

Université de Strasbourg - UFR Mathématique-Informatique
Mémoire de master deuxième année
Mathématiques Fondamentales - Magistère de Mathématiques

Sous la direction de Thomas DELZANT

Un algorithme détectant les présentations de Dehn.

Audrey VONSEEL

Strasbourg, 15 juin 2014

Table des matières

1	Hyperbolicité et quasi-géodésique	5
1.1	Hyperbolicité	5
1.2	Quasi-géodésicité locale	6
1.3	Quasi-géodésicité; du local au global	8
2	Hyperbolicité; du local au global	10
2.1	Relation d'équivalence	11
2.2	Revêtement	12
2.3	Théorème	14
3	Hyperbolicité et isopérimétrie	14
4	Hyperbolicité, présentation de Dehn et α-présentation de Dehn	17
4.1	Hyperbolicité et présentation de Dehn	17
4.2	Hyperbolicité et α -présentation de Dehn	18
4.3	Résultat	19
5	Mot Dehn-réduit et α-présentation de Dehn	19
6	Algorithme	20

Introduction

On considère un groupe G et un ensemble générateur \mathcal{S} .

On note $F(\mathcal{S})$ le groupe libre sur \mathcal{S} . Une *lettre* est un élément de l'ensemble des générateurs et leurs inverses $\mathcal{S}^{\pm 1}$. Un *mot* w est alors une suite de lettres.

Les éléments de $F(\mathcal{S})$ sont des classes d'équivalence de mots en $\mathcal{S}^{\pm 1}$: deux mots sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini d'insertions et de suppressions de sous-mot de la forme ss^{-1} avec $s \in \mathcal{S}^{\pm 1}$. Un mot est dit *réduit* s'il ne contient pas de termes consécutifs de la forme ss^{-1} avec $s \in \mathcal{S}^{\pm 1}$. Il y a donc un unique mot réduit dans chaque classe d'équivalence et on peut voir les éléments de $F(\mathcal{S})$ comme des mots réduits. L'opération de groupe de $F(\mathcal{S})$ est donnée par la concaténation de mots et le mot vide est l'élément neutre du groupe.

Par ailleurs, si w est un mot en $\mathcal{S}^{\pm 1}$, on note $|w|$ sa *longueur*. De plus, on note $\|w\|$ la longueur du mot réduit représentant le même élément que w dans le groupe.

Soit \mathcal{R} un sous-ensemble de $F(\mathcal{S})$. On note $\mathcal{N}(\mathcal{R})$ la clôture normale de \mathcal{R} dans $F(\mathcal{S})$, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe normal de $F(\mathcal{S})$ contenant \mathcal{R} . On a une application $l : F(\mathcal{S}) \rightarrow G$ qui envoie tout mot en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ sur un élément du groupe G . Une *présentation du groupe* G est alors la donnée d'un ensemble générateur \mathcal{S} et d'un ensemble de mots $\mathcal{R} \subset F(\mathcal{S})$ tels que le noyau de l soit $\mathcal{N}(\mathcal{R})$. On la note généralement $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$. Une présentation est dite *finie* si l'ensemble des générateurs \mathcal{S} et l'ensemble des relations \mathcal{R} sont finis.

Par cette application, on dit que les mots d'une même classe d'équivalence *représentent* le même élément du groupe. Une *relation* est alors un mot représentant l'identité du groupe.

On remarque que toute relation w peut alors s'écrire dans $F(\mathcal{S})$ comme un produit de conjugués d'éléments de \mathcal{R} : $w = \prod_{i=1}^N p_i r_i^{\pm 1} p_i^{-1}$ où $p_i \in F(\mathcal{S})$ et $r_i \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Peu importe le nombre de relations, une présentation de groupe définit toujours un unique groupe à isomorphisme près ([MKS66]). Mais il est difficile d'extraire des informations précises sur le groupe ; comme par exemple savoir si le groupe est abélien ou fini. Cela vient en partie de la manière dont on a défini la relation d'équivalence. En effet, étant donnés deux mots, cela ne donne pas de procédure pour déterminer s'ils représentent le même élément du groupe.

Le problème consistant à décider si deux mots représentent le même élément du groupe (ou de façon équivalente, décider si un mot représente l'identité du groupe) est appelé *problème du mot* pour les groupes. C'est un des trois problèmes fondamentaux de décision formulé par M. Dehn en 1911. Il a été montré ([Nov55], [Mil92], [Sti93]) que, même dans le cas des groupes de présentation finie, c'est en général un problème indécidable : il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si deux mots sont égaux ou non. On peut par contre montrer que ce problème admet une solution pour de nombreuses familles de groupes ([DA85], [GG86]). Ainsi M. Dehn a fourni une solution au problème du mot pour les groupes de surfaces orientables de type fini. Il a prouvé que dans un groupe de surface tout mot non vide en les générateurs qui représente l'identité du groupe doit contenir au moins la moitié d'une relation ([Deh87] Paper 2).

Définition 0.1: (Présentation de Dehn) [Gre60] [Lyn66] [LS77] [Deh87]

Une présentation $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ d'un groupe G est dite une *présentation de Dehn* si tout mot réduit non vide représentant l'identité dans G contient un sous-mot u qui soit aussi un sous-mot d'un élément $r \in \bar{\mathcal{R}}^1$ et qui vérifie $|u| > \frac{1}{2}|r|$. On dit alors que \mathcal{R} est un *algorithme de Dehn*.

1. On note $\bar{\mathcal{R}}$ la réunion de l'ensemble des relations, de leurs inverses et de leurs conjugués cycliques.

Différentes formes de l'algorithme de Dehn pour résoudre le problème du mot pour un groupe sont présentées et comparées dans [GG86].

Définition 0.2: (Mot Dehn-réduit) [Gre60] [Lyn66] [LS77]

Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une présentation d'un groupe. Un mot w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ est dit *Dehn-réduit par rapport à la présentation* $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ si w ne contient pas de sous-mot u qui soit aussi un sous-mot d'un élément $r \in \mathcal{R}$ et qui vérifie $|u| > \frac{1}{2}|r|$.

Quand le contexte est clair, on parle simplement de mots *Dehn-réduits*.

On note que pour une présentation de Dehn, tout mot Dehn-réduit est non trivial. Si on a une présentation de Dehn pour un groupe, on a alors une solution pour le problème du mot pour ce groupe.

Définition 0.3: (α -présentation de Dehn) [Lys89]

Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Une présentation $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ d'un groupe G est dite une α -présentation de Dehn si tout mot en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ réduit non vide représentant l'identité dans G contient un sous-mot u qui est aussi un sous-mot d'un élément $r \in \mathcal{R}$ et qui vérifie $|u| > \alpha|r|$.

L'objectif de ce mémoire est de construire l'algorithme permettant de démontrer le théorème suivant :

Théorème 0.4: [Arz00] Il existe un algorithme permettant de déterminer si une présentation finie d'un groupe est une α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

Dans la première partie de ce mémoire, on rappelle différentes définitions de l'hyperbolicité tout en démontrant leur équivalence. On définit ensuite la notion de quasi-géodésie puis on donne plusieurs résultats s'y rapportant.

La deuxième partie est consacrée à la démonstration d'un théorème important qui permet de d'étendre l'hyperbolicité :

Théorème 0.5: [Gro87] [Sti93] Soit $\delta \geq 0$. Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une présentation finie d'un groupe G dont le maximum des longueurs des relations ρ est inférieur à δ . Soit X le diagramme de van Kampen sur le groupe G donné par $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$. Si X est $10^{10}\rho$ -localement δ -hyperbolique, alors X est (globalement) 200δ -hyperbolique.

Après quoi, dans la troisième partie, on démontre un autre résultat majeur de ce mémoire :

Théorème 0.6: [ABC⁺91] [BH99] Si G est un groupe de présentation finie $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ satisfaisant une inégalité isopérimétrique linéaire, alors il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que tout triangle géodésique dans le graphe de Cayley X de G soit δ -fin.

Dans la quatrième partie, on met en lien les différentes notions présentées précédemment. On obtient ainsi un résultat reliant groupe hyperbolique, présentation de Dehn et α -présentation de Dehn.

La cinquième partie est consacrée à la démonstration du lemme clé suivant :

Lemme 0.7: [Arz00] Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une α -présentation de Dehn finie d'un groupe G avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$. Soit $\rho = \max_{r \in \mathcal{R}} |r|$. Alors pour tout mot Dehn-réduit w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ et tout mot z en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ représentant le

même élément que w dans G , on a :

$$|z| \geq \frac{1}{\rho}|w|.$$

En particulier, $\|w\| \geq |z| \geq \frac{1}{\rho}|w|$, c'est-à-dire les mots Dehn-réduits sont des $(\rho, 0)$ -quasi-géodésiques.

La dernière partie sera, quant à elle, consacrée à l'algorithme. On utilise les différents résultats établis précédemment pour démontrer le théorème 0.4.

1 Hyperbolicité et quasi-géodésique

1.1 Hyperbolicité

Le but de ce paragraphe est de rappeler différentes notions d'hyperbolicité que l'on retrouve dans [Gro87], [CDP90], [GdlH90] ou encore [Bow91].

Définition 1.1: (Espace métrique géodésique) [Gro87]

Un *espace métrique géodésique* est un espace métrique dont tout couple de points est joint par une géodésique, c'est-à-dire un chemin dont la longueur est exactement la distance entre ces points.

Dans cet espace, la distance entre deux points x et y est notée $|x - y|$.

Exemple 1.1: Un graphe connexe est un espace métrique géodésique. On donne à chaque arête la longueur 1 de sorte que la longueur entre deux sommets du graphe soit le nombre d'arêtes composant un chemin entre ces deux points.

Définition 1.2: (Produit de Gromov) [Gro87]

Pour tout triplet de points x, y et z dans un espace métrique géodésique, le *produit de Gromov* est donné par :

$$\langle x, y \rangle_z = \frac{1}{2}(|x - z| + |y - z| - |x - y|)$$

Exemple 1.2: Considérons trois points x, y et z dans un arbre T , c'est-à-dire un graphe connexe sans boucle. Soient γ et η les géodésiques dans T joignant respectivement z à x et z à y . Alors $\langle x, y \rangle_z$ est la distance le long de γ (ou η) avant que les deux géodésiques ne se séparent.

Définition 1.3: (Espace métrique géodésique hyperbolique) [Gro87]

Un espace métrique géodésique X est dit *hyperbolique* s'il existe $\delta \geq 0$ tel que :

$$\forall x, y, z, t \in X \quad \langle x, y \rangle_t \geq \min(\langle x, z \rangle_t, \langle y, z \rangle_t) - \delta$$

ou de façon équivalente :

$$\forall x, y, z, t \in X \quad |x - y| + |z - t| \leq \max(|x - z| + |y - t|, |x - t| + |y - z|) + 2\delta$$

La définition suivante est généralement attribuée à E. Rips.

Définition 1.4: (Triangle δ -fin) [Rip82] [Gro87]

Soit $\delta \geq 0$. Un triangle géodésique dans un espace métrique X est dit *δ -fin* si chacun de ses côtés est contenu dans un δ -voisinage de la réunion des deux autres côtés.

Définition 1.5: (Espace métrique géodésique hyperbolique) [Gro87]

Un espace métrique géodésique X est dit *hyperbolique* s'il existe $\delta \geq 0$ tel que tout triangle géodésique soit δ -fin.

On vérifie maintenant que les deux définitions 1.3 et 1.5 ont bien du sens.

Théorème 1.6: [Gro87] Si un espace métrique géodésique X est δ -hyperbolique au sens de 1.3 alors il est 4δ -hyperbolique au sens de 1.5. Par ailleurs, si un espace métrique géodésique est δ -hyperbolique au sens de 1.5 alors il est δ -hyperbolique au sens de 1.3.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que l'espace métrique géodésique X soit δ -hyperbolique au sens de la définition 1.3. Soient x, y et z dans X tels que $\delta \leq \langle y, z \rangle_x$. On note $u \in [x, y]$ et $v \in [x, z]$ deux points situés à même distance $d \leq \delta$ de x . Alors on a :

$$\begin{aligned} \langle u, z \rangle_x &\geq \min(\langle u, y \rangle_x, \langle z, y \rangle_x) - \delta \geq d - \delta \\ \Rightarrow \langle u, v \rangle_x &\geq \min(\langle u, z \rangle_x, \langle v, z \rangle_x) - \delta \geq d - 2\delta \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(d + d - |u - v|) &\geq d - 2\delta \\ \Rightarrow |u - v| &\leq 4\delta \end{aligned}$$

Donc X est 4δ -hyperbolique au sens de la définition 1.5.

On suppose maintenant que les triangles sont δ -fins. Soient x, y, z et t des points de X . Alors les géodésiques $[t, x]$ et $[t, y]$ sont 2δ -proches jusqu'au point $\min(\langle x, z \rangle_t, \langle y, z \rangle_t)$. On a donc :

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - t| + |y - t| - 2 \min(\langle x, z \rangle_t, \langle y, z \rangle_t) + 2\delta \\ &\Rightarrow \min(\langle x, z \rangle_t, \langle y, z \rangle_t) - \delta \leq \langle x, y \rangle_t \end{aligned}$$

Donc X est δ -hyperbolique au sens de la définition 1.3. □

Définition 1.7: (Groupe hyperbolique) [Gro87]

Soit $\delta \geq 0$. Un groupe de type fini est dit *δ -hyperbolique* s'il existe un ensemble générateur \mathcal{S} du groupe tel que son graphe de Cayley par rapport à \mathcal{S} soit δ -hyperbolique.

On dit qu'un groupe est *hyperbolique* s'il est δ -hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.

On peut démontrer que si un graphe de Cayley est hyperbolique pour un système de générateur, il l'est pour tous.

Exemple 1.3: Les groupes libres sont hyperboliques. En effet, le graphe de Cayley d'un groupe libre par rapport à la présentation standard est un arbre et par définition, dans un arbre, tous les triangles sont 0-fins.

1.2 Quasi-géodésicité locale

Définition 1.8: (Quasi-géodésique et quasi-géodésique locale)

Soient $\lambda \geq 1$ et $c \geq 0$.

Un mot w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ est une (λ, c) -*quasi-géodésique* dans G si pour tout sous-mot u de w , on a $|u| \leq \lambda \|u\| + c$.

Un mot w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ est une (λ, c, L) -quasi-géodésique locale pour $L > 0$ si tout sous-mot de longueur au plus L est une (λ, c) -quasi-géodésique.

On donne tout d'abord le lemme d'approximation par les arbres dû à M.Gromov [Gro87] :

Lemme 1.9: (Lemme d'approximation par les arbres) [Gro87]

Soit X un espace métrique δ -hyperbolique. Soient $x_0, \dots, x_n, n+1$ points de X . Soit Y la réunion de n segments géodésiques joignant x_0 à chaque x_i . Il existe un arbre métrique T muni d'un point de base y_0 , de sommets privilégiés y_1, \dots, y_n et une application $f : Y \rightarrow T$ telle que :

1. la restriction de f à chaque segment $[x_0, x_i]$ est une isométrie sur son image $[y_0, y_i]$;
2. pour tout points x et y de Y , on a l'inégalité :

$$|x - y| - 2\delta \text{Log}_2(n) \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

On peut maintenant démontrer le lemme des quasi-géodésiques locales.

Lemme 1.10: [Gro87] [Del96] Soit x_0, x_1, \dots une suite (finie ou non) de points d'un espace métrique δ -hyperbolique.

1. S'il existe une constante A telle que pour tout i , $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min(|x_i - x_{i-1}|, |x_i - x_{i+1}|) - A - \delta$ alors $|x_i - x_j| \geq 2A|i - j|$.
2. Si de plus $A \geq 9\delta$ et si pour tout i on a $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} \leq A - \delta$, alors la géodésique brisée $\gamma = [x_n, x_{n+1}] \cup [x_{n+1}, x_{n+2}] \cup \dots \cup [x_{m-1}, x_m]$ est à une distance inférieure à $9\delta + A$ de toute géodésique $[x_n, x_m]$.

Démonstration. On va montrer que $|x_0 - x_{i+1}| \geq |x_0 - x_i| + 2A$ pour tout i en procédant par récurrence sur i .

Par définition, on a : $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} = \frac{1}{2} (|x_i - x_{i-1}| + |x_i - x_{i+1}| - |x_{i-1} - x_{i+1}|)$.

Comme on suppose que $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle_{x_i} < \frac{1}{2} \min(|x_i - x_{i-1}|, |x_i - x_{i+1}|) - A - \delta$, on obtient :

$$\begin{aligned} |x_i - x_{i+1}| &< |x_{i-1} - x_{i+1}| - 2A - 2\delta \\ |x_i - x_{i-1}| &< |x_{i-1} - x_{i+1}| - 2A - 2\delta \end{aligned}$$

On remarque que pour $i = 1$, la deuxième inégalité devient :

$$|x_1 - x_0| < |x_0 - x_2| - 2A - 2\delta$$

On a donc $|x_0 - x_2| \geq |x_0 - x_1| + 2A$ et la récurrence est initialisée.

Par ailleurs, pour tout i on a :

$$\begin{aligned} |x_{i-1} - x_{i+1}| &< |x_{i-1} - x_{i+1}| - 2A - 2\delta + |x_i - x_{i+1}| \\ \Rightarrow 2A + 2\delta &< |x_i - x_{i+1}| \end{aligned} \quad (1)$$

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence $|x_0 - x_{i+1}| \geq |x_0 - x_i| + 2A$ soit vérifiée pour i et montrons que $|x_0 - x_{i+2}| \geq |x_0 - x_{i+1}| + 2A$.

Par définition de l'hyperbolicité, on a :

$$|x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| \leq \max(|x_0 - x_i| + |x_{i+1} - x_{i+2}|, |x_0 - x_{i+2}| + |x_i - x_{i+1}|) + 2\delta \quad (2)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| > |x_0 - x_i| + 2A + |x_{i+1} - x_{i+2}|$$

Donc (2) s'écrit :

$$|x_0 - x_{i+1}| + |x_i - x_{i+2}| \leq |x_0 - x_{i+2}| + |x_i - x_{i+1}| + 2\delta$$

En utilisant le résultat (1), on obtient alors :

$$|x_0 - x_{i+2}| \geq |x_0 - x_{i+1}| + 2A$$

Par récurrence on peut donc conclure que $|x_0 - x_{i+1}| \geq |x_0 - x_i| + 2A$ pour tout i . On en déduit alors que $|x_i - x_j| \geq 2A|i - j|$ et cela démontre le premier point.

On va maintenant démontrer le deuxième point. Pour cela, on va procéder par récurrence sur le nombre $m - n + 1$ de points de la géodésique brisée. Si $m - n + 1 = 3$ la géodésique brisée reste $(9\delta + A)$ -proche d'une géodésique joignant ses extrémités. En effet, d'après les hypothèses de l'énoncé, on a alors $\langle x_n, x_m \rangle_{x_{n+1}} \leq A - \delta < 9\delta + A$.

Soit $k \geq 3$. Supposons que pour $m - n + 1 \leq k$, la géodésique brisée soit à une distance inférieure à $9\delta + A$ de toute géodésique de mêmes extrémités. On va montrer que $[x_n, x_{n+1}] \cup \dots \cup [x_k, x_{k+1}]$ est à une distance inférieure à $9\delta + A$ de $[x_n, x_{k+1}]$. Pour cela, on utilise le lemme d'approximation par les arbres. On considère donc l'arbre formé par les 4 points x_n, x_{k-1}, x_k et x_{k+1} . Il est exact à 4δ -près. D'après l'hypothèse de récurrence, $[x_n, x_{n+1}] \cup \dots \cup [x_{k-1}, x_k]$ est à une distance inférieure à $9\delta + A$ de $[x_n, x_k]$. Par ailleurs, la géodésique $[x_n, x_k]$ et la géodésique $[x_n, x_{k+1}]$ sont à une distance inférieure à 2δ . On peut conclure que la distance entre $[x_n, x_{n+1}] \cup \dots \cup [x_k, x_{k+1}]$ et $[x_n, x_{k+1}]$ est inférieure à $9\delta + A + 2\delta - 4\delta < 9\delta + A$.

On a ainsi montré le deuxième point. □

1.3 Quasi-géodésicité ; du local au global

On donne tout d'abord un résultat connu.

Théorème 1.11: (Stabilité des quasi-géodésiques locales)

Soit $\delta \geq 0$. Soient $\lambda \geq 1$ et $c \geq 0$ deux réels. Il existe des constantes L et ϵ dépendant uniquement de λ, c et δ telles que pour tout espace géodésique δ -hyperbolique, toute (λ, c, L) -quasi-géodésique locale reste dans le ϵ -voisinage de toute géodésique joignant ses extrémités.

Démonstration. Une démonstration en est fait dans [CDP90] ou [Cou10]. □

Lemme 1.12: [CDP90] Soit X un espace métrique. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin continu et $[x, y]$ un segment géodésique reliant les extrémités $x = \gamma(a)$ et $y = \gamma(b)$ de γ . Soit $K \geq 0$ une constante telle que γ soit contenu dans le K -voisinage de $[x, y]$. Alors $[x, y]$ est contenu dans le $2K$ -voisinage de γ .

Démonstration. On considère z un point sur $[x, y]$. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à γ . On peut trouver un point u sur l'image de γ tel que $|x - u| = |x - z|$. Par hypothèse, il existe un point p sur $[x, y]$ tel que $|u - p| \leq K$. On obtient donc :

$$|p - z| = ||p - x| - |x - z|| = ||p - x| - |x - u|| \leq |p - u| \leq K$$

On peut donc en conclure que $|u - z| \leq |u - p| + |p - z| \leq 2K$, ce qui démontre le lemme. □

Ce lemme va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.13: (Quasi-géodésicité locale implique quasi-géodésicité globale) [CDP90] [Can84]
Soit $\delta \geq 0$. Soit G un groupe δ -hyperbolique. Pour tout couple (λ, c) (où $\lambda \geq 1$ et $c \geq 0$), il existe un nombre réel L et un couple (λ', c') tels que toute (λ, c, L) -quasi-géodésique locale soit une (λ', c') -quasi-géodésique.

Démonstration. D'après le théorème 1.11, il existe deux nombres \tilde{L} et ϵ , qui ne dépendent que de λ, c et δ tels que toute (λ, c, \tilde{L}) -quasi-géodésique locale w est contenue dans le ϵ -voisinage de toute géodésique joignant ses extrémités.

Soit $L > \max(\tilde{L}, 2(4\epsilon\lambda^2 + 8\epsilon\lambda + c\lambda + c))$. On va montrer que L vérifie les propriétés recherchées. On fixe X un graphe de Cayley associé au groupe G . On paramètre w par $f : [a, b] \rightarrow X$ et on note $x = f(a)$ et $y = f(b)$ les extrémités de w dans X . Soit $[x, y]$ un segment géodésique joignant les points x et y .

Soit $L' = \frac{L}{2}$. On découpe $[a, b]$ en n intervalles d'extrémités $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tels que pour tout $i < n-1$ on ait $\text{long}f([a_i, a_{i+1}]) = L'$ et $\text{long}f([a_{n-1}, a_n]) \leq L'$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on note $x_i = f(a_i)$. On a alors pour tout $i < n-1$, $\text{long}f([a_i, a_{i+1}]) = |x_i - x_{i+1}| = L'$ et $\text{long}f([a_{n-1}, a_n]) = |x_{n-1} - x_n| \leq L'$. Soit p_i la projection de x_i sur $[x, y]$ c'est-à-dire un point sur $[x, y]$ vérifiant $\|x_i - p_i\| = d(x_i, [x, y])$.

Remarquons le fait suivant :

Lemme 1.14: Les points p_0, p_1, \dots, p_n se suivent dans cet ordre sur le segment $[x, y]$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un indice i pour lequel des projections p_i et p_{i+2} soient du même côté de p_{i+1} sur $[x, y]$. Par quasi-géodésicité locale de $f([a_i, a_{i+1}])$, on a :

$$\begin{aligned} c + \lambda\|x_i - x_{i+1}\| &\geq L' \\ \|x_i - x_{i+1}\| &\geq (L' - c)/\lambda \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\|p_i - p_{i+1}\| \geq (L' - c)/\lambda - 2\epsilon \quad (3)$$

On pose $\alpha = (L' - c)/\lambda - 2\epsilon$. Soit p un point de $[x, y]$ situé entre p_i et p_{i+1} tel que $\|p - p_{i+1}\| = \frac{\alpha}{2}$. Alors par (3) on obtient $\|p_i - p\| \geq \frac{\alpha}{2}$.

Considérons maintenant le chemin γ défini comme étant la réunion $[x, p_i] \cup [p_i, x_i] \cup f([a_i, a_{i+1}]) \cup [x_{i+1}, p_{i+1}] \cup [p_{i+1}, y]$. (On rappelle que $f([a_i, a_{i+1}])$ désigne la partie de l'image de f située entre les points x_i et x_{i+1} .)

On remarque que tout point de ce chemin γ est à une distance inférieure à ϵ du segment géodésique $[x, y]$. Ensuite le lemme 1.12 nous donne l'existence un point y_i sur γ tel que $\|p - y_i\| \leq 2\epsilon$. On va montrer que ce point est nécessairement sur $f([a_i, a_{i+1}])$.

Pour cela, supposons que le point y_i ne soit pas sur $f([a_i, a_{i+1}])$. Par inégalité triangulaire on a alors :

$$\|p - y_i\| \geq \|p - p_i\| - \|p_i - y_i\| = \frac{\alpha}{2} - \epsilon$$

On obtient ainsi $\frac{\alpha}{2} - \epsilon \leq 2\epsilon$. On en déduit que $(L' - c)/\lambda - 2\epsilon \leq 6\epsilon$ et donc $L \leq 16\lambda\epsilon + 2c$, ce qui contredit le choix de L . Le point y_i se trouve ainsi sur $f([a_i, a_{i+1}])$.

De façon analogue, on peut montrer qu'il existe un point y_{i+1} sur $f([a_{i+1}, a_{i+2}])$ vérifiant $|p - y_{i+1}| \leq 2\epsilon$. On a alors :

$$\|y_i - y_{i+1}\| \leq \|y_i - p\| + \|p - y_{i+1}\| \leq 4\epsilon$$

La longueur du sous-chemin de l'image de f compris entre y_i et x_{i+1} est supérieure à $\|y_i - x_{i+1}\|$. Or, par inégalité triangulaire, on a que $\|y_i - y_{i+1}\| \geq \frac{\alpha}{2} - 3\epsilon$. De même, la longueur du sous-chemin de l'image de f compris entre y_{i+1} et x_{i+1} est supérieure à $\frac{\alpha}{2} - 3\epsilon$. On peut alors en déduire que la longueur du sous-chemin de l'image de f entre y_i et y_{i+1} est supérieure à $\alpha - 6\epsilon$. Or cette longueur est majorée par L , donc par géodésicité locale on obtient :

$$(\alpha - 6\epsilon - c)/\lambda \leq \|y_i - y_{i+1}\| \leq 4\epsilon$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (L' - c)/\lambda - 8\epsilon - c &\leq 4\epsilon\lambda \\ \Rightarrow L &\leq 2(4\epsilon\lambda^2 + 8\epsilon\lambda + c\lambda + c) \end{aligned}$$

Ceci contredit le choix de L et le lemme est démontré. \square

Les points p_0, p_1, \dots, p_n se suivent donc dans cet ordre sur le segment $[x, y]$. Par ailleurs, on a :

$$\|x - y\| = \sum_{i=1}^n \|p_i - p_{i+1}\|$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, la géodésicité locale implique :

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \lambda \|x_i - x_{i+1}\| + c$$

Or l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\|x_i - x_{i+1}\| \leq \|x_i - p_i\| + \|p_i - p_{i+1}\| + \|p_{i+1} - x_{i+1}\| \leq \|p_i - p_{i+1}\| + 2\epsilon$$

On en déduit alors que :

$$|x_i - x_{i+1}| \leq \lambda(\|p_i - p_{i+1}\| + 2\epsilon) + c = \lambda\|p_i - p_{i+1}\| + 2\epsilon\lambda + c$$

En sommant sur les n points on obtient :

$$|x - y| \leq \lambda\|x - y\| + n(2\epsilon\lambda + c)$$

Par ailleurs, on rappelle que par définition de n , on a $n - 1 \leq \frac{|x-y|}{L'}$. On peut alors en conclure que :

$$|x - y| \leq \lambda\|x - y\| + \left(\frac{|x-y|}{L'} + 1\right)(2\epsilon\lambda + c)$$

Cette inégalité nous indique donc que w est une (λ', c') -quasi-géodésique avec $\lambda' = \lambda$ et $c' \geq \left(\frac{|x-y|}{L'} + 1\right)(2\epsilon\lambda + c)$ deux constantes qui dépendent uniquement de δ , λ et c . Cela conclut la démonstration de ce théorème. \square

2 Hyperbolicité; du local au global

On va maintenant montrer que l'hyperbolicité locale induit l'hyperbolicité globale. Pour cela, on va montrer une série de résultats intermédiaires.

2.1 Relation d'équivalence

Soit G un groupe de présentation finie $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ dont le maximum des longueurs des relations est ρ . Soit $\delta \geq 0$ tel que $\delta < 10^3\rho$. On note X le diagramme de van Kampen de G associé à cette présentation. On observe alors que X est simplement connexe.

Définition 2.1: (Localement hyperbolique)

Soit X un espace de longueur. On dit que X est v -localement δ -hyperbolique si toute boule de rayon v est δ -hyperbolique.

On suppose maintenant que X est un espace $10^{10}\rho$ -localement δ -hyperbolique. On va établir une relation d'équivalence.

Soit $10^{10}\rho > \sigma \geq 10^4\delta$. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ et $\gamma' : [a', b'] \rightarrow X$ deux σ -géodésiques locales. On dit que γ et γ' restent D -proches l'une de l'autre s'il existe une application non décroissante $\theta : [a, b] \rightarrow [a', b']$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\theta(a) = a'$ et $\theta(b) = b'$,
2. pour tout $s \in [a, b]$, $|\gamma(s) - \gamma' \circ \theta(s)| < D$,
3. pour tout $s, t \in [a, b]$, si $|s - t| \leq \sigma/2$ alors $|\theta(s) - \theta(t)| < \sigma$.

On va montrer que si deux σ -géodésiques locales sont 200δ -proches, alors elles sont en fait bien plus proches. Pour cela, on démontre un résultat un peu plus général :

Proposition 2.2: Soient $10^{10}\rho > \sigma \geq 10^4\delta$ et $d < 50\delta$. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ et $\gamma' : [a', b'] \rightarrow X$ deux σ -géodésiques locales. On note x et y (respectivement x' et y') les extrémités de γ (respectivement γ'). On suppose que $\max\{|x - x'|, |y - y'|\} \leq d$. Si γ et γ' sont 200δ -proches, alors ils sont $(\max\{|x - x'|, |y - y'|\}, 4\delta) + 8\delta$ -proches.

Démonstration. On note $\tau = \sigma/25$. Les chemins γ et γ' sont 200δ -proches. Il existe donc une application non décroissante $\theta : [a, b] \rightarrow [a', b']$ satisfaisant les propriétés 1., 2. et 3. En particulier, pour tout $t \in [a, b]$, on a $|\gamma(t) - \gamma' \circ \theta(t)| < 200\delta$. Le point $\gamma(t)$ est en fait bien plus proche de γ' . On affirme que pour tout $t \in [a + \tau, b - \tau]$, il existe $t' \in [\theta(t - \tau), \theta(t + \tau)]$ tel que $|\gamma(t) - \gamma'(t')| \leq 4\delta$. On note que $2\tau \leq \sigma/4$. Donc γ et γ' restreints à $[t - \tau, t + \tau]$ et $[\theta(t - \tau), \theta(t + \tau)]$ sont des géodésiques contenues dans une boule B de rayon σ . Par hypothèse, la boule B est δ -hyperbolique, on obtient donc l'inégalité suivante :

$$\langle \gamma' \circ \theta(t - \tau), \gamma' \circ \theta(t + \tau) \rangle_{\gamma(t)} \leq \langle \gamma(t - \tau), \gamma(t + \tau) \rangle_{\gamma(t)} + 2\delta = 2\delta$$

La distance entre $\gamma(t)$ et γ' restreint à $[\theta(t - \tau), \theta(t + \tau)]$ est inférieure ou égale à 4δ . L'affirmation est donc démontrée.

On considère maintenant une subdivision $a = t_0 \leq \dots \leq t_m = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, m - 2\}$, $|t_{i+1} - t_i| = 2\tau$ et $2\tau \leq |t_m - t_{m-1}| \leq 4\tau$. Tout d'abord, on note $t'_0 = a'$ et $t'_m = b'$. D'après l'affirmation faite précédemment, pour tout $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ il existe $t'_i \in [\theta(t_i - \tau), \theta(t_i + \tau)]$ tels que $|\gamma(t_i) - \gamma'(t'_i)| \leq 4\delta$. On en déduit l'inégalité suivante pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$:

$$|\gamma(t_i) - \gamma'(t'_i)| \leq \max\{|x - x'|, |y - y'|\}, 4\delta < 100\delta$$

Soit $i \in \{1, \dots, m - 2\}$. On remarque que par construction $t_i + \tau = t_{i+1} - \tau$. Comme l'application θ est non décroissante, on obtient :

$$\theta(t_i - \tau) \leq t'_i \leq \theta(t_i + \tau) = \theta(t_{i+1} - \tau) \leq t'_{i+1} \leq \theta(t_{i+1} + \tau)$$

Par ailleurs, $|(t_{i+1} - \tau) - (t_i + \tau)| = 4\tau \leq \sigma/4$. Par définition de θ , on a alors :

$$|t'_{i+1} - t'_i| \leq |\theta(t_{i+1} + \tau) - \theta(t_i - \tau)| \leq \sigma$$

Les mêmes résultats sont valables pour $i = 0$ et $i = m - 1$. On peut alors en conclure que $a' = t'_0 \leq \dots \leq t'_m = b'$ est une subdivision de $[a', b']$ qui vérifie pour tout $i \in \{0, \dots, m - 1\}$, $|t'_{i+1} - t'_i| \leq \sigma$.

En particulier, γ restreint à $[t_i, t_{i+1}]$ et γ' restreint à $[t'_i, t'_{i+1}]$ sont des géodésiques contenues dans une boule de rayon σ . Tout ce passe donc comme si l'on était dans un espace δ -hyperbolique. La fonction distance est donc quasi-convexe (Résultat bien connu [CDP90]) :

$$|\gamma(t) - \gamma' \circ \theta(t)| < \max\{|x - x'|, |y - y'|, 4\delta\} + 8\delta$$

Par ailleurs, pour tout $s, t \in [a, b]$ tels que $|s - t| \leq \sigma/2$, on a $|\theta(s) - \theta(t)| \leq |s - t| + 2D < \sigma$. Les trois propriétés sont ainsi vérifiées. On peut donc en conclure que les deux restrictions sont $(\max\{|x - x'|, |y - y'|, 4\delta\} + 8\delta)$ -proches. Par concaténation, on trouve alors que γ et γ' sont $(\max\{|x - x'|, |y - y'|, 4\delta\} + 8\delta)$ -proches. \square

Soit $\sigma \geq 10^4\delta$. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ et $\gamma' : [a', b'] \rightarrow X$ deux σ -géodésiques locales. On définit la relation suivante : γ et γ' sont en relation si elles ont mêmes extrémités et restent 200δ -proches.

La relation est clairement réflexive et symétrique. La transitivité découle quant à elle de la proposition 2.2 avec $d = 0$. En effet, soient γ, γ' et γ'' trois σ -géodésiques locales. Si γ et γ' sont en relation alors ils sont 12δ -proches. De même, si γ' et γ'' sont en relation, ils sont 12δ -proches. Donc γ et γ'' sont 200δ -proches.

2.2 Revêtement

On rappelle que l'on considère X un espace $10^{10}\rho$ -localement δ -hyperbolique et simplement connexe. On fixe maintenant un point de base $x_0 \in X$. On note alors X' l'ensemble des σ -géodésiques locales issues de x_0 avec $\sigma > 10^4\delta$. On munit ensuite X' de la relation d'équivalence suivante : γ_0 et γ_1 dans X' sont équivalentes si elles ont mêmes extrémités et restent 200δ -proches. On note alors \tilde{X} l'ensemble des classes d'équivalence. Soit γ dans X' , on note $[\gamma]$ sa classe d'équivalence. De plus, on note \tilde{x}_0 le point de \tilde{X} représenté par le chemin constant égal à x_0 . On définit l'application $\pi : X' \rightarrow X$ comme l'application qui envoie tout chemin sur son extrémité. Cela induit alors une application $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

On va montrer que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement connexe par arc.

Tout d'abord, définissons une topologie sur \tilde{X} . Soit $\tilde{x} = [\gamma]$ un point de \tilde{X} . Soit ϵ une constante. On définit $U_{\tilde{x}, \epsilon}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence $\tilde{x}' = [\gamma'] \in \tilde{X}$ telles que γ et γ' soient 200δ -proches et $|p(\tilde{x}) - p(\tilde{x}')| < \epsilon$.

Lemme 2.3: [Cou13] L'ensemble $\{U_{\tilde{x}, \epsilon}\}$ où $\tilde{x} \in \tilde{X}$ forme une base d'ouverts de \tilde{X} .

Démonstration. Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \in U_{\tilde{x}, \epsilon}$. Donc $\{U_{\tilde{x}, \epsilon}\}$ recouvre \tilde{X} .

Soit $\tilde{y} = [\nu]$ un point de $U_{\tilde{x}, \epsilon} \cap U_{\tilde{x}', \epsilon'}$ où $\tilde{x} = [\gamma]$, $\tilde{x}' = [\gamma']$ sont deux points de \tilde{X} . Par définition, il existe η tel que $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| + \eta < \epsilon$ et $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x}')| + \eta < \epsilon$. On va montrer que $U_{\tilde{y}, \eta} \subset U_{\tilde{x}, \epsilon} \cap U_{\tilde{x}', \epsilon'}$. Soit $\tilde{z} = [\mu]$ un point de $U_{\tilde{y}, \eta}$. Par définition, μ et ν sont 200δ -proches. De plus, $|p(\tilde{z}) - p(\tilde{y})| < \eta$. Comme $\tilde{y} \in U_{\tilde{x}, \epsilon}$, ν et γ sont 200δ -proches et $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| < \epsilon$. Alors, par transitivité, μ et γ sont 200δ -proches et on a :

$$|p(\tilde{z}) - p(\tilde{x})| \leq |p(\tilde{z}) - p(\tilde{y})| + |p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| < |p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| + \eta < \epsilon$$

Donc $\tilde{z} \in U_{\tilde{x}, \epsilon}$. De même, on peut montrer que $\tilde{z} \in U_{\tilde{x}', \epsilon'}$. On a montré que $\{U_{\tilde{x}, \epsilon}\}$ forme une base d'ouverts pour la topologie. \square

Lemme 2.4: [Cou13] L'espace \tilde{X} est connexe par arc.

Démonstration. Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$. On prend $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un élément de X' représentant \tilde{x} . On définit un chemin dans X joignant \tilde{x}_0 à \tilde{x} comme suit :

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \tilde{X} \\ t &\mapsto [\gamma|_{[a, t]}] \end{aligned}$$

On affirme que F est continue. Soit $t \in [a, b]$ et soit ϵ une constante. Soit $s \in [a, b]$ tel que $|s - t| < \epsilon$. Comme γ est paramétré par la longueur d'arc, $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \epsilon$.

Les restrictions de γ à $[a, s]$ et $[a, t]$ sont encore 200δ -proches. De plus, $|p \circ F(s) - p \circ F(t)| = |\gamma(s) - \gamma(t)| < \epsilon$. Donc $F(s) \in U_{F(t), \epsilon}$. Cela montre que F est continue. Ainsi tout point de \tilde{X} peut être joint à \tilde{x}_0 par un chemin continu donc \tilde{X} est connexe par arcs. \square

Lemme 2.5: [Cou13] L'application p est continue.

Démonstration. Soit $x \in X$ et soit ϵ une constante. Par construction, $p^{-1}(B(x, \epsilon))$ est exactement l'union de tous les $\{U_{\tilde{x}, \epsilon}\}$ où $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Donc p est continue. \square

Lemme 2.6: [Cou13] Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et soit $\epsilon < 100\delta$ une constante. Alors l'application p induit un homéo-morphisme de $U_{\tilde{x}, \epsilon}$ sur $B(p(\tilde{x}), \epsilon)$.

Démonstration. Par construction, $p(U_{\tilde{x}, \epsilon}) \subset B(p(\tilde{x}), \epsilon)$. Soit $\gamma \in X'$ tel que $[\gamma] = \tilde{x}$. Soit $y \in B(p(\tilde{x}), \epsilon)$. γ est donc une σ -géodésique locale et $|p(\tilde{x}) - y| < \epsilon$. On considère une σ -géodésique locale ν joignant le point de base de γ à y qui soit 200δ -proche de γ . Elle existe car $\epsilon < 100\delta$. Donc ν définit un point $\tilde{y} \in U_{\tilde{x}, \epsilon}$ dont l'image par p est y . Ainsi p envoie $U_{\tilde{x}, \epsilon}$ surjectivement sur $B(p(\tilde{x}), \epsilon)$.

Soit $\tilde{y} = [\nu]$ et $\tilde{y}' = [\nu']$ deux points de $p(U_{\tilde{x}, \epsilon})$ tels que $p(\tilde{y}) = p(\tilde{y}')$. Par construction, ν (respectivement ν') reste 200δ -proche de γ . De plus, $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| < \epsilon$ et $|p(\tilde{y}') - p(\tilde{x}')| < \epsilon$. Par transitivité, ν et ν' restent donc 200δ -proches l'un de l'autre. Comme ν et ν' ont mêmes extrémités par hypothèse, ν et ν' sont équivalents. Donc $\tilde{y} = \tilde{y}'$ et p est injective sur $U_{\tilde{x}, \epsilon}$.

Donc p induit une bijection de $U_{\tilde{x}, \epsilon}$ sur $B(x, \epsilon)$. Il reste à montrer que c'est un homéomorphisme. Comme p est continue, il suffit de montrer que p est ouverte. On remarque que pour tout $U_{\tilde{y}, \eta} \subset U_{\tilde{x}, \epsilon}$, $p(U_{\tilde{y}, \eta})$ est un ensemble ouvert d'après la première partie de la démonstration. \square

Proposition 2.7: [DG08] L'application $p : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement.

Démonstration. Tout $x \in X$ peut être joint à x_0 par une géodésique. Donc p est surjectif. Comme p est continue, quelque soient $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et ϵ une constante, il induit un homéomorphisme de $U_{\tilde{x}, \epsilon}$ dans $B(p(\tilde{x}), \epsilon)$.

Il suffit de montrer que pour tout \tilde{x} et \tilde{x}' dans \tilde{X} tels que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ et pour toute constante ϵ , si $U_{\tilde{x}, \epsilon} \cap U_{\tilde{x}', \epsilon}$ est non vide alors $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

Soient $\gamma, \gamma' \in X'$ représentant respectivement \tilde{x} et \tilde{x}' . Supposons qu'il existe $\tilde{y} = [\nu]$ un point de $U_{\tilde{x}, \epsilon} \cap U_{\tilde{x}', \epsilon'}$. Par définition, ν est 200δ -proche de γ (respectivement γ') et $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x})| < \epsilon$ et $|p(\tilde{y}) - p(\tilde{x}')| < \epsilon$. Par transitivité, γ et γ' restent 200δ -proches et $|p(\tilde{x}) - p(\tilde{x}')| < 2\epsilon$. Donc γ et γ' sont équivalents et ont donc mêmes extrémités. Donc $\tilde{x} = \tilde{x}'$. □

2.3 Théorème

Théorème 2.8: [Gro87] [Sti93] Soit $\delta \geq 0$. Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une présentation finie d'un groupe G et ρ le maximum des longueurs des relations. Soit X le diagramme de van Kampen sur le groupe G donné par $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$. Si X est $10^{10}\rho$ -localement δ -hyperbolique, alors X est (globalement) 200δ -hyperbolique.

Démonstration. Considérons un triangle géodésique xyz dans X . Prenons un point $y_1 \in [x, y]$ à distance supérieure à 100δ de $[y, z]$. Soit z_1 le point de $[x, z]$ le plus proche de y_1 . La réunion des trois segments $[y, y_1] \cup [y_1, z_1] \cup [z_1, z]$ forme une géodésique locale. En prenant $t = 0$ dans la proposition 2.2, on sait que toute géodésique γ joignant y à z est dans le 12δ -voisinage de ce segment. On a alors deux géodésiques locales γ et $[y, z]$ de mêmes extrémités et homotopes. Elles définissent donc le même point du revêtement de X en y . Comme le diagramme de van Kampen est simplement connexe, on sait que γ et $[y, z]$ sont 200δ -proches. □

3 Hyperbolicité et isopérimétrie

Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une présentation finie d'un groupe G . On rappelle que tout mot w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ représentant l'identité dans G peut s'écrire $w = \prod_{i=1}^N p_i r_i^{\pm 1} p_i^{-1}$ dans $F(\mathcal{S})$, où $p_i \in F(\mathcal{S})$ et $r_i \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Définition 3.1: (Aire d'un mot) [Gro87]

Soit w un mot en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ représentant l'identité du groupe. L'aire de w , notée $A(w)$, est $N + |w|$ où N est le nombre minimal nécessaire à écrire $w = \prod_{i=1}^N p_i r_i^{\pm 1} p_i^{-1}$ dans $F(\mathcal{S})$ comme ci-dessus.

Ainsi définie, il n'existe qu'un nombre fini de mots triviaux d'aire inférieur à une constante donnée.

Cette notion d'aire nous permet maintenant de parler d'inégalité isopérimétrique.

Théorème 3.2: [ABC⁺91] [BH99] Si G est un groupe de présentation finie $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ satisfaisant une inégalité isopérimétrique linéaire, alors il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que tout triangle géodésique dans le graphe de Cayley X de G soit δ -fin.

Démonstration. On suppose qu'il n'existe pas de constante δ telle que tout triangle géodésique soit δ -fin. Soit K la constante associée à la fonction de Dehn linéaire pour la présentation de finie $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ du groupe G . Soit ρ le maximum des longueurs des relations de \mathcal{R} .

On peut supposer que $\rho > 1$ car dans le cas contraire, G est un groupe libre et il est donc hyperbolique. Par ailleurs, on peut supposer que $K \geq 1$.

Pour tout $r > 0$, il existe un triangle géodésique xyz dans X et un point ω sur le segment géodésique $[x, y]$ tels que :

$$\min(d(\omega, [x, z]), d(\omega, [y, z])) > 2r \quad (4)$$

Si xyz est dégénéré, c'est-à-dire $[x, y] \cap [y, z] \setminus y \neq \emptyset$ alors xyz contient un triangle géodésique non dégénéré (ou un bigone) dans lequel la condition (4) est satisfaite. Il suffit donc de considérer les triangles géodésiques non dégénérés et les bigones.

Soit B_r la boule de centre ω et de rayon r dans le graphe de Cayley X . Soit ϵ une constante. Supposons que $r > 10^{10}\epsilon$.

Prenons $x' \in [x, \omega]$ à distance minimale de ω de sorte que $d(x', [x, z] \cap [y, z]) = 2\epsilon$. De même, prenons $y' \in [\omega, y]$ à distance minimale de ω tel que $d(y', [x, z] \cap [y, z]) = 2\epsilon$. On prend ensuite $x'' \in [x, z]$ et $y'' \in [y, z]$ les points les plus proches de z tels que $|x' - x''| = 4\epsilon$ et $|y' - y''| = 4\epsilon$. On prend alors $z' \in [x'', z]$ et $z'' \in [y'', z]$ les points les plus proches de z tels que les 2ϵ -voisinages de l'intérieur de $[x'', z']$ et $[y'', z'']$ soient disjoints. On a alors $|z' - z''| = 4\epsilon$.

Il y a alors trois cas à considérer.

Premier cas.

Dans ce cas, la construction décrite précédemment est possible.

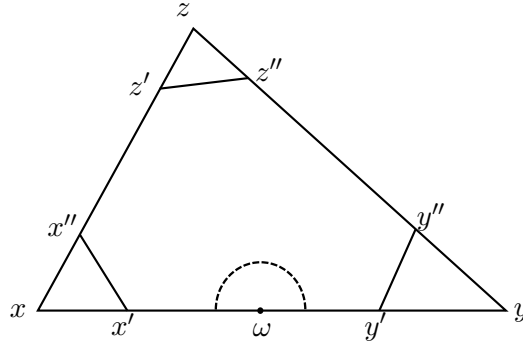


FIGURE 1 – Premier cas

Remarque 3.3: Comme $d(\omega, [x, z]) > 2.10^{10}\epsilon$ et $d(\omega, [y, z]) > 2.10^{10}\epsilon$, on a $|x' - y''| > 2.10^{10}\epsilon$ et $|x'' - y'| > 2.10^{10}\epsilon$. Par ailleurs $|x' - x''| = 4\epsilon$ et $|y' - y''| = 4\epsilon$ donc $|x'' - y''| \geq (2.10^{10} - 4)\epsilon$ et les points sont tous bien disjoints.

Notons maintenant H l'hexagone formé par $x'x''z'z''y''y'$ dont trois côtés sont de longueur égale à 4ϵ . Soient α , β et γ le nombre d'arêtes dans $[x', y']$, $[x'', z']$ et $[y'', z'']$ respectivement. Par définition, on a donc $|x' - y'| = \alpha$, $|x'' - z'| = \beta$ et $|y'' - z''| = \gamma$.

Soit D le diagramme minimal pour le mot représenté par H . on identifie le bord de D avec H dans X . Comme h est une courbe fermée simple dans X , le diagramme D est un disque topologique.

Soit T un sous-complexe de D . On définit $star_D(T)$ comme l'ensemble des cellules dans D qui intersectent T . Notons N le sous-complexe de D obtenu en itérant $\left\lceil \frac{\epsilon}{\rho} \right\rceil + 1$ fois l'opération $star_D$ à partir de $[x', y']$.

Lemme 3.4: Si $\epsilon > \rho$, alors le nombre de 2-cellules dans N est supérieur ou égal à $\frac{(\alpha - \rho)\epsilon - \epsilon^2}{\rho^2}$.

Démonstration. Soit $\gamma_0 = [x', y']$ dans ∂D . Soit $N_1 = \text{star}_D(\gamma_0)$.

γ_0 contient α 1-cellules. Chacune est dans le bord d'une 2-cellule. Or chaque 2-cellule a au plus ρ 1-cellules dans son bord donc il y a au moins $\frac{\alpha}{\rho}$ 2-cellules dans N_1 .

Soit $\gamma_1 = \partial N_1 \setminus (\gamma_0 \cup [x', x''] \cup [y', y''])$. γ_1 contient alors au moins $\alpha - 2\rho$ 1-cellules.

On continue ce procédé $\left\lceil \frac{\epsilon}{\rho} \right\rceil + 1$ fois :

Soit $N_i = \text{star}_D(N_{i-1})$. Soit $\gamma_i = \partial N_i \setminus (\gamma_0 \cup [x', x''] \cup [y', y''])$. Le nombre de 2-cellules dans $N_i \setminus N_{i-1}$ est au moins $\frac{(\alpha - 2(i-1)\rho)}{\rho}$.

Ce nombre diminue avec i . Le nombre de 2-cellules dans $N_{\left\lceil \frac{\epsilon}{\rho} \right\rceil + 1} \setminus N_{\left\lceil \frac{\epsilon}{\rho} \right\rceil}$ est au moins $\frac{(\alpha - (\frac{\epsilon}{\rho} + 1)\rho)}{\rho} = \frac{\alpha - (\epsilon + \rho)}{\rho}$.

Donc au total le nombre de 2-cellules dans N est d'au moins $\alpha \frac{\epsilon}{\rho^2} - (\epsilon + \rho) \frac{\epsilon}{\rho^2}$. □

En faisant de même pour $[x'', z']$ et $[y'', z'']$, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + \gamma) \frac{\epsilon}{\rho^2} - 3(\epsilon + \rho) \frac{\epsilon}{\rho^2} \leq A(D) \leq K(\alpha + \beta + \gamma + 12\epsilon) \\ \Rightarrow & (\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{\epsilon}{\rho^2} - K \right) \leq 12K\epsilon + 3(\epsilon + \rho) \frac{\epsilon}{\rho^2} \\ \Rightarrow & \alpha \left(\frac{\epsilon}{\rho^2} - K \right) \leq 12K\epsilon + 3 \frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 3 \frac{\epsilon}{\rho} \end{aligned}$$

Or $\alpha > r > 10^{10}\epsilon$. Donc on a :

$$\begin{aligned} & 10^{10} \frac{\epsilon^2}{\rho^2} - 10^{10} K\epsilon \leq 12K\epsilon + 3 \frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 3 \frac{\epsilon}{\rho} \\ \Rightarrow & \frac{10^{10}}{\rho^2} \leq 10^{10} \frac{K}{\epsilon} + 12 \frac{K}{\epsilon} + \frac{3}{\rho^2} + \frac{3}{\rho\epsilon} \\ \Rightarrow & \frac{(10^{10} - 3)}{\rho^2} \leq \frac{((12 + 10^{10})K + \frac{3}{\rho})}{\epsilon} \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand ϵ tend vers l'infini. On aboutit donc à une contradiction. Cela démontre le théorème dans le premier cas.

Deuxième cas.

S'il n'existe pas de point $y'' \in [y, z]$ comme décrit précédemment, la construction devient la suivante : On prend x' , y' et z' de sorte que $[x', y'] \subset [x, y]$ et $[x'', z'] \subset [x, z]$ soient des sous-arcs maximaux pour lesquels les 2ϵ -voisinages de leur intérieur sont disjoints, $|x' - x''| = 4\epsilon$, $|y' - y''| = 8\epsilon$ et $\omega \in [x', y']$.

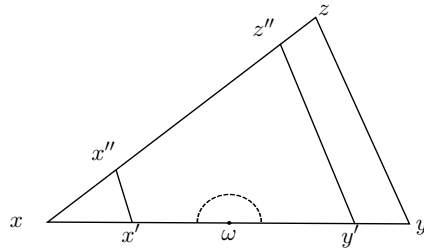


FIGURE 2 – Deuxième cas

Le lemme précédent reste valable pour $[x', y']$ et $[x'', z']$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta) \frac{\epsilon}{\rho^2} - 2(\epsilon + \rho) \frac{\epsilon}{\rho^2} \leq A(D) \leq K(\alpha + \beta + 12\epsilon) \\ \Rightarrow & \alpha \left(\frac{\epsilon}{\rho^2} - K \right) \leq 12K\epsilon + 2 \frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 2 \frac{\epsilon}{\rho} \end{aligned}$$

Or $\alpha > r > 10^{10}\epsilon$. Donc on a :

$$\begin{aligned} 10^{10} \frac{\epsilon^2}{\rho^2} &\leq (12 + 10^{10})K\epsilon + 2\frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 2\frac{\epsilon}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{(10^{10}-2)}{\rho^2} &\leq \frac{((12+10^{10})K+\frac{2}{\rho})}{\epsilon} \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand ϵ tend vers l'infini. On aboutit donc à une contradiction et cela démontre le théorème dans le deuxième cas.

Troisième cas.

S'il n'existe pas de point de $z' \in [x, z]$ comme décrit dans le premier cas, la construction devient la suivante : Prenons $y' \in [\omega, y]$ à distance minimale de ω tel que $d(y', [x, z] \cap [y, z]) = 2\epsilon$. On prend ensuite $y'' \in [y, z]$ le point le plus proche de z tels que $|y' - y''| = 4\epsilon$. On prend alors $x' \in [x, \omega]$, $x'' \in [x, z]$ et $z'' \in [z, y'']$ de sorte que $|x' - x''| = 4\epsilon$, $|z'' - x''| = 4\epsilon$ et que les 2ϵ -voisinages de l'intérieur de $[x', y']$ et $[y'', z'']$ soient disjoints. Notons \bar{z} le point de $[x'', x'] \cap [x'', z'']$ le plus éloigné de x'' .

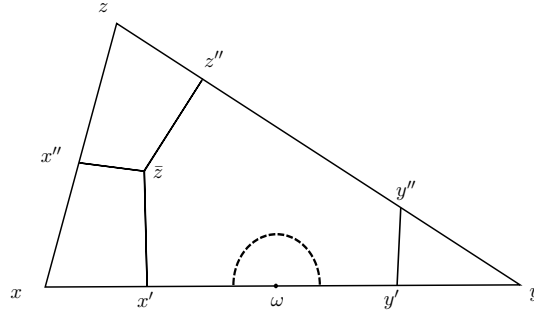


FIGURE 3 – Troisième cas

On remarque alors que $|x' - \bar{z}| + |\bar{z} - z''| \leq 8\epsilon$. Par ailleurs, comme le lemme reste valable pour $[x', y']$ et $[y'', z'']$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\alpha + \gamma) \frac{\epsilon}{\rho^2} - 2(\epsilon + \rho) \frac{\epsilon}{\rho^2} &\leq A(D) \leq K(\alpha + \gamma + 12\epsilon) \\ \Rightarrow \alpha \left(\frac{\epsilon}{\rho^2} - K \right) &\leq 12K\epsilon + 2\frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 2\frac{\epsilon}{\rho} \end{aligned}$$

Or $\alpha > r > 10^{10}\epsilon$. Donc on a, comme dans le deuxième cas :

$$\begin{aligned} 10^{10} \frac{\epsilon^2}{\rho^2} &\leq (12 + 10^{10})K\epsilon + 2\frac{\epsilon^2}{\rho^2} + 2\frac{\epsilon}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{(10^{10}-2)}{\rho^2} &\leq \frac{((12+10^{10})K+\frac{2}{\rho})}{\epsilon} \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand ϵ tend vers l'infini. On aboutit donc à une contradiction et cela démontre le théorème dans le troisième cas.

Cela achève la démonstration du théorème. □

4 Hyperbolicité, présentation de Dehn et α -présentation de Dehn

4.1 Hyperbolicité et présentation de Dehn

On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1: [Lys89]

Si un groupe admet une présentation de Dehn alors il est hyperbolique.

Démonstration. Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une présentation de Dehn d'un groupe G . On considère $w \in \mathcal{N}(\mathcal{R})$. Comme on a un algorithme de Dehn, il existe $p \in F(\mathcal{S})$ et $r \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ tels que $|wpr^{-1}p^{-1}| < |w|$.

On peut appliquer ceci au plus $|w|$ fois. Alors $A(w) \leq |w|$ et w s'écrit $\prod_{i=1}^{A(w)} p_i r_i^{\pm 1} p_i^{-1}$. Par le théorème 3.2, le groupe est donc hyperbolique. □

En particulier, on a démontré qu'une présentation de Dehn induit une inégalité isopérimétrique linéaire de constant 1.

L'implication contraire est également vraie :

Théorème 4.2: [Lys89]

Tout groupe hyperbolique admet une présentation de Dehn.

Démonstration. On note $m = \min_{r \in \mathcal{R}} |r|$. Tout mot Dehn-réduit est une $\frac{m}{2}$ -géodésique locale. Il s'agit donc de montrer que toute $\frac{m}{2}$ -géodésique locale est non triviale.

On considère w une $\frac{m}{2}$ -géodésique locale. On peut construire une suite de points sur w comme dans le lemme 1.10. En effet, notons x_0 l'origine de w . On prend ensuite x_1 sur w à une distance égale à δ de x_0 . On construit alors les points suivants de sorte que $|x_i - x_{i-2}| + 2\delta < |x_i - x_{i+1}|$. Ainsi on obtient bien une suite de points vérifiant les hypothèses du lemme 1.10. On sait alors que w n'est pas trivial. □

On obtient ainsi l'équivalence entre l'hyperbolicité et le fait d'admettre une présentation de Dehn.

4.2 Hyperbolicité et α -présentation de Dehn

I.G. Lysënok a démontré un résultat similaire pour les α -présentations de Dehn :

Théorème 4.3: [Lys89]

Quelque soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, tout groupe hyperbolique admet une α -présentation de Dehn.

Démonstration. On fixe $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Par le théorème 1.13, on sait que pour tout couple (λ, c) il existe une constante L et un couple (λ', c') telles que toute $(\lambda, c, \alpha L)$ -quasi-géodésique locale soit une (λ', c') -quasi-géodésique. On considère alors l'ensemble \mathcal{R} des mots de longueur L représentant l'identité dans le groupe.

Supposons que la présentation induite par \mathcal{R} n'est pas une α -présentation de Dehn. Il existe alors un mot w représentant l'identité dans le groupe qui ne contient pas de sous-mot u qui soit aussi un sous-mot d'un élément de $r \in \bar{\mathcal{R}}$ et vérifiant $|u| > \alpha|r|$. On remarque alors que $|u| \leq L$. En particulier, on peut en déduire que ce mot w ne contient pas de sous-mot u vérifiant $|u| = \alpha L$ et que l'on puisse réduire en un mot de longueur inférieure à $(1 - \alpha)L$. En d'autres termes, il existe un mot w représentant l'identité dans le groupe tel que tout sous-mot u de w de longueur αL vérifie $\|u\| \geq (1 - \alpha)L$. Or $|u| = \alpha L < L$ donc $\|u\| \geq (1 - \alpha)|u|$. Cela signifie que w est une $(\frac{1}{1-\alpha}, 0, \alpha L)$ -quasi-géodésique locale. Par le théorème 1.13, w est alors une quasi-géodésique.

Comme w représente l'identité du groupe, on a : $(1 - \alpha)|w| \leq 0$. On a donc une contradiction.

On a ainsi montré que le groupe admet une α -présentation de Dehn. □

On rappelle que dans le cas d'une α -présentation de Dehn, tout mot non vide w représentant l'identité dans le groupe contient un sous-mot u qui est aussi sous-mot d'un élément $r \in \bar{\mathcal{R}}$ et qui vérifie $|u| > \alpha|r|$. Comme $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, on a aussi $|u| > \frac{1}{2}|r|$. Le groupe admet donc aussi une présentation de Dehn. On peut donc noter la remarque suivante :

Remarque 4.4: Si un groupe admet une α -présentation de Dehn alors il satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire de constante 1.

4.3 Résultat

En combinant les différents résultats de cette section, on obtient une proposition très utile.

Proposition 4.5: Considérons G un groupe de type fini. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. G est un groupe hyperbolique
2. G admet une présentation de Dehn
3. G admet une α -présentation de Dehn pour $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.

5 Mot Dehn-réduit et α -présentation de Dehn

Cette section reprend un résultat qui est donné par G.N.Arzhantseva dans [Arz00] .

Lemme 5.1: [Arz00] Soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ une α -présentation de Dehn finie d'un groupe G avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$. Soit $\rho = \max_{r \in \mathcal{R}} |r|$. Alors pour tout mot Dehn-réduit w en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ et tout mot z en $\mathcal{S}^{\pm 1}$ représentant le même élément que w dans G , on a :

$$|z| \geq \frac{1}{\rho}|w|.$$

En particulier, $\|w\| \geq |z| \geq \frac{1}{\rho}|w|$, c'est-à-dire les mots Dehn-réduits sont des $(\rho, 0)$ -quasi-géodésiques.

Démonstration. Considérons la présentation $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ et les mots w et z comme dans les hypothèses du lemme. En particulier, on a donc $wz^{-1} = 1$ dans G . Sans perte de généralité, on peut supposer que wz^{-1} est réduit. On procède par récurrence sur $|w| + |z|$.

- Si $|w| = |z| = 0$, c'est trivial.
- Supposons que $|w| + |z| > 0$. Par définition d'une α -présentation de Dehn, wz^{-1} contient un sous-mot u qui est aussi un sous-mot d'un $r \in \bar{\mathcal{R}}$ et qui vérifie $|u| > \alpha|r| \geq \frac{3}{4}|r|$. Donc $|u| \geq \frac{3}{4}|r|$. On peut alors écrire $wz^{-1} = AuB$ et $r = uv^{-1}$ où A, B et v sont des mots en $\mathcal{S}^{\pm 1}$. Comme w est un mot Dehn réduit, u n'est pas un sous-mot de w .
- Dans un premier temps, supposons que u est un sous-mot de z^{-1} . On peut alors écrire $z^{-1} = CuD$ où C et D sont des mots en $\mathcal{S}^{\pm 1}$. Comme $uv^{-1} = 1$ dans G , en notant $z_1 = CvD$ on a $wz_1^{-1} = 1$ dans G . Par ailleurs, $|v| < |u|$ donc on a $|w| + |z_1| < |w| + |z|$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $\rho|z_1| \geq |w|$. Or $|z_1| < |z|$. Donc $|w| < \rho|z|$.

- Supposons maintenant que $u = u_1u_2$ avec u_1 un sous-mot de w et u_2 un sous-mot de z^{-1} .
 - Si $|v| < |u_2|$ alors $|B| + |v| < |B| + |u_2|$. Comme $wz^{-1} = AuB = Au_1u_2B$, on a $|B| + |u_2| = |z_1| = |z|$. Tout sous-mot d'un mot Dehn-réduit est encore Dehn-réduit. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence pour $w_1 = A$ et $z_1^{-1} = vB$. Ainsi $\rho(|B| + |v|) = \rho|z_1| \geq |A| = |w_1|$. Or $|v| \leq |u_2| - 1$ donc $\rho(|B| + |u_2|) - \rho \geq |A|$. Ainsi on obtient $\rho(|B| + |u_2|) \geq |A| + \rho \geq |A| + |u_1|$, c'est-à-dire $\rho|z| = |w|$.
 - Si $|v| \geq |u_2|$, alors $|u_2| \leq \frac{|r|}{4}$ car $|v| \leq \frac{|r|}{4}$. Or $|u| = |u_1| + |u_2| > \frac{3}{4}|r|$ par définition d'une α -présentation de Dehn. Donc $|u_1| > \frac{3}{4}r - |u_2| \geq \frac{3}{4}|r| - \frac{1}{4}|r| = \frac{1}{2}|r|$. On obtient ainsi une contradiction car u_1 est un sous-mot de w qui est Dehn-réduit.

□

Il est important de souligner que ce résultat n'est valable que pour les α -présentations de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

6 Algorithme

On va maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.1: Il existe un algorithme permettant de déterminer si une présentation finie d'un groupe est une α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

Démonstration. On considère une présentation finie $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ d'un groupe G . On cherche à déterminer si c'est une α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

Première étape : Hyperbolicité

D'après la proposition 4.5, un groupe admettant une α -présentation de Dehn est hyperbolique. On doit donc tout d'abord s'assurer qu'il s'agit bien d'une présentation d'un groupe hyperbolique ; sans quoi l'algorithme s'arrête.

On travaille tout d'abord localement en considérant uniquement les mots représentant l'identité dans le groupe d'aire inférieure à $10^{10}\rho$. On vérifie alors qu'ils satisfont chacun une inégalité isopérimétrique linéaire de constante 1. Si c'est le cas, on sait par le théorème 3.2 qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que toute boule de rayon inférieure à $10^{10}\rho$ soit δ -hyperbolique. En appliquant ensuite le théorème 2.8, on en déduit que le graphe de Cayley associé à cette présentation est 200δ -hyperbolique. On en conclut donc que le groupe G est hyperbolique.

Par ailleurs, on a vu précédemment (Remarque 4.4) qu'un groupe admettant une α -présentation de Dehn vérifie une inégalité isopérimétrique linéaire de constante 1. Si on trouve un mot ne vérifiant pas cette inégalité isopérimétrique linéaire, on sait donc que ce n'est pas une α -présentation de Dehn. L'algorithme s'arrête alors.

Cette première étape nous permet donc d'établir que :

- soit $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ n'est pas une α -présentation de Dehn, ce qui arrête l'algorithme ;
- soit le groupe G est hyperbolique et $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ est peut-être une α -présentation de Dehn.

Deuxième étape : Réduction

Le théorème 4.3 indique ensuite que quelque soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, tout groupe hyperbolique admet une α -présentation de Dehn. On sait donc que le groupe G admet une α -présentation de Dehn pour l'ensemble générateur \mathcal{S} avec $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Dans ce cas, notons $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \rangle$ une α -présentation de Dehn du groupe où \mathcal{R}' contient \mathcal{R} .

Si $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$, alors $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ est une α -présentation de Dehn pour $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et l'algorithme s'arrête.

Sinon, on considère une relation r dans \mathcal{R}' . Si elle n'est pas α -Dehn-conséquence² des autres, la présentation donnée par $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \setminus r \rangle$ n'est pas une α -présentation de Dehn et l'algorithme s'arrête.

Par contre, si r est α -Dehn-conséquence des autres relations de \mathcal{R}' , alors $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \setminus r \rangle$ est encore une présentation du groupe hyperbolique G . On s'assure maintenant que $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \setminus r \rangle$ reste une α -présentation de Dehn.

Pour cela, on vérifie que les mots Dehn-réduits sont tous non triviaux. En se restreignant à $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$, on peut associer le lemme 5.1 et le théorème 1.13. On en déduit alors qu'il suffit de s'assurer que les mots Dehn-réduits de longueur inférieure ou égale à une constante L soient non triviaux pour que tous les mots Dehn-réduits le soient.

S'il existe un mot Dehn-réduit trivial cela signifie qu'il existe un mot représentant l'identité dans le groupe mais qui ne contienne pas de sous-mot composé de plus de la moitié d'une relation. Cela contredit la définition d'une α -présentation de Dehn. Alors l'algorithme s'arrête.

Par contre, si tous les mots Dehn-réduits de longueur inférieure ou égale à L sont non triviaux, on sait que tout mot Dehn-réduit est non trivial. Cela signifie que tout mot ne contenant pas de sous-mot composé de plus de la moitié d'une relation est non trivial. En particulier, tout mot ne contenant pas de sous-mot composé de $100\alpha\%$ d'une relation est non trivial. Donc tout mot représentant l'identité du groupe contient un sous-mot composé de $100\alpha\%$ d'une relation. Par définition, pour tout $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$, $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \setminus r \rangle$ est une α -présentation de Dehn.

Troisième étape : Conclusion

Si $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R}' \setminus r \rangle$ est égal à $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$, alors on a montré que $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ est une α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

Dans le cas contraire, on répète l'étape de réduction. Si nécessaire, on répète cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de relations redondantes dans \mathcal{R}' . La présentation ainsi obtenue est la plus petite α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$ de ce groupe en terme de relations. Si c'est la présentation de départ, $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ est bien une α -présentation de Dehn avec $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$.

□

On remarque que c'est uniquement dans la dernière partie de la démonstration qu'il est nécessaire de se restreindre à $\frac{3}{4} \leq \alpha < 1$. Il s'agit donc d'améliorer le lemme 5.1 afin d'obtenir un résultat similaire avec des présentations de Dehn.

2. Cela signifie qu'elle peut être déduite à partir des autres relations de \mathcal{R}' et vérifie la condition de Dehn pour α .

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire, monsieur Thomas Delzant, pour sa disponibilité, sa patience et ses précieuses explications.

Références

- [ABC⁺91] J. M. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro, and H. Short. Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by Short.
- [Arz00] G.N. Arzhantseva. An algorithm detecting dehn presentations, 2000.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bow91] B. H. Bowditch. Notes on Gromov’s hyperbolicity criterion for path-metric spaces. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 64–167. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
- [Can84] James W. Cannon. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. *Geom. Dedicata*, 16(2) :123–148, 1984.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Les groupes hyperboliques de Gromov. [Gromov hyperbolic groups], With an English summary.
- [Cou10] Rémi Coulon. *Automorphismes extérieurs du groupe de Burnside libre*. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg, Strasbourg, 2010. Thèse, Université de Strasbourg, Strasbourg, 2010.
- [Cou13] Rémi Coulon. *Small cancellation theory and Burnside problem*. 2013.
- [DA85] B. Domanski and M. Anshel. The complexity of Dehn’s algorithm for word problems in groups. *J. Algorithms*, 6(4) :543–549, 1985.
- [Deh87] Max Dehn. *Papers on group theory and topology*. Springer-Verlag, New York, 1987. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell, With an appendix by Otto Schreier.
- [Del96] Thomas Delzant. Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3) :661–682, 1996.
- [DG08] Thomas Delzant and Misha Gromov. Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification. *J. Topol.*, 1(4) :804–836, 2008.
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [GG86] Elena Greendlinger and Martin Greendlinger. On Dehn presentations and Dehn algorithms. *Illinois J. Math.*, 30(2) :360–363, 1986.
- [Gre60] Martin Greendlinger. Dehn’s algorithm for the word problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 :67–83, 1960.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.
- [Lyn66] Roger C. Lyndon. On Dehn’s algorithm. *Math. Ann.*, 166 :208–228, 1966.

- [Lys89] I. G. Lysënok. Some algorithmic properties of hyperbolic groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(4) :814–832, 912, 1989.
- [Mil92] Charles F. Miller, III. Decision problems for groups—survey and reflections. In *Algorithms and classification in combinatorial group theory (Berkeley, CA, 1989)*, volume 23 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 1–59. Springer, New York, 1992.
- [MKS66] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory : Presentations of groups in terms of generators and relations*. Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York-London-Sydney, 1966.
- [Nov55] P. S. Novikov. *Ob algoritmičeskoj nerazrešivosti problemy toždestva slov v teorii grupp*. Trudy Mat. Inst. im. Steklov. no. 44. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1955.
- [Pap96] P. Papasoglu. An algorithm detecting hyperbolicity. In *Geometric and computational perspectives on infinite groups (Minneapolis, MN and New Brunswick, NJ, 1994)*, volume 25 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 193–200. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [Rip82] E. Rips. Generalized small cancellation theory and applications. I. The word problem. *Israel J. Math.*, 41(1-2) :1–146, 1982.
- [Sti93] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*, volume 72 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.
- [Tar49] V. A. Tartakovskij. Solution of the word problem for groups with a k -reduced basis for $k > 6$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 13 :483–494, 1949.
- [Arz00] [ABC⁺91] [Bow91] [BH99] [Can84] [Cou13] [Cou13] [CDP90] [Deh87] [Del96] [DG08] [DA85] [Gre60] [GG86] [Gro87] [GdlH90] [Lyn66] [LS77] [Lys89] [MKS66] [Mil92] [Nov55] [Pap96] [Rip82] [Sti93] [Tar49]