

Schémas « asymptotic preserving » pour des systèmes hyperboliques sur maillages non structurés

Emmanuel Franck

CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France - UPMC/LJLL

Journée des doctorants, 15 mars 2012

avec : Christophe Buet (CEA), Bruno Després (UPMC)



- **Hydrodynamique Lagrangienne radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.

- **Hydrodynamique Lagrangienne radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.
- **Équation de transport mono-groupe** : Soit $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, t) \geq 0$ la fonction de distribution associée aux particules (photons ou neutrons) situées en \mathbf{x} , de direction $\boldsymbol{\Omega}$. On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \sigma \int_{S^2} (f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}', t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, t)) d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (1)$$

- **Hydrodynamique Lagrangienne radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.
- **Équation de transport mono-groupe** : Soit $f(\mathbf{x}, \Omega, t) \geq 0$ la fonction de distribution associée aux particules (photons ou neutrons) situées en \mathbf{x} , de direction Ω . On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \Omega, t) = \sigma \int_{S^2} (f(\mathbf{x}, \Omega', t) - f(\mathbf{x}, \Omega, t)) d\Omega'. \quad (1)$$

- Pour $t \gg 1$ et $\sigma \gg 1$, (1), tend vers $\partial_t E(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div}(\frac{1}{\sigma} \nabla E(t, \mathbf{x})) = 0$,
avec $E(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega$.

- **Hydrodynamique Lagrangienne radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.
- **Équation de transport mono-groupe** : Soit $f(\mathbf{x}, \Omega, t) \geq 0$ la fonction de distribution associée aux particules (photons ou neutrons) situées en \mathbf{x} , de direction Ω . On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \Omega, t) = \sigma \int_{S^2} (f(\mathbf{x}, \Omega', t) - f(\mathbf{x}, \Omega, t)) d\Omega'. \quad (1)$$

- Pour $t \gg 1$ et $\sigma \gg 1$, (1), tend vers $\partial_t E(t, \mathbf{x}) - \text{div}(\frac{1}{\sigma} \nabla E(t, \mathbf{x})) = 0$, avec $E(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega$.
- Temps CPU trop important pour (1). On résout des modèles simplifiés dépendants que des variables d'espaces.
 - modèles P_n : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
 - modèles S_n : on discrétise en vitesse l'équation (ordonnées discrètes).
 - modèles M_n : modèles P_n non linéaire, fermés en minimisant l'entropie radiative.



Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \rightarrow \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0.$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind** : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0.$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind** : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.
Schéma de Jin-Levermore modifié (Gosse-Toscani)
- Principe de construction :
 - On introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
 - On discrétise le terme source à l'aide des flux modifiés.
- Erreur de consistance : $O(\Delta t + \Delta x)$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}}\right) \leq 1$.

Équation de la chaleur hyperbolique :

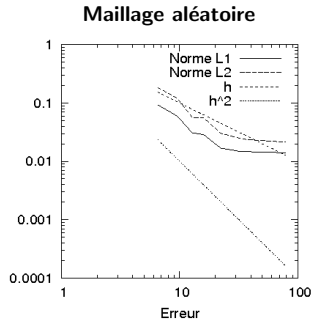
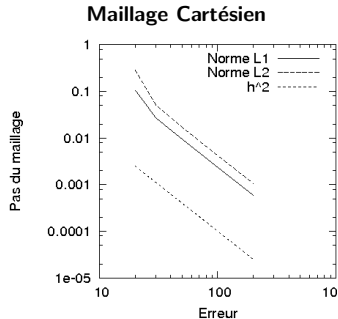
$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0.$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind** : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.
Schéma de Jin-Levermore modifié (Gosse-Toscani)
- Principe de construction :
 - On introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
 - On discrétise le terme source à l'aide des flux modifiés.
- Erreur de consistance : $O(\Delta t + \Delta x)$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}}\right) \leq 1$.

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Volumes finis aux arêtes : on localise les flux aux centres des arêtes.
- On étend le schéma de Jin-Levermore.
- Le schéma limite de diffusion (VF4) ne converge pas sur maillages généraux. Cas test pour le schéma VF4 : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale de la chaleur au temps initial $t=0.001$, temps final $t_f=0.010$
- Résultats de convergence sur maillages Cartésien et aléatoire.



- **Idée** : utiliser le schéma **nodal** « GLACE » construit pour l'équation des ondes et coupler ce schéma à la méthode de Jin-Levermore.
- Les flux sont localisés aux noeuds.
- **Propriétés** :
 - En 1D le schéma GLACE-AP est égal au schéma de Jin-Levermore modifié.
 - On peut reformuler le schéma pour obtenir un schéma semi-implicite locale avec une CFL indépendante de ε .
 - Le schéma continu en temps est stable en norme L^2 .
- **Propriétés du schéma limite** :
 - Le schéma est convergent à l'ordre 1 (preuve de convergence).
 - Le schéma admet des modes parasites que l'on peut stabiliser.
- **Conclusion** : La viscosité des schémas aux noeuds est consistante avec un Laplacien et donne un gradient complet aux noeuds. Cela permet d'obtenir un schéma limite convergent.
- Le schéma obtenu est « asymptotic preserving » au sens où les estimations d'erreur et la condition CFL sont indépendantes de ε .



- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

avec A, B, R symétriques et R positive.



- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

avec A, B, R symétriques et R positive.

- Les modèles P_n et S_n (transfert radiatif) rentrent dans ce cadre avec $\dim \text{Ker } R = 1$.

- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

avec A, B, R symétriques et R positive.

- Les modèles P_n et S_n (transfert radiatif) rentrent dans ce cadre avec $\dim \text{Ker } R = 1$.
- On diagonalise le système pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}$$

avec D matrice diagonale composée des valeurs propres de R tel que $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). On montre que

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

- Les matrices $P_{1,x}, P_{1,y}$ sont les matrices du système P_1 à un coefficient multiplicateur près.

- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

avec A, B, R symétriques et R positive.

- Les modèles P_n et S_n (transfert radiatif) rentrent dans ce cadre avec $\dim \text{Ker } R = 1$.
- On diagonalise le système pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}$$

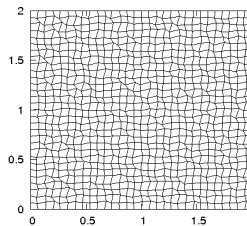
avec D matrice diagonale composée des valeurs propres de R tel que $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 1$). On montre que

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

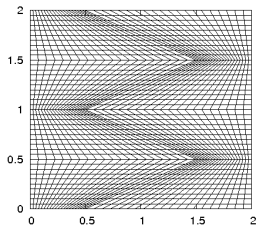
- Les matrices $P_{1,x}, P_{1,y}$ sont les matrices du système P_1 à un coefficient multiplicateur près.
- Conclusion** : les modèles P_n et S_n peuvent être scindés entre un système analogue à P_1 et un système qui n'intervient pas en limite de diffusion.
- Stratégie numérique (méthode micro-macro)** : scinder le système diagonalisé, discrétiser le système P_1 à l'aide d'un schéma AP, discrétiser l'autre système à l'aide d'un schéma classique.

Deux exemples classiques de maillages non structurés.

Maillage aléatoire



Maillage Kershaw



- **Régime de diffusion modèle P_1** : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale au temps initial $t=0.001$. Temps final $t_f = 0.010$.
Order de convergence

Maillage/ ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}
Cartésien 60-120 mailles	1.8	2	2.	2.
Cartésien 120-240 mailles	1.7	1.95	2	2
Aléa. quad. 60-120 mailles	1.83	2.	2	2
Aléa. quad. 120-240 mailles	1.73	1.92	2	2
Kershaw 60-120 mailles	2	2.1	2.1	2.1
Kershaw 120-240 mailles	1.83	1.97	2	2

Comparaison entre les schémas AP et non AP



énergie atomique - énergies alternatives

- On résout le modèle P_1 avec la solution fondamentale de la chaleur comme condition initiale et $\varepsilon = 0.001$. La solution est la solution de l'équation de la chaleur à ε près. Maillage de Kershaw.

Solution de diffusion

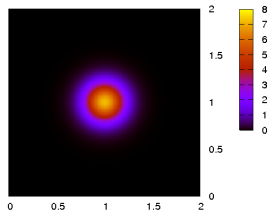


Schéma non AP

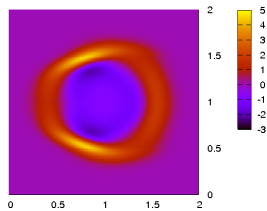


Schéma Ap non cv

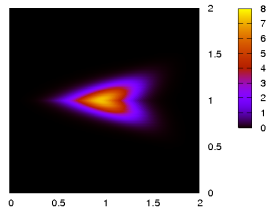
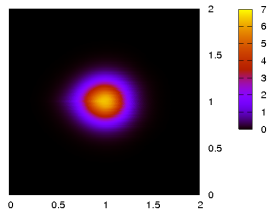


Schéma AP



- **Conclusion**

- On a obtenu des schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique sur maillages non structurés.
- En utilisant la décomposition présentée on obtient des schémas AP simples pour les systèmes S_n et P_n .
- On a étendu ces résultats au modèle non linéaire M_1 . Le schéma est AP et préserve le principe du maximum.
- On a proposé un schéma Lagrange+projection AP et well-balanced pour les équations d'Euler et de Saint Venant avec friction et gravité.

- Publications :

- C. Buet, B. Després, E. Franck *Design of asymptotic preserving schemes fore hyperbolic heat equation on unstructured meshes* Numerish Mathematik, accepté.
- E. Franck, P. Hoch, G. Samba, P. Navarro *An asymptotic preserving scheme for P_1 model using classical diffusion schemes on unstructured polygonal meshes* ESAIM : Proceedings, October 2011, Vol. 32, p. 56-75.
- C. Buet, B. Després, E. Franck *AP schemes for Friedrichs systems with stiff relaxation on unstructured meshes*. En cours de rédaction.



Merci de votre attention.