Université de Strasbourg
Mathématiques

Feuille 7

L3 Math
Analyse complexe
2023-2024

Exercice 1 –

1. En comparant $|z^8 - 4z^5 + z^2 - 1|$ et $4|z^5|$ sur le cercle unité, donner le nombre de racines (avec multiplicité) de $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ situées dans le disque unité.

   En vous inspirant de l'exemple précédent, déterminer le nombre de solutions (avec multiplicité) des équations suivantes dans le domaine indiqué:

2. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$ dans le disque unité.
3. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ dans le disque unité.
4. $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$ dans le disque unité.
5. $z^4 - 5z + 1 = 0$ dans le disque unité, puis dans l'anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Exercice 2 –Montrer que la fonction $h(z) = ze^{2-z} - 1$ s'annule exactement une fois dans le disque unité.

Exercice 3 –Soit $n \geq 1$ un entier, et P un polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$ de degré n.
En appliquant le théorème de Rouché à un disque de très grand rayon, montrer que P admet n racines – comptées avec multiplicité– dans $\mathbb{C}$ (celà nous donne une nouvelle preuve du théorème de D'Alembert-Gauss).

Exercice 4 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes, et on suppose que f_n converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. On suppose que f n'est pas identiquement nulle.

1. On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \Omega$. Montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, f_n s'annule en au moins un point de Ω (on pourra appliquer le théorème de Rouché sur un petit cercle centré en z_0).
2. On suppose à présent que la fonction f n'est pas constante. Montrer que si toutes les fonctions f_n sont injectives, alors f est injective (indication: pour $z_0 \in \Omega$, appliquer la question précédente à $f - f(z_0)$ sur $\Omega \setminus \{z_0\}\}$).
3. Vérifier que les propriétés précédentes sont grossièrement fausses pour les fonctions C^∞ d'une variable réelle.

Exercice 5 –Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^z}$ définit une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

Exercice 6 –Dans cet exercice, nous revenons sur la fonction Zeta de Riemann, que l'on a définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re e(s) > 1\}$ via la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\phi_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})\, dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ_n est une fonction entière.

2. En utilisant le fait que $x^{-s} - n^{-s} = \int_n^x st^{-s-1}\, dt$, montrer que pour tout $x \in [n, n+1]$, on a
$$|x^{-s} - n^{-s}| \leq \frac{|s|}{n^{\Re e(s)+1}}.$$
Déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(s)$ converge pour tout s satisfaisant $\Re e(s) > 0$, et définit une fonction holomorphe ϕ sur cet ensemble. Montrer que si $\Re e(s) > 1$, $\phi(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

3. Déduire de ce qui précède que ζ s'étend méromorphiquement à $\Re e(s) > 0$, en une fonction admettant un pôle simple en 1 et pas d'autre pôle.

Exercice 7 –Montrer que la série de fonctions méromorphes $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{n})$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont on précisera les pôles.

Exercice 8 –On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 \tan(z)}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer ses pôles et calculer le résidu en chaque pôle.

2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle R_N le contour rectangulaire de sommets $\pi N + \frac{\pi}{2} \pm Ni, -\pi N - \frac{\pi}{2} \pm Ni$, parcouru dans le sens positif. Donner la valeur de $\int_{R_N} \frac{1}{z^2 \tan(z)}\, dz$.

3. Déterminer le comportement de $\frac{1}{|\tan(z)|}$ lorsque $|\Im m(z)| \to +\infty$. En déduire que $\int_{R_N} \frac{1}{z^2 \tan(z)}\, dz \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

4. Retrouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9 –Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+z}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-zt}\, dt$ définissent des fonctions holomorphes sur des ouverts de $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

Exercice 10 –Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact. On pose:
$$\hat{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixz}\, dx.$$
Montrer que $\hat{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11 –Montrer que le produit infini $P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 + nz^n)$ définit une fonction holomorphe sur le disque unité. Déterminer les zéros de P.

Exercice 12 –Le but de cet exercice est de donner une preuve du fait que les applications holomorphes non constantes sur un ouvert connexe sont ouvertes. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une telle application. Soit U un ouvert de Ω, et a dans l'image $f(U)$; on choisit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = a$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, et tel que $f - a$ ne s'annule pas sur le cercle $C(z_0, r)$.

2. Déduire de la question précédente l'existence de $M > 0$, tel que $|f(z) - a| \geq M$ pour tout $z \in C(z_0, r)$.

3. En utilisant le théorème de Rouché, montrer que si $|b - a| \leq \frac{M}{2}$, alors $f - b$ s'annule dans le disque $D(z_0, r)$.

4. Conclure que $f(U)$ est ouvert.