[d, "\pi_-"] \\
\partial B_+ \arrow[r, "\Phi"'] & \partial B_-
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme $\tilde{\Phi}$ préserve la distribution d'hyperplans sur le bord. En effet,

$$\tilde{\Phi}^*\pi_-^*\xi_- = \pi_+^*\Phi^*\xi_- = \pi_+^*\xi_+.$$

Considérons maintenant les voisinages tubulaires de $\partial E_{c_+}$ et $\partial E_{c_-}$ construit précédemment. On va prolonger $\tilde{\Phi}$ sur les voisinages tubulaire pour obtenir une application

$$\tilde{\Phi} : \partial E_{c_+} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial E_{c_-} \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

On a construit un champ de vecteurs $X_{f_+}$ transverse au bord de $B_+$ pointant vers l'extérieur. Considérons une connexion $\psi_+$ sur $\partial E_{c_+} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, on peut relever $X_{f_+}$ en un unique champ de vecteurs $\tilde{X}_{f_+}$ transverse au bord de $\partial E_{c_+}$ dans le noyau de $\psi$ qui se projette sur $X_{f_+}$. On prolonge alors $\tilde{\Phi}$ sur $\partial E_{c_+} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ en suivant le flot de ce champ de vecteurs. On note toujours $\tilde{\Phi}$ le prolongement.

Sur $\partial E_{c_-} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, le modèle pour une 1-forme $\alpha_-$ pour $\pi_-^*\xi_-$ est $\alpha_- = -\pi_-^*\alpha_{B_-} + s\psi_-$ avec $\psi_-$ une connexion sur $E_{c_-}$ ayant la forme de courbure habituelle, $s$ la coordonnée sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Alors, comme $\Phi$ renverse la coorientation, on a

$$\tilde{\Phi}^*(-\pi_-^*\alpha_{B_-} + s\psi_-) = g\pi_+^*\alpha_{B_+} - s\tilde{\psi}_+,$$

avec $\tilde{\psi}_+$ une connexion sur $E_{c_+}$ qui n'est pas obligatoirement $\psi_+$.

Regardons alors la 1-forme

$$\alpha_\tau = ((1-\tau) + \tau g)\pi_+^*\alpha_{B_+} + s((1-\tau)\psi_+ + \tau\tilde{\psi}_+),$$

pour tout $\tau \in [0,1]$.

C'est bien une forme de contact. On va appliquer le théorème de stabilité de Gray pour isotoper $\ker\alpha_0$ vers $\ker\alpha_1$ sur le voisinage du bord. Il faut alors vérifier que le champ de vecteurs, dont le flot définit l'isotopie, est bien défini sur $\partial E_{c_+} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Si on restreint les équations précédentes à $\ker\alpha_\tau$, on obtient que $\dot{\alpha_\tau} = 0$ et que $i_{X_\tau} d\alpha_\tau = 0$.

Notons $X_\tau = Y_\tau + A_\tau\partial_\theta + B_\tau\partial_s$. En injectant dans la deuxième équation, on trouve $B_\tau = 0$. Donc le champ de vecteur est tangent à $\partial E_{c_+}$. De plus, il le préserve ainsi que la distribution d'hyperplans. Donc, localement, le champ de vecteurs $X_\tau$ s'intègre en un flot $\psi_t$ qui définit l'isotopie voulue.

On a obtenu le théorème suivant

**Théorème 2.8.** *Soit $(B_+, \omega_+, \xi_+, c_+)$ et $(B_-, \omega_-, \xi_-, c_-)$ deux domaines idéaux de Liouville. Supposons qu'il existe un contactomorphisme $\Phi : \partial B_+ \to \partial B_-$, c'est-à-dire que $\Phi^*\xi_- = \xi_+$ tel que $\Phi^*c_-|_{\partial B_-} = c_+|_{\partial B_+}$, qui renverse la coorientation des structures de contact. Alors le recollement des deux domaines de Giroux associés est l'espace total d'un fibré principal en cercles $\pi : E_{c_+} \cup E_{c_-} \to B_+ \cup B_-$ de classe $c \in H^2(B_+ \cup B_-, \mathbb{Z})$ vérifiant $c|B_\pm = c_\pm$ et est muni d'une structure de contact $S^1$-invariante.*

Le choix du recollement affecte totalement la topologie de $M$. Considérons un recollement $\Phi$ des domaines de Giroux comme construit précédemment. Le fait que l'action du cercle soit libre et que le recollement commute avec l'action implique que pour connaitre un recollement, il suffit de connaître où est envoyé un point dans chaque fibre. Ainsi, on peut construire un nouveau recollement à partir du recollement fixé en multipliant ce dernier par une fonction de chaque fibre vers $S^1$. Mais, comme on a juste besoin de savoir où est envoyé un point par fibre, on a une application $\partial B_+ \to S^1$.

Réciproquement, si l'on considère deux recollements de domaines de Giroux. L'un des recollements est un multiple de l'autre recollement par une application $\partial B_+ \to S^1$.

Donc, se donner un recollement de domaines de Giroux revient à se donner une application de $\partial B_+ \to S^1$. Plusieurs telles applications peuvent donner des recollements difféomorphes. C'est l'idée de la

**Proposition 2.9.** *Soit $\Phi_0$ et $\Phi_1$ deux recollements homotopes de domaines de Giroux. Alors, les fibrés obtenus après recollement sont isomorphes.*

*Démonstration.* Considérons une homotopie de recollements $(\Phi_t)$ entre $\Phi_0$ et $\Phi_1$. Le recollement $\Phi_t$ recolle $E_{c_+} \times \{t\}$ avec $E_{c_-} \times \{t\}$. On a donc un recollement de $E_{c_+} \times [0,1]$ avec $E_{c-} \times [0,1]$. Montrons maintenant que $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times \{0\}$ est isomorphe à $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times \{1\}$. Considérons le champ de vecteurs $\partial_t$ sur $B_+ \cup B_- \times [0,1]$, où $t$ désigne la coordonnées sur $[0,1]$.

Considérons une connexion sur $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times [0,1]$. Il existe alors un unique champ de vecteurs $X$ sur $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times [0,1]$ dans le noyau de la connexion qui se projette sur $\partial_t$ sur $B_+ \cup B_- \times [0,1]$. Ce champ de vecteurs est bien défini. Donc, il s'intègre en un flot. En suivant le flot de $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times \{0\}$ à $E_{c_+} \cup E_{c_-} \times \{1\}$, on a l'isomorphisme de fibrés cherchés. $\square$

On sait donc maintenant que une classe d'homotopie d'applications $[\partial B_+, S^1]$ donne le même fibré après recollement. On peut classifier ces classes d'homotopies.

En fait, ces classes d'homotopies sont classifiées par $H^1(\partial B_+, \mathbb{Z})$. En effet, commençons par remarquer que $dx$ est une 1-forme $\mathbb{Z}$-invariante. Donc au quotient elle définit une 1-forme que l'on notera encore $dx$. La classe de de Rham de $dx$ est l'image du générateur $[A] \in H^1(S^1, \mathbb{Z})$ par l'application $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \to H^1(S^1, \mathbb{R})$. On a alors, pour $f : \partial B_+ \to S^1$, $df = f^*dx$. Sa classe de de Rham est donc $f^*A$ et appartient à l'image de $H^1(\partial B_+, \mathbb{Z}) \to H^1(\partial B_+, \mathbb{R})$.

Supposons maintenant que $[df] = 0$. Alors, il existe une fonction $h : \partial B_+ \to \mathbb{R}$ telle que $df = dh$. Donc, $[df] = 0$ si et seulement si $f$ se relève en une fonction lisse $\tilde{f} : \partial B_+ \to \mathbb{R}$. Ainsi $f$ est homotope à une fonction constante. On a alors que la classe d'homotopie de $f$ est déterminé par la classe de cohomologie de de Rham de sa différentielle dans l'image de l'application $H^1(\partial B_+, \mathbb{Z}) \to H^1(\partial B_+, \mathbb{R})$. D'où le résultat annoncé.

On a alors que tout recollement peut-être vu comme une classe de cohomologie.

La question que l'on peut se poser maintenant est : est-ce qu'à partir d'une structure de contact $S^1$-invariante sur $M$, on peut retrouver les domaines idéaux de Liouville. On va répondre par l'affirmative à cette question, mais avant on a besoin d'une définition.

**Définition 2.10.** *Soit $B$ une variété fermée et orientée de dimension $2n$. Un* ***découpage en domaines idéaux de Liouville*** *de classe $c \in H^2(B, \mathbb{Z})$ de $B$ est une décomposition $B = B_+ \cup_\Gamma B_-$ le long d'une hypersurface, non nécessairement connexe, $\Gamma$ orientée comme le bord de $B_+$ avec une structure de contact $\xi$ et des formes symplectiques $\omega_\pm$ sur $\mathrm{Int}(B_\pm)$ tels que*

$$(B_\pm, \omega_\pm, \eta_\pm, c|_{B_\pm}),$$

*soient des domaines idéaux de Liouville.*

Avec ces termes, on a donc comme promis la

**Proposition 2.11.** *Soit $\pi : M \to B$ un fibré en cercle de classe $c \in H^2(B, \mathbb{Z})$ sur une variété fermée orientée $B$ de dimension $2n$. Toute structure de contact $S^1$-invariante sur $M$ de la forme $\eta = \ker(f\lambda + f\psi)$ où $\lambda$ est une 1-forme invariante et horizontale, $f$ une fonction et $\psi$ une forme de connexion ayant pour forme de courbure une 2-forme $\Omega$ qui représente la classe du fibré, induit un découpage en domaine idéaux de Liouville de classe $c$ sur $B$.*

*Démonstration.* Les zéros de la fonction $f$ sont tous réguliers. On prend alors pour hypersurface de découpage sur $B$ les zéros réguliers de la fonction $f$.On a alors $\Gamma = \{x \in B : f(x) = 0\}$. On définit $B_+$ par

$$B_+ = \{x \in B : f(x) \geq 0\},$$

et de façon similaire,

$$B_- = \{x \in B : f(x) \leq 0\}.$$

On prend comme structure de contact sur $\Gamma$ la structure de contact $\xi = \ker(f\lambda|_\Gamma)$. En effet, comme $\lambda$ est horizontale et invariante, elle descend sur $B$ en une forme encore notée $\lambda$.

Il nous reste à déterminer les formes symplectiques sur les intérieurs. On traite ici le cas de $B_+$, le cas de $B_-$ est similaire.

Notons $\alpha = f\lambda + f\psi$. On sait par un calcul précédent que la condition de contact s'écrit $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \psi \wedge \mu$ où $\mu$ est une forme de volume sur $B$ restreinte à $B_+$ à déterminer. Mais alors,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha \wedge (d\alpha)^n & = & (f\lambda + f\psi) \wedge (d(f\lambda + f\psi))^n \\
& = & (f\lambda + f\psi) \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + df \wedge \psi + f\Omega)^n \\
& = & f\lambda \wedge (fd\lambda + df \wedge \psi + f\Omega)^n + f\psi \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + f\Omega)^n \\
& = & nf\lambda \wedge df \wedge \psi \wedge (fd\lambda + f\Omega)^{n-1} + f\psi \wedge (df \wedge \lambda + fd\lambda + f\Omega)^n \\
& = & f\psi \wedge (nf\lambda \wedge df \wedge (fd\lambda + f\Omega)^{n-1} + (df \wedge \lambda + fd\lambda + f\Omega)^n) \\
& = & f\psi \wedge (nf\lambda \wedge df \wedge (fd\lambda + f\Omega)^{n-1} + nfdf \wedge \lambda \wedge (fd\lambda + f\Omega)^{n-1} \\
& & +(fd\lambda + f\Omega)^n) \\
& = & f\psi \wedge (fd\lambda + f\Omega)^n
\end{array}.$$

Donc, $f(f(d\lambda+\Omega))^n$ est une forme de volume sur $B_+$. On pose alors $\omega_+ = (d\lambda+\Omega)|_{\mathrm{Int}(B_+)}$. C'est bien une forme symplectique sur $\mathrm{Int}(B_+)$. De même, on trouve $\omega_- = (d\lambda + \Omega)|_{\mathrm{Int}(B_-)}$ sur $\mathrm{Int}(B_-)$.

Ces formes symplectiques vérifient bien que $\Omega$ leurs soit cohomologues et il existe bien une 1-forme $\lambda$ telle que $d\lambda = \omega_+ - \Omega$ sur $B_+$ par exemple. Par construction, les couples $(B_\pm, \omega_\pm, \xi_\pm, c|_{B_\pm})$ sont donc des domaines idéaux de Liouville. □

2.4. **Classification des structures de contact invariantes.** Le résultat que l'on montre dans cette partie généralise le théorème de classification invariant obtenu par Lutz dans [Lut77]. La preuve donnée est fortement inspirée de [DG12]

**Théorème 2.12.** *Soit $\pi : M \to B$ un fibré principal en cercles de classe $c \in H^2(B, \mathbb{Z})$. Deux structures de contact invariantes sur $M$ sont isotopes si et seulement si elles induisent des découpages en domaines idéaux de Liouville de classe c difféomorphes, c'est-à-dire un difféomorphisme de B qui préserve le découpage, la classe c ...*

*Démonstration.* Supposons que $\alpha$ et $\alpha'$ soient deux formes de contact invariantes qui induisent des découpages en domaines idéaux de Liouville de classe $c$ difféomorphes. Notons alors $\phi : B \to B$ ce difféomorphisme et ce difféomorphisme préserve $c$. On a alors un fibré $\phi^*M \to B$ obtenu en faisant le pull-back du fibré $M \to B$ par $\phi$. Il existe alors un difféomorphisme invariant $\tilde{\phi} : \phi^*M \to M$, revêtement de $\phi$, tel que $\tilde{\phi}^*\alpha'$ induise le même découpage en domaines idéaux de Liouville que $\alpha$.

Comme $\phi$ préserve la classe du fibré, le fibré $\phi^*M \to B$ est isomorphe au fibré $M \to B$. Donc il existe un difféomorphisme invariant $M \to \phi^*M$ au dessus de l'identité. On peut donc considérer que $\alpha$ et $\phi^*\alpha$ induisent le même découpage en domaines idéaux de Liouville.

Maintenant, écrivons $\alpha = f\lambda + f\psi$ et $\alpha' = g\lambda' + g\psi'$, où $\lambda$ est une 1-forme horizontale, $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction et $\psi$ une connexion sur $M$. Quitte à multiplier $\alpha'$ par $f/g$, on peut supposer que $f \equiv g$. On peut aussi supposer que la connexion est la même. En effet, les deux connexions ont pour forme de courbure la 2-forme $\Omega$ qui représente la classe du fibré $c$.

Maintenant, ces deux formes induisent la même forme symplectique sur la base, donc $d\lambda|_{\mathrm{Int}(B)} = d\lambda'|_{\mathrm{Int}(B)}$. Ainsi, $f\lambda$ et $f\lambda'$ induisent la même structure de contact sur l'ensemble des zéros régulier de $f$. Par un calcul, fait dans la proposition 2.10, on a alors que les $\alpha_t = (1-t)f\lambda + tf\lambda' + f\psi$ sont des structures de contact pour tout $t \in [0,1]$. On applique le théorème de stabilité de Gray $S^1$-invariant. Comme la variété $M$ est sans bord et compacte, on a directement l'isotopie équivariante entre $\ker\alpha$ et $\ker\phi^*\alpha$.

Réciproquement, supposons que l'on ait deux structures invariantes qui soient isotopes par une isotopie invariante $\Psi$. Les découpages en domaines idéaux de Liouville seront les mêmes. On va montrer alors que le choix d'une connexion et la multiplication par une fonction strictement positive ne change pas le domaine idéal de Liouville induit. En effet, notons $\alpha = f\lambda + f\psi$, où $\psi$ est une connexion à forme de courbure $\Omega$. On rappelle que la forme symplectique sur $B_+$ est $\omega_+ = (d\lambda + \Omega)|_{\mathrm{Int}(B_+)}$. Si $\psi'$ est une autre connexion à forme de courbure $\Omega$ alors il existe une 1-forme $\gamma$ relevée de $B$ telle que $\psi' = \psi + \gamma$. On doit alors remplacer $\lambda$ par $\lambda' = \lambda - \gamma$ et $\Omega$ par $\Omega' = \Omega + d\gamma$. La forme $\omega_+$ est donc inchangée. Il en va de même sur $B_-$.

Si on considère $u\alpha$ au lieu de $\alpha$, pour n'importe quelle fonction $u : M \to \mathbb{R}_{>0}$, on doit remplacer $f$ par $uf$, et on ne change pas $\omega_+$. Donc la structure de contact $\xi$ sur $\partial B_-$ est inchangée par ces choix possibles.

On a donc un difféomorphisme entre les découpages en domaines idéaux de Liouville de classe $c$ induit qui préserve la classe du fibré $c$. □

## 3. Exemples et applications

On propose dans cette partie deux exemples de ces théorèmes : un exemple de recollement de domaines idéaux de Liouville, qui met en avant le fait que la topologie de la variété obtenue n'est pas unique, et deux exemples de découpage d'une variété de contact en domaines idéaux de Liouville.

3.1. **Un exemple de recollement : les disques.** Commençons par remarquer que le disque $D^2$ muni de la forme symplectique $\omega = d(\frac{1}{1-r^2}d\theta)$ est un domaine idéal de Liouville de classe 0. En effet, on a $H^2(D^2,\mathbb{Z}) = 0$. La structure de contact sur le bord est donnée par $\ker(d\theta|_{\partial D^2})$. Ici, $(r,\theta)$ désigne les coordonnées polaires de $D^2$.

Considérons deux copies de ce domaine idéal de Liouville. Sur la première copie $B_+$, on prend exactement les mêmes données que dans le paragraphe précédent. Sur l'autre copie notée $B_-$, on considèrera la forme symplectique opposée.

L'identité est alors un contactomorphisme du bord qui renverse la coorientation. On sait alors qu'il existera une structure de contact sur le recollement des domaines de Giroux. Cependant, rien n'est dit en ce qui concerne la topologie de ce dernier. Les domaines de Giroux associés sont des fibrés principaux en cercles triviaux.

Notons $t$ la coordonnées circulaire. Pour $k \in \mathbb{Z}$, les applications suivantes

$$\Phi_k : B_+ \times S^1 \to B_- \times S^1,\ (r,\theta,t) \mapsto (r,\theta,t-k\theta),$$

sont des difféomorphismes de recollement qui sont des relèvements de l'identité.

Le recollement de la base nous donne une sphère $S^2$. La classe du fibré peut alors appartenir à $H^2(S^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. On voit alors que si l'on se fixe pas de classe pour le recollement, il n'y a pas unicité... Les difféomorphismes que l'on a construit précédemment nous donne que la classe du fibré sera alors $c = k$.

Cette exemple nous montre bien alors que si les $B_\pm$ sont tels que $H^2(B_\pm, \mathbb{Z}) = 0$ ou bien si $H^2(B_\pm, \mathbb{Z})$ a de la torsion, la topologie de la variété obtenue après recollement n'est pas déterminé par $c|_{B_\pm}$.

Plus généralement, si l'on considère deux disques $D^{2n}$ pour $n > 1$. On peut les voir comme des domaines idéaux de Liouville en considérant la même forme symplectique que pour $D^2$, mais adaptée à nos $2n$-dimensions et on munit son bord $S^{2n-1}$ de la structure de contact standard sur la sphère. Remarquons que comme $H^1(S^{2n-1}, \mathbb{Z}) = 0$, $H^2(D^{2n}, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(S^{2n}, \mathbb{Z}) = 0$, on a alors qu'un seul choix possible pour le recollement des domaines de Giroux, le fibré obtenu sera un fibré trivial.

La moralité derrière cet exemple est que pour deux domaines idéaux de Liouville $B_+$ et $B_-$ satisfaisant les conditions du théorème 2.8, si l'on a $H^1(\partial B_+, \mathbb{Z}) = 0$ ou $H^2(B_+ \cup B_-, \mathbb{Z}) = 0$, alors il n'y a qu'un seul recollement possible.

3.2. **Un exemple de découpage vide : la fibration de Hopf.** Considérons la sphère $S^3$. On regarde cette sphère comme la sphère unité complexe de $\mathbb{C}^2$ à coordonnées $z_j = x_j + iy_j$. On la munie de la structure de contact standard $\xi_0 = \ker(\sum x_j dy_j - y_j dx_j)$ et on notera $\alpha_0 = \sum x_j dy_j - y_j dx_j$. Considérons l'action de Hopf sur $S^3$ donnée par $\phi : S^3 \times S^1,\ ((z_1, z_2), \theta) \mapsto e^{i\theta}(z_1, z_2)$.

C'est une action libre du cercle sur $S^3$. La base de ce fibré est $S^2$, sa classe d'Euler est $+1$.

Le champs de vecteurs générant l'action est donné par $X_\theta(z_1, z_2) = i(z_1, z_2)$. L'ensemble de découpage de la base est donnée par les zéros de la fonction définie par $u := \alpha_0(X_\theta)$. Or, dans ce cas, on trouve $u \equiv 1$. Donc le découpage est vide ! Cette variété ne se décompose qu'en un seul domaine idéal de Liouville de classe 1 dont la forme symplectique est $d\alpha_0$.

3.3. **Un découpage plus exotique.** Considérons cette fois-ci la sphère du type $S^{4n-1}$. On la regarde alors comme la sphère unité complexe de $\mathbb{C}^{2n}$ à coordonnées $z_j = x_j + iy_j$. On considère toujours la structure de contact standard $\xi_0 = \ker(\sum x_j dy_j - y_j dx_j)$.

L'action du cercle $S^1$ considérée est la suivante :

$$(z_1, \dots, z_{2n}) \mapsto \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1} \\ z_{2n} \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs générant l'action est le suivant

$$(z_1, \dots, z_{2n}) \mapsto \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2n-1} \\ z_{2n} \end{pmatrix}.$$

Le découpage de $\mathbb{C}P^{2n-1}$ est alors donné par l'ensemble des zéros réguliers de la fonction $f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \sum y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i$.

Les coordonnées complexes "par défaut" $z_j = x_j + iy_j$ ne sont pas adaptées pour la base de l'action $\mathbb{C}P^{2n-1}$. On pose comme nouvelles coordonnées $Z_j = x_j + ix_{j+1}$ et $Z_{j+1} = y_j + iy_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq 2n-1$. On les noteras dans la suite $Z_j = u_j + iv_j$.

Dans ces coordonnées, le champs de vecteurs du cercle est la multiplication par une structure complexe sur $\mathbb{C}^{2n}$ et le découpage est donnée par la quadrique de codimension 1

$$\mathrm{Im}(\sum Z_j \bar{Z}_{j+1}) = 0.$$

Considérons les sous-espaces

$$L_+ = [Z_1 : iZ_1 : \ldots : Z_{2n-1} : iZ_{2n-1}]$$

et

$$L_- = [Z_1 : -iZ_1 : \ldots : Z_{2n-1} : -iZ_{2n-1}]$$

Les $L_\pm$ sont isomorphes à des $\mathbb{C}P^n$ et sont des sous-variétés plongées dans $\mathbb{C}P^{2n-1}$ par l'application

$$\Psi_\pm : [Z_0 : \ldots : Z_n] \mapsto [Z_0 : \pm iZ_0 : \ldots : Z_n : \pm iZ_n].$$

Le découpage en domaine idéaux de Liouville est alors donné par des voisinages de chaque copie $\mathbb{C}P^n$ dans $\mathbb{C}P^{2n-1}$. Le pull-back de la forme symplectique sur $\mathbb{C}P^{2n-1}$ vers la sphère initiale par la projection du fibré est égale à $d(\frac{\alpha}{f})$. Sur la sphère $S^{2n} \subset S^{4n-1}$ au dessus de $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{2n-1}$, cette forme devient

$$\Psi^* d(\frac{\alpha}{f}) = d(\Psi^* \frac{\alpha}{f}) = d(\frac{\Psi^*\alpha}{f \circ \Psi}).$$

Or,

$$f \circ \Psi = -\sum u_j^2 + v_j^2 = -1,$$

et

$$\Psi^*\alpha = \sum -u_j dv_j + v_j du_j.$$

Ainsi, on a

$$\Psi^* d(\frac{\alpha}{f}) = 2 \sum du_j \wedge dv_j.$$

La restriction de la forme symplectique sur $\mathbb{C}P^n$ est donc un multiple de la forme symplectique de Fubini-Study.

## 4. Classification des classes d'homotopies de structures presque contact

Le but de cette partie est de trouver les classes d'homotopie de structures presque contact sur des variétés de dimension impaires. On utilise pour ce fait la construction des variétés de Pontryagin, que l'on rappellera dans un premier temps. On traitera les cas des dimensions 3 et 5. On verra que pour les dimensions supérieures, cela se gâte un peu ...

4.1. **Variétés de Thom-Pontryagin.** La construction de Thom-Pontryagin permet de classifier les classes d'homotopie d'application d'une variété compacte connexe sans bord de dimension donnée $M$ vers la sphère $S^p$ de dimension $p$. On expose ici leur construction. Pour plus de détails, on pourra consulter [Mil88].

On commence par définir la notion de framed-cobordisme. Pour ce faire, on a besoin de la notion de cobordisme et de framing.

**Définition 4.1.** *Soit $N$ et $N'$ deux sous-variétés compactes sans bord de même dimension d'une variété $M$. On dit que $N$ et $N'$ sont* ***cobordantes*** *si le sous-ensemble*

$$N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1-\varepsilon, 1]$$

*peut être prolongé en une variété compacte $X \subset M \times [0,1]$ de sorte que $\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1$ et que $X$ n'intersecte $M \times 0$ et $M \times 1$ qu'aux points de $\partial X$. $X$ est appelé cobordisme.*

Le fait d'être cobordant pour deux sous-variétés est une relation d'équivalence. En effet, la réflexivité et la symétrie sont immédiate par définition. Pour la transitivité, on considère deux cobordismes que l'on recolle, par leur extrémité en commun.

**Définition 4.2.** *Un* ***framing*** *d'une sous-variété $N$ d'une variété $M$ est une application $v : N \to TN^\perp$ qui a chaque point $x \in N$ associe une base*

$$v(x) = (v_1(x), \dots, v_{m-n}(x))$$

*de l'espace $T_xN^\perp \subset T_xM$ des vecteurs normaux à $N$ en $x$.*

On appelle **sous-variété framed** de $M$ la donnée d'une sous-variété $N$ de $M$ et d'un framing pour $N$, on la note $(N, v)$. Dans la suite, on oubliera intentionnellement d'écrire le framing et on notera simplement $N$ si le contexte est clair.

Deux sous-variétés framed $(N, v)$ et $(N', v')$ d'une variété $M$ sont dit **framed-cobordantes** s'il existe un cobordisme $X \subset M \times [0,1]$ entre $N$ et $N'$ et un framing $u$ tel que

$$\begin{array}{rcl} u_i(x,t) & = & (v_i(x), 0) \text{ pour } (x,t) \in N \times [0,\varepsilon) \\ u_i(x,t) & = & (v'_i(x), 0) \text{ pour } (x,t) \in N' \times (1-\varepsilon, 1] \end{array}.$$

Le fait d'être framed-cobordant est une relation d'équivalence.

L'idée des variétés de Pontryagin est de voir une application $f : M \to S^p$ comme une sous-variété framed de $M$.

Soit donc une application $f : M \to S^p$. On peut supposer sans perte de généralités que le pôle nord $y$ de la sphère est une valeur régulière de $f$. Choisissons une base positive $(v_1, \dots, v_p)$ de l'espace tangent $T_yS^P$ de la sphère en ce point. Soit $x \in f^{-1}(y)$, la différentielle $df_x : T_xM \to T_yS^p$ envoie le complémentaire orthogonal de $T_xf^{-1}(y)$ isomorphiquement sur $T_yS^p$. Donc, il existe un unique vecteur $w_i(x) \in T_xf^{-1}(y)^\perp$ qui est envoyé par $df_x$ sur $v_i$. On obtient alors un framing de $f^{-1}(y)$ que l'on note usuellement $w = f^*v$.

La sous-variété framed $(f^{-1}(y), f^*v)$ est appelée la **variété de Pontryagin** associée à $f$. Rien ne justifie, a priori, l'article défini dans la phrase précédente. En fait, on aurait pu choisir n'importe quelle autre valeur régulière de $f$ pour faire cette construction, mais au final, les variétés de Pontryagin obtenues sont toutes framed-cobordantes. C'est l'idée du

**Théorème 4.3.** *Soit $z$ une autre valeur régulière de $f$ et $v'$ une base positive de $T_zS^p$, alors les variétés $(f^{-1}(y), f^*v)$ et $(f^{-1}(z), f^*v')$ sont framed-cobordantes.*

On a introduit les variétés de Pontryagin dans le but de classifier les classes d'homotopie d'applications $M \to S^p$.

**Théorème 4.4.** *Deux applications de $M$ dans $S^p$ sont homotopes si et seulement si leurs variétés de Pontryagin sont framed-cobordantes.*

La correspondance entre les classes d'homotopie et les classes de framed-cobordismes est bijective. On peut l'affirmer grâce au

**Théorème 4.5.** *Tout sous-variété framed $(N, v)$ de $M$ de codimension $p$ apparait comme variété de Pontryagin pour une application lisse $M \to S^p$.*

*Démonstration.* On renvoit à [Mil88] pour des preuves détaillées de ces trois résultats. □

4.2. **Un résultat méconnu de topologie : le théorème de lissage des cycles en codimension 2.** Dans la suite de cette partie, on travaillera sur des applications d'une variété de dimension 3 vers la sphère $S^2$. Par la partie qui précède, on sait que les classes d'homotopies de telles applications sont classifiées par les classes de cobordismes de sous-variété de codimension 2 de $M$. Voici un très beau résultat qui permet dans ce cas d'avoir une classification plus élégante. Je remercie vivement Bruno Sévennec pour l'aide qu'il m'a apporté sur la démonstration de ce résultat.

**Théorème 4.6.** *Soit $M$ une variété compacte de dimension 3. Soit $N$ et $N'$ deux sous-variétés fermées orientables de codimension 2 de $M$. Alors $N$ et $N'$ sont cobordantes si et seulement si elles sont homologues.*

*Démonstration.* La direction gauche-droite est immédiat. Si les variétés sont cobordantes, alors la classe d'homologie de l'intérieur du cobordisme rend les variétés homologues.

Montrons l'autre direction. Considérons deux fibrés en droites complexes $C^\infty$, $L$ et $L'$, sur $M$. Considérons deux sections $s$ et $s'$ respectivement de $L$ et $L'$ qui s'annulent sur $N$ et $N'$ respectivement. On peut alors calculer la première classe de Chern de $L$ et $L'$ à l'aide de ses sections. Leurs classes de Chern respectives sont alors Poincaré-duales aux classes d'homologie $[N]$ et $[N']$.

Supposons alors que c'est deux classes sont égales. Le fibré $L^* \otimes L'$ est alors trivial isomorphe à $M \times \mathbb{C}$. Le quotient $s'/s$ en est alors une section à zéros simples sur $N'$ et à pôles simples sur $N$. Soit $\arg(s'/s) : M \setminus (N \cup N') \to S^1$. L'intérieur du cobordisme est donné par une fibre générique de cette application.

En effet, on peut voir cette application comme la fibration d'un livre ouvert à reliure $N \cup N'$. Rapidement, un livre ouvert dans $M$ est la donnée d'une sous-variété $K$ de codimension 2 à fibré normal trivial, appelée reliure, et d'une fibration $\theta : M \setminus K \to S^1$ qui est la coordonnée angulaire sur un voisinage tubulaire trivial de $K$. □

**Remarque.** *Ce théorème peut être trouvé sous une forme un peu moins différentielle dans* [GM86].

4.3. **Classes d'homotopie de structures presque contact en dimension 3.** Soit une variété $M$ de dimension 3. Soit $\xi$ une structure de contact. Considérons une forme de contact $\alpha$ pour $\xi$. Le fibré tangent de cette variété est trivialisable. Et donc, on peut choisir pour chaque plan de la structure de contact le vecteur du champ de Reeb normalisé.

On a alors construit une application de $M$ vers $S^2$. Cette application dépend complètement la structure de contact $\xi$. Ainsi, la classe d'homotopie de cette application détermine la classe d'homotopie de champ de plans à laquelle $\xi$ appartient.

Par la construction de Pontryagin, on sait que les classes d'homotopies de telles applications sont déterminées par les classes d'équivalence de framed-cobordismes des variétés de Pontryagin induites. Dans notre cas, les variétés de Pontryagin sont des entrelacs framed. Ce sont alors des variétés de codimension 2 de $M$. Le théorème 4.5 nous affirme alors que les classes d'homotopie des applications $M \to S^1$ sont donnés par les classes d'homologie d'entrelacs de $M$ en tenant compte du framing.

On a alors obtenu que les classes d'homotopies de structures presque contact sont classifiées par $H_1(M, \mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}$. On a aussi la

**Proposition 4.7.** *En dimension 3, dans chaque classe d'homotopie de structure presque contact, il y a une structure de contact.*

4.4. **Classes d'homotopies de structures presque contact en dimension 5.** Soit $M$ une variété de dimension 5. Rappelons ce qu'est une structure presque contact sur $M$. Une structre presque contact sur $M$ est un triplé $(\eta, J, \varepsilon)$ consistant en un champ d'hyperplans $\eta \subset TM$ avec une structure de fibré complexe $J$ et un choix d'un sous-fibré orienté $\varepsilon \subset TM$ complémentaire à $\eta$ définissant la coorientation.

Une structure de fibré complexe $J$ sur un fibré vectoriel $E \to B$ consiste en la donnée d'une famille $J_b$ de structure complexe sur les fibres $E_b$ où $J_b$ varie de façon lisse.

En fait, se donner une structure presque contact induit une réduction du groupe structural du fibré tangent $SO(5)$ par le groupe $U(2) \times 1 \subset Gl(5, \mathbb{R})$. La conséquence immédiate est que une structure presque contact induit une orientation sur $M$.

Maintenant, une classe d'homotopie de structures presque contact est une classe d'homotopie de sections du fibré à groupe structural $SO(5)/U(2)$, c'est-à-dire des applications $M \to SO(5)/U(2)$.

On a le lemme suivant qui va nous permettre de simplifier ce quotient. (voir [Gei08] pour une démonstration de ce résultat et du suivant).

**Lemme 4.8.** *On a l'égalité suivante*

$$SO(5)/U(2) = SO(6)/U(3).$$

Ce lemme nous permet alors d'avoir un isomorphisme vers un espace connu

**Théorème 4.9.** *L'espace $SO(6)/U(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$.*

Ainsi, les classes d'homotopies de structures presque contact en dimension 5 sont données par les classes d'homotopie d'application $M \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$. Rappelons que l'on a la fibration de Hopf pour $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^7 \arrow[d] \\ & \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \end{tikzcd}$$

On cherche donc à relever l'application $M \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ en une application $M \to S^7$. Le problème de relèvement est le suivant

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & S^7 \arrow[d] \\ M \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \end{tikzcd}$$

La suite d'obstruction cohomologique est $c^{n+1} \in H^{n+1}(M, \pi_n(S^1))$, où chaque élément de la suite est défini si les termes précédent le sont. La seule obstruction est alors dans $H^2(M, \mathbb{Z})$ car $\pi_n(S^1) = 0$ sauf pour $n = 1$.

Ainsi, on a obtenu le théorème suivant

**Théorème 4.10.** *Si $H^2(M,\mathbb{Z})=0$, alors il n'y a qu'une seule classe d'homotopie de structure presque contact sur $M$.*

4.5. **Le cas des dimensions supérieures.** Les structures presque contact en plus grande dimension sont plus inaccessibles sur le plan de la classification homotopique. En effet, sur une variété de contact de dimension $2n+1$, en adaptant la démarche adaptée de la partie précédente, une structure presque contact est une réduction du fibré tangent de groupe structural $SO(2n+1)$ par $U(n)\times 1 \in Gl(2n+1,\mathbb{R})$. Donc, une classe d'homotopie de structure de contact correspondrait à une classe d'homotopie d'application $M \to SO(2n+1)/U(n)$. Pour la dimension 7, ce quotient est une quartique de dimension 6...

## Annexe A. Théorème de stabilité de Gray $S^1$-équivariant.

Dans certaines démonstrations de ce mémoire, on utilise le théorème de stabilité de Gray. Dans notre cas, on travaille avec des variétés de contact munies d'action du cercle $S^1$ telles que la structure de contact soit invariante sous cette action. On a alors un équivalent du théorème de stabilité de Gray

**Théorème A.1.** *Soit $M$ une variété munie d'une action lisse libre du cercle $S^1$. Supposons qu'il existe une famille de formes de contact $S^1$-invariantes $\alpha_t$, pour $t\in[0,1]$, sur $M$. Alors il existe une isotopie $S^1$-équivariante telle que* $\ker\alpha_t = T\Phi_t^* \ker\alpha_0$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de réaliser $\Phi_t$ comme le flot d'un champ de vecteurs $X_t$. L'équation devient $\Phi_t^*\alpha_t = f_t\alpha_0$ où $f_t : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

On différentie par rapport à $t$ :

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*\alpha_t = \frac{d}{dt}f_t\cdot\alpha_0.$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\Phi_t^*\alpha_t & = & \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Phi_{t+h}^*\alpha_{t+h}-\Phi_t^*\alpha_t}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Phi_{t+h}^*\alpha_{t+h}-\Phi_{t+h}^*\alpha_t+\Phi_{t+h}^*\alpha_t-\Phi_t^*\alpha_t}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0}\Phi_{t+h}^*(\frac{\alpha_{t+h}-\alpha_t}{h}) + \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Phi_{t+h}^*\alpha_t-\Phi_t^*\alpha_t}{h} \\ & = & \Phi_t^*(\dot\alpha_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t). \end{array}$$

où le point désigne la dérivation par rapport au temps.

On a donc

$$\Phi_t^*(\dot\alpha_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = \dot f_t\alpha_0.$$

D'où, par la formule de Cartan,

$$\Phi_t^*(\dot\alpha_t + \iota_{X_t}d\alpha_t + d\iota_{X_t}\alpha_t) = \frac{\dot f_t}{f_t}\Phi_t^*\alpha_t.$$

Donc,

$$\Phi_t^*(\dot\alpha_t + \iota_{X_t}d\alpha_t + d\iota_{X_t}\alpha_t) = \frac{d}{dt}(\ln(f_t))\Phi_t^*\alpha_t.$$

En composant à droite par $\Phi_t^{-1}$, on trouve

$$\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t + d\iota_{X_t}\alpha_t = \frac{d}{dt}\left(\ln(f_t)\right) \circ \Phi_t^{-1} \cdot \alpha_t.$$

On suppose que $X_t \in \ker \alpha_t$, alors

$$\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = \left[\frac{d}{dt}\left(\ln(f_t)\right) \circ \Phi_t^{-1}\right] \cdot \alpha_t.$$

En évaluant sur le champ de Reeb $R_t$, on a

$$\dot{\alpha}_t(R_t) = \left[\frac{d}{dt}\left(\ln(f_t)\right) \circ \Phi_t^{-1}\right].$$

Donc $X_t$ est solution de

$$\iota_{X_t}\alpha_t = 0 \text{ et } \dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = \dot{\alpha}_t(R_t) \cdot \alpha_t.$$

Comme $X_t$ est globalement définit, son flot aussi. On aura donc

$$\Phi_t^* \alpha_t = f_t \cdot \alpha_0.$$

Il ne nous reste plus qu'à voir que les $\Phi_t$ sont $S^1$-équivariantes. Tout d'abord, montrons que $[x_M, R_t] = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$, où $x_M$ est le générateur infinitésimal de l'action en $x$.

En effet,

$$\mathcal{L}_{x_M}\alpha_t(R_t) = 0 \text{ et } \mathcal{L}_{x_M}\iota_{R_t} d\alpha_t = 0.$$

Or,

$$\alpha_t([x_m, R, t]) = \mathcal{L}_{x_M}\iota_{R_t}\alpha_t - \iota_{R_t}\mathcal{L}_{x_M}\alpha_t.$$

D'où,

$$0 = \mathcal{L}_{x_M}\iota_{R_t}\alpha_t = \iota_{R_t}\mathcal{L}_{x_M}\alpha_t + \alpha_t([x_m, R, t]).$$

De plus,

$$0 = \mathcal{L}_{x_M}\iota_{R_t} d\alpha_t = \iota_{R_t}\mathcal{L}_{x_M}\alpha_t + d\alpha_t([x_m, R, t]).$$

Ainsi, par non-dégénérescence, on a $[x_M, R_t] = 0$. Par des calculs similaires, on montre que $[x_M, X_t] = 0$. Il reste à montrer que $\Phi_t$ commute avec l'action du cercle $S^1$. Pour ce faire, on va construire des champs de vecteurs, dont les flots commutent, à partir de $x_M$ et $X_t$.

Soit $Y(p,t) = X_t(p) + \partial_t$ et $Z(p,t) = x_M(p)$ deux champs de vecteurs sur $M \times [0,1]$. On a donc,

$$[Y, Z](p,t) = [X_t, x_M](p) + [\partial_t, x_M](p) = 0.$$

Donc, les flots de ces deux champs de vecteurs commutent. Or

$$\Phi_s^Y(p,t) = (\Phi_{s+t}(p), s+t) \text{ et } \Phi_s^Z(p,t) = (e^{isx} \cdot p, t).$$

Comme $[Y, Z] = 0$, alors $\Phi^Y \circ \Phi^Z = \Phi^Z \circ \Phi^Y$. Donc

$$\left(\Phi_{s+t}(e^{is'x}), s+t\right) = \left(e^{is'x}\Phi_{s+t}(p), s+t\right).$$

En prenant $s = 0$ et $s' = 1$, on trouve l'égalité

$$\Phi_t(e^{ix} \cdot p) = e^{ix}\Phi_t(p).$$

Donc $\Phi_t$ commute avec l'action de $S^1$ et donc $\Phi_t$ est $S^1$-équivariant. $\square$

## Références


[BW58] W. Boothby and H. Wang. On contact manifolds. *Ann. Math. (2)*, 68 :721–734, 1958.

[DG12] F. Ding and H. Geiges. Contact structures on principal circle bundles. *Bull. London Math. Soc.*, pages 1189–1202, 2012.

[Gei08] H. Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge University Press, 2008.

[Gir91] E. Giroux. Convexité en topologie de contact. *Commentarii mathematici Helvetici*, 66(4) :637–677, 1991.

[GM86] L. Guillou and A. Marin. *A la recherche de la topologie perdue*. Birkhauser, 1986.

[GS09] H. Geiges and A. Stipsicz. Contact structures on product five-manifolds and fibre sums along circles. *Mathematische Annalen*, December 2009.

[Hof93] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(1) :515–563, 1993.

[Kob56] S. Kobayashi. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group. *Tohoku Mathematical Journal*, 8(1) :29–45, 1956.

[Lut77] R. Lutz. Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois. *Annales de l'institut Fourier*, 27(3) :1–15, 1977.

[Mil88] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. University Press of Virginia, 1988.

[MNW13] P. Massot, K. Niederkrüger, and C. Wendl. Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds. *Invent. Math.*, 192(2) :287–373, May 2013.


*E-mail address*: `flavien@grycan.fr`