Feuille 4

Exercice 1 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $p \in \Omega$, et $f : \Omega \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que f est bornée sur un voisinage de p.

1. On définit $h : \Omega \to \mathbb{C}$ par $h(p) = 0$ et $h(z) = (z-p)^2 f(z)$ si $z \neq p$.
2. Montrer que h est holomorphe sur Ω, et calculer $h'(p)$.
3. Montrer qu'il existe $r > 0$, tel que sur le disque $D(p, r)$, on ait $h(z) = \sum_{n\geq 2} a_n (z-p)^n$.
4. En déduire que f d'étend en une application holomorphe sur Ω.

Exercice 2 –Soit $R > 0$, et $f : \overline{D}(0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $z \in D(0, R)$, on a:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Montrer que f est holomorphe sur $D(0, R)$ (on pourra utiliser des séries entières....).

Exercice 3 –Soit $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On s'intéresse au diamètre d de $f(D(0, 1))$, défini comme :

$$d := \sup_{z,v \in D(0,1)} |f(z) - f(v)|.$$

Bien sûr, ce diamètre peut valoir $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $r \in]0, 1[$, on a:
$$2f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz.$$
2. En déduire que $2|f'(0)| \leq d$ (minoration du diamètre).

Inégalités de Cauchy, théorème de Liouville

Exercice 4 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. On suppose qu'il existe $R_0 > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| \geq R_0$, on ait $|f(z)| \leq \ln(|z|)$. Que peut-on dire de la fonction f (on pourra utiliser les inégalités de Cauchy)?
2. On suppose qu'il existe $m \leq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |z|^m$. Montrer que f est une fonction polynômiale de degré $\leq m$.

Exercice 5 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$. Montrer qu'il existe forcément un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = 0$ (*on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'application* $g = \frac{1}{f}$).

Exercice 6 –On appelle $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) > 0\}$. On considère l'application $\sigma : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ donnée par la formule $\sigma(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Soit $f : \mathbb{C} \to D(0,1)$ une application holomorphe. Que peut-on dire sur f?
2. Montrer que σ est une bijection holomorphe de $\mathbb{H}$ sur $D(0,1)$, dont la réciproque est holomorphe (on appelle celà un *biholomorphisme*).
3. On suppose que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ est une application holomorphe. Que peut-on dire sur f?.

Exercice 7 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que f n'est pas constante. *Nous allons montrer que l'image $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$. Majorer l'application $g : z \mapsto \frac{1}{|f(z) - z_0|}$.
2. Conclure.

Exercice 8 –Soient f et g deux fonctions entières, non identiquement nulles. On fait l'hypothèse que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$.

1. Montrer que si $g(z_0) = 0$, alors $f(z_0) = 0$, et que la multiplicité de z_0 en tant que zéro de f est au moins égale à celle de z_0 en tant que zéro de g.
2. En déduire que f et g sont proportionnelles (*on pourra étudier les propriétés de la fonction* $\frac{f}{g}$).

Zéros isolés

Exercice 9 –Soit $f : z \mapsto \sin(\frac{\pi}{1-z})$. Montrer que f est holomorphe sur $D(0,1)$. Quels sont ses zéros? Y a-t-il une contradiction avec le théorème des zéros isolés?

Exercice 10 –Sans faire aucun calcul, expliquer pourquoi les identités $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ ou $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ sont vérifiées pour tout z dans $\mathbb{C}$. Toujours sans calculs, montrer que $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$ pour tous z, w dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 –Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions holomorphes $f : D(1,1) \to \mathbb{C}$ qui satisfont, pour tout $n \geq 2$:

- $f(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$.
- $f(1 + \frac{1}{n}) = e^{-n}$.
- $f(1 + \frac{1}{2n}) = f(1 + \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$.

Exercice 12 –Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, on ait $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$, et $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, et donner ce développement.
3. Expliquer pourquoi sur $\mathbb{R}$, f coïncide avec la fonction "arctan" usuelle.
4. Déduire que pour tout $z \in \Omega$, on a $z\cos(f(z)) = \sin(f(z))$.
5. Montrer que pour tout $z \in \Omega$, $\cos(f(z)) \neq 0$, et que donc $\tan(f(z)) = z$.
6. Est-ce que la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$? (*on pourra utiliser le dernier exercice de la feuille* 3).