Université de Strasbourg
Mathématiques

Feuille 6

L3 Math
Analyse complexe
2023-2024

Exercice 1 –Pour chacune des fonctions holomorphes suivantes, déterminer les singularités ainsi que leur nature (effaçable, pôles, essentielles):

$$\frac{e^z}{z^2},\quad \sin(\frac{1}{z^2}),\quad \frac{\sin^2(z)}{z^2},\quad \frac{\sin^2(z)}{z^3}$$
$$\frac{z\sin(z)}{z^2+1},\quad \frac{z^6-1}{z^4-1},\quad ,\frac{1}{\sin(z)}-\frac{1}{z},\quad e^{\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}}.$$

Exercice 2 –Déterminer :

1. Le résidu en $\pm i$ de $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$.
2. Le résidu en i de $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$.
3. Le résidu en 0 de $\frac{1}{\sin(z)}$.
4. Le résidu en 0 de $\frac{1}{\tan(z)}$.

Exercice 3 –Indiquer, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ (indiquer dans ce cas leurs zéros et leurs pôles):

$$\cosh(z);\quad e^{\frac{1}{z}};\quad \coth(z);\quad \sin(\frac{\pi}{1-z}).$$

Exercice 4 –Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser selon les cas, soit les formules de Cauchy, soit la formule des résidus) :

1. $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}\ dz$;
2. $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\ dz$;
3. $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}\ dz$;
4. $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\ dz$;
5. $\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\ dz, \quad r=1/2$ et $r=3/2$.

Exercice 5 –calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_{|z|=5} \frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}$.
2. $\int_{|z|=2} \frac{5z^2+1}{z(z-1)}\, dz$.
3. Pour $r>0$, $\int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}\, dz$.
4. $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$.

5. $\int_{|z|=r} \frac{z-5}{z^2-6z+8}\,dz$.

6. $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}\,dz$.

7. $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz$

Exercice 6 –

1. Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$est méromorphe, alors f' est méromorphe.
2. La composée de deux fonctions méromorphes est-elle toujours méromorphe?

Exercice 7 –Soit $R > 0$, et γ_R le chemin fermé constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R (parcouru positivement).

1. Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,dz$.
2. Déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4}\,dx$.

Exercice 8 –Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Exercice 9 –

1. Donner les racines du polynôme $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ (NB: chercher une racine évidente non réelle).
2. Soit $R > 0$, et γ_R le chemin fermé constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R (parcouru positivement). Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{z-3}{z^4-2z^3+3z^2-2z+2}\,dz$
3. En faisant tendre R vers $+\infty$, calculer, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-3}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}\,dx$.

Exercice 10 –Pour tout $R > 0$, on note C_R le rectangle de sommets $-R, R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi$, parcouru dans le sens direct.

1. Calculer $\int_{C_R} \frac{e^{\frac{z}{3}}}{1+e^z}\,dz$.
2. Montrer que les intégrales sur les côtés verticaux du rectangle tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$.
3. Montrer que les intégrales sur les côtés horizontaux sont liées par une relation très simple.
4. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{3}}}{1+e^x}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Exercice 11 –En considérant le bord du domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon < |z| < R\}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 12 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$. Nous allons montrer que f est une fonction polynômiale.

1. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Montrer que 0 est un pôle d'ordre $m \geq 1$ pour g.
2. Soit h la partie régulière du développement en série de Laurent de g sur $\mathbb{C}^*$ (notez que h est une fonction entière car le développement de Laurent converge sur $\mathbb{C}^*$). Montrer que
$$\lim_{|z|\to+\infty} |h(z)| = |f(0)|.$$
En déduire que h est constante.
3. Conclure que f est polynômiale.