Université de Strasbourg
Mathématiques

Feuille 1

L3 Math
Analyse complexe
2023-2024

Manipuler les nombres complexes

Exercice 1 –Réécrire les nombres suivants sous la forme $a + bi$:

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{2}{1-3i}, \quad (1+i\sqrt{3})^3.$$

Exercice 2 –Réécrire les nombres suivants sous la forme $re^{i\theta}$ (on pourra éventuellement utiliser la fonction arctan pour exprimer le résultat) :

$$3i, \quad -2, \quad 1+i, \quad -1-i, \quad 2+5i, \quad 2-5i.$$

Exercice 3 –Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 = 1-i, \quad z^2 = 3+4i, \quad z^3 = i, \quad z^4 = -1, \quad \overline{z} = z^n (\text{avec } n \geq 2).$$

Exercice 4 –Décrire géométriquement l'ensemble des solutions de

$$|z| \leq 2, \quad \Re e(z) \geq 3, \quad 0 \leq \Re(iz) < 2\pi, \quad |\frac{z-1}{z+1}| \leq 1,$$
$$|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = 1, \quad \Im m\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0, \quad \Re e\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = 0.$$

Exercice 5 –Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1, satisfaisant $a+b+c=0$. Montrez que a, b, c sont les sommets d'un triangle équilatéral dans le plan complexe.

Exercice 6 –Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. Calculer $|\cos(z)|$ en fonction de a et b.

Exercice 7 –Soient a, b, c, d des réels satisfaisant la relation $ad - bc = 1$. On considère la transformation $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

Séries entières

Exercice 8 –Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que les a_n sont non nuls. Redémontrer le critère de d'Alembert, à savoir que si $l = \limsup(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})$ est < 1, alors la série Σa_n est convergente.

Exercice 9 –Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n, q \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\geq 0} n^k z^n \quad (k \geq 0),$$

$$\sum_{n\geq 1} n^n z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Exercice 10 –Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série $\sum_{n\geq 1} n^k a_n z^n$ a également un rayon de convergence égal à R.

Exercice 11 –Montrer que les trois séries entières

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

ont un rayon de convergence 1. Quel est leur comportement sur le cercle de rayon 1 centré en 0? (pour la seconde série, on pourra effectuer une transformation d'Abel).

Premiers pas sur les fonctions holomorphes

Exercice 12 –Montrer que la fonction $z \mapsto \exp(\frac{1+z}{1-z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{S} \setminus \{1\}$, où $\mathbb{S}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exercice 13 –On note $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi[\}$ et $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to B$ la détermination principale du logarithme.

1. Exprimer $\mathrm{Log}(i)$, $\mathrm{Log}(-1+i)$, $\mathrm{Log}(-i)$, $\mathrm{Log}(-1-i)$.
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $c \in \mathbb{C}$, on définit $z^c := e^{c\mathrm{Log}(z)}$. Calculer i^i et $(-i)^i$.
3. Est-il vrai que pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on a $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$?
4. Montrer que pour $z \notin [1, +\infty[$, $\mathrm{Log}(1-z)$ est bien défini, et que si $|z| < 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\mathrm{Log}(1-z)$.

Exercice 14 –Déterminer les a, b, c dans $\mathbb{R}$ pour lesquels la fonction $f(x+iy) := x + ay + i(bx+cy)$ est holomorphe.

Exercice 15 –Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elles existent, les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

1. Re $f(z) = 2xy$ $(z = x+iy \in \mathbb{C})$.
2. Re $f(z) = x + y^2$ $(z = x+iy \in \mathbb{C})$.
3. Im $f(z) = x^3 - 3xy^2$ $(z = x+iy \in \mathbb{C})$.

Exercice 16 –Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, avec Ω un ouvert connexe.

1. Si la partie réelle (resp. la partie imaginaire) de f est une fonction constante montrer que f est constante.
2. Si f est à valeurs dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$ montrer que f est constante.
3. Si $|f|$ est une fonction constante montrer que f est constante.
4. Nous verrons plus tard dans le cours que les fonctions holomorphes sont de classe C^1 (vues comme applications de deux variables réelles). Montrer qu'avec cette information supplémentaire, les questions précédentes sont trivialisées par le théorème d'inversion locale.