
Schémas « asymptotic preserving » pour l'approximation numérique du transport linéaire sur maillages non structurés

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Emmanuel Franck

CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France - UPMC/LJLL

15 novembre 2011

avec : Christophe Buet, Bruno Després

1 Introduction

2 Schémas AP en 1D, difficultés en 2D

3 Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

4 Schémas AP pour des modèles linéaires généraux

5 Schéma AP pour un modèle non linéaire en transfert radiatif

6 Résultats numériques

7 Conclusion

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Introduction



- **Fusion par Confinement Inertiel** : porter un mélange gazeux aux conditions d'allumage thermonucléaire en utilisant un ensemble de faisceaux laser.
- **Hydrodynamique Radiative** : interaction entre le gaz modélisé par les équations d'Euler bi-températures et le rayonnement modélisé par une équation dite de transport.
- **Équation de transport** : Soit $f(\mathbf{x}, \Omega, t) \geq 0$ la fonction de distribution associée aux particules situées en \mathbf{x} , de direction Ω . On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \Omega, t) = \sigma_S \int_{S^2} f(\mathbf{x}, \Omega', t) - f(\mathbf{x}, \Omega, t) d\Omega'$$

- Cette équation, tend vers une équation de diffusion sur le premier moment de f . Par exemple en temps grand et $\sigma_S \gg 1$, on obtient la limite

$$\partial_t E(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma_S} \nabla E(t, \mathbf{x}) \right) = 0,$$

$$\text{avec } E(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega \text{ et } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Omega f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Modèles simplifiés : de type hyperbolique qui ne dépendent que des variables d'espace avec la même limite de diffusion.
- **Modèles simplifiés :**
 - modèles P_n : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
 - modèles S_n : on discrétise en vitesse l'équation (ordonnées discrètes).
 - modèles M_n : modèles P_n non linéaire, fermés en minimisant l'entropie radiative.

Écriture du modèle P_1 :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{cases}$$

- **Méthodes numériques adaptées :** schémas "asymptotic preserving" de types volumes finis pour capturer les limites de diffusion.

Objectif :

construction de schémas "asymptotic preserving" pour différents modèles simplifiés sur maillages généraux issus de l'hydrodynamique lagrangienne.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D



énergie atomique - énergies alternatives

Equation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases}$$

- Erreur de consistance du schéma **upwind** classique : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit les états stationnaires du système dans les flux upwind, on obtient les flux :

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Erreur de consistance du schéma de Jin-Levermore :
 - pour la première équation : $O\left(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t\right)$.
 - pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.
- Condition CFL de stabilité du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon}\right) \leq 1$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



Schéma de Gosse-Toscani

- Principe du construction : localisation des termes sources aux interfaces ce qui induit une onde stationnaire, résolution du problème de Riemann.

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{avec } M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}.$$

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}} \right) \leq 1$.
- Remarque** : Le schéma de Jin-Levermore avec la discrétisation du terme source $\frac{1}{2}(F_{j+1/2} + F_{j-1/2})$ dérive sur le schéma de Gosse.
- Remarque** : pour les deux schémas, c'est la viscosité numérique qui donne le schéma limite sur maillage grossier.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires
générauxSchéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Contrairement au schéma décentré (où Upwind) **le schéma centré pour l'équation de la chaleur hyperbolique est AP.**
- Le schéma limite admet des modes parasites.
- Problème de stabilité des schémas centrés.
- Le schéma dit "**décalé**" est aussi "**asymptotic preserving**" :

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - E_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{E_{j+\frac{1}{2}} - E_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j. \end{array} \right.$$

- Le schéma ne préserve pas le principe du maximum $E + F > 0$, $E - F > 0$ en régime de transport.

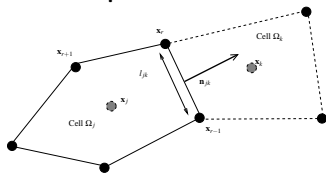
Contraintes

Les codes d'hydrodynamique et de diffusion couplés au transport de particules utilisent uniquement des inconnus centrés aux mailles.

- On souhaite définir des schémas **décentrés en régime de transport et avec des inconnues localisées aux centres des mailles.**

- On définit les notations pour les formulations volumes finis aux arêtes

Notations pour les VF aux arêtes



$\Rightarrow \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}$ et E_{jk} les flux associés à l'arête $\partial\Omega_{jk}$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On incorpore ces états à l'aide des formules de Taylor

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

On couple cela au solveur acoustique classique pour obtenir l'expression des flux :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_{jk} + E_j = \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} + E_{jk} - (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_{jk} + E_k = \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} - E_{jk} + (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- Système sous dimensionné. Pour le résoudre on fait l'hypothèse suivante,
- **Hypothèse** : Le maillage satisfait la condition de Delaunay et le centre de maille est le centre du cercle circonscrit. Alors :

$$(\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_j) = d_{jk} \mathbf{n}_{jk} \text{ et } (\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_k) = -d_{kj} \mathbf{n}_{jk}.$$

Limite asymptotique du schéma de Jin-Levermore

$$|\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{\sigma} \sum_k l_{jk} \frac{E_k^n - E_j^n}{d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)} = 0.$$

Non convergence du schéma VF4



énergie atomique - énergies alternatives

Le schéma limite du schéma de Jin-Levermore ne convergent pas sur maillages tordus.

Cas test : On choisit comme condition initiale la solution fondamentale au temps initial $t=0.001$, temps final $t_f=0.010$. $\varepsilon = 0.001$.

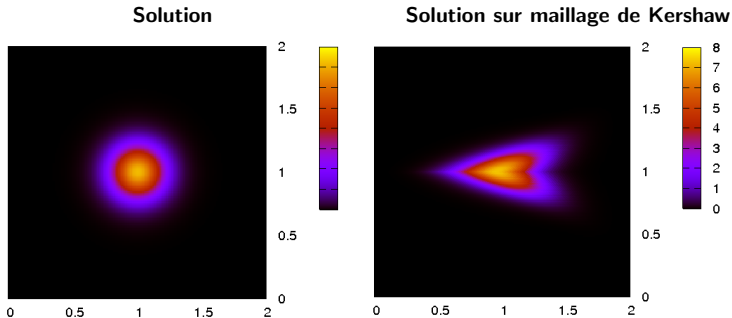
Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert





énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

**Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique**

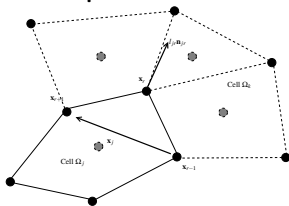
Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

- **Idée** : utiliser le schéma “GLACE” construit pour Euler linéarisé, analogue au modèle P_1 et coupler ce schéma à la méthode de Jin-Levermore.
- On définit les notations pour les formulations volumes finis aux noeuds

Notations pour les VF aux noeuds



- F_r et E_{jr} sont les flux associés aux noeud X_r .
- V_r le volume de contrôle, V_{jr} la partie du volume de contrôle associée à la maille j .

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Schéma AP GLACE nommé JL-(a) :

Schéma GLACE JL-(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

- Solveur nodal classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = 0, \end{array} \right.$$

avec $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$.

- Solveur nodal modifié : on insère dans les flux $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{F}$ pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j, \end{array} \right.$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Schéma de Gosse-Toscani équivalent au schéma de Jin-Levermore avec un terme source localisé aux interfaces.
- On utilise l'identité :

$$|\Omega_j| \hat{l}_d = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{x}_r.$$

- Schéma AP GLACE avec le terme source discrétisé aux noeuds nommé JL-(b) :

Schéma GLACE JL-(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j) \mathbf{F}_r. \end{array} \right.$$

- Le flux sont les mêmes que pour le schéma précédent.
- Le schéma JL-(a) **dérive sur le schéma de Jin-Levermore en 1D.**
- Le schéma JL-(b) **dérive sur le schéma de Gosse-Toscani en 1D.**

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Les flux existent si la matrice associée au solveur nodal est inversible.
- **Résultat de C. Mazeran** : les matrices

$$\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr},$$

sont définies positives, si toutes les mailles sont non dégénérées.

$$A_r = \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j).$$

- **Idée** : essayer d'écrire A_r comme une perturbation de $\hat{l}_d V_r$ et montrer que A_r reste définie positive selon la déformation.
- Soient \mathbf{x}_j le centre de maille, $\mathbf{x}_{j+1/2}$ le centre de l'arête. On pose V_{jr} le volume du polygone formé par ces points et par le nœud considéré.

Résultat partiel

Si la condition suivante est vérifiée la matrice est définie positive.

$$V_{jr} \geq \frac{1}{4} (\| \mathbf{x}_{j+1/2} - \mathbf{x}_{j-1/2} \| \| \mathbf{x}_j - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{j+1/2} + \mathbf{x}_{j-1/2}) \|).$$

- **Maillages triangulaires** : soit \mathbf{x}_j centre de gravité. On montre que la condition précédente équivaut à ce que les angles sont supérieures à 11 degrés.
- Ce résultat est une condition suffisante sous optimale.

Proposition

Le schéma limite est :

$$\begin{cases} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sigma(\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}. \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

$$\| \mathbf{e}(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_j |\Omega_j| (E_j(t) - E(\mathbf{x}_j, t))^2.$$

$$\| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 = \int_0^t \sum_r |V_r| (\mathbf{F}_r(t) - \nabla E(\mathbf{x}_r, t))^2.$$

Théorème

Si il existe une constante α telle que $A_r^S \geq \alpha V_r$ alors le schéma de diffusion semi-discret est convergent pour tout temps $T > 0$ avec l'estimation :

$$\| E(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)} \leq C(T)h.$$

- Le schéma AP semi-discret est décroissant en norme L^2 .

- On reformule le schéma pour obtenir un terme source centré. On obtient

Schéma GLACE modifié

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0 \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$ et

$$M_r = \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right)$$

- On **implicite le terme source**.
- En 1D on retombe sur le schéma de Gosse.
- L'étude en 1D montre que la CFL est du type $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}} \right) \leq 1$

- Le schéma limite admet des modes parasites à cause de son stencil en croix sur maillage Cartésien.
- Avec un Dirac comme condition initiale il y a non convergence sur maillage Cartésien. Un sous maillage est non utilisé par le schéma.
- Correction possible : calcul pour plusieurs définitions de $l_{jr}n_{jr}$, puis on moyenne les matrices.

Introduction

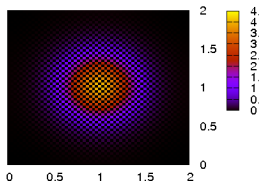
Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

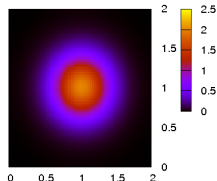
Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Sol. fond sans correction



Sol. fond. avec correction



- On introduit le modèle P_1 couplé avec une équation sur l'énergie de la matière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon^2} (aT^4 - E), \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma_a}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \\ \rho C_v \partial_t T = \frac{\sigma_a}{\varepsilon^2} (E - aT^4). \end{array} \right. \quad (2)$$

- limite de diffusion :**

$$\partial_t (\rho C_v T + aT^4) - \operatorname{div} \left(\frac{c}{3\sigma_a} \nabla aT^4 \right) = 0$$

- On définit la température radiative $E = aT_r^4$ avec a la constante de Stefan-Boltzmann. T est la température de la matière.
- Le schéma AP dans le cas du scattering reste AP dans le cas du couplage.**
- Le modèle P_1 avec le terme source sur \mathbf{F} est résolu avec les précédents schémas.
- Le couplage est résolu en utilisant un point fixe implicite.



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

**Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux**

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Schémas AP pour des modèles linéaires généraux



énergie atomique - énergies alternatives

- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}$$

- A, B, R symétriques et R positive.

Lemme

Soit \mathbf{u}_ε la solution du système de Friedrichs, \mathbf{E}_i les vecteurs propres de R et p la dimension du noyau de R . On suppose

$$\begin{cases} A \mathbf{E}_i = \gamma_i^1 \mathbf{E}_i \\ B \mathbf{E}_i = \gamma_i^2 \mathbf{E}_i, \forall i \in \{1..p\} \end{cases}$$

avec $\mathbf{E}_{i_1}, \mathbf{E}_{i_2}$ vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}$.
On pose $\mathbf{u}_0 = ((\mathbf{u}, \mathbf{E}_1), ..(\mathbf{u}, \mathbf{E}_p))$ alors

$$\| \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 \|_{L^2} \leq \varepsilon (C_0 \| \mathbf{u}_0(t=0) \|_{H^2} + (C_1 + C_2 T) \| \mathbf{u}_0 \|_{H^3})$$

avec \mathbf{u}_0 qui satisfait

$$\partial_t \mathbf{u}_0 - \frac{1}{\lambda_{i_1} \sigma} \partial_{xx} K_1 \mathbf{u}_0 - \frac{1}{\lambda_{i_2} \sigma} \partial_{yy} K_2 \mathbf{u}_0 = 0$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



- **Modèles S_n** : modèles issus de la méthode des ordonnées discrètes qui discrétise l'opérateur de scattering à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés des modèles S_n** : matrices de flux diagonales, $\dim \text{Ker} R = 1$, R diagonalisable et symétrique pour les variables $u_i = \sqrt{w_i} f(\Omega_i)$.
- w_i les poids de quadrature, Ω_i les vitesses de quadrature et f solution de l'équation de transport.
- **Modèles P_n** : modèles issus de la projection de l'équation de transport sur la base des harmoniques sphériques (extension du modèle P_1 pour le transport).
- **Propriétés des modèles P_n** : matrices de fluxes non symétriques, R définie par $R_{11} = 0$ et $R_{ii} = 1$ ($i \neq 0$).
- On peut obtenir un système symétrique en utilisant un changement de variable trivial.

Proposition

Les modèles P_n et S_n satisfont :

$$\begin{cases} A\mathbf{E}_i = \gamma_i^1 \mathbf{E}_{i_1} \\ B\mathbf{E}_i = \gamma_i^2 \mathbf{E}_{i_2}, \forall i \in \{1..p\}. \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Proposition

Le système diagonalisé dans la base de vecteurs propres de R pour les modèles P_n et S_n est

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}$$

avec D matrice diagonale composée des valeurs propres de R tel que $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse précédente est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices de P_1 à un coefficient multiplicateur près.
- **Conclusion** : les modèles P_n et S_n peuvent être scindés entre un système analogue à P_1 et un système qui n'intervient pas en limite de diffusion.
- **Stratégie numérique** : scinder le système diagonalisé, discrétiser le système P_1 à l'aide d'un schéma AP, discrétiser l'autre système à l'aide d'un schéma classique (Rusanov, upwind).



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

**Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert**

Schéma AP pour un modèle non linéaire en transfert radiatif



Le modèle aux deux moments non linéaire M_1 obtenu en minimisant l'entropie des photons est :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\hat{P}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases} \quad (3)$$

où E est l'énergie, \mathbf{F} le flux radiatif et

$$\hat{P} = \frac{1}{2}((1 - \chi(\mathbf{f}))Id + (3\chi(\mathbf{f}) - 1) \frac{\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|}) E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

la pression radiative. On définit $\mathbf{f} = |\mathbf{F}| / E$ and $\chi(\mathbf{f}) = \frac{3 + 4\mathbf{f}^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\mathbf{f}^2}}$.

Le modèle M_1 satisfait les propriétés suivantes

- La limite de diffusion, $\varepsilon \rightarrow 0$: $\partial_t E - \text{div}(\frac{1}{3\sigma} \nabla E) = 0$,
1er outil : schéma AP.
- La propriété d'entropie : $\partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \text{div}(\mathbf{Q}) \geq 0$, **2ème outil : reformulation**
- Le principe du maximum : $E > 0$, $|\mathbf{f}| < 1$, **comme un système d'Euler.**

avec

$$S = \frac{E^{3/4}(1 - |\mathbf{u}|^2)}{(3 + |\mathbf{u}|^2)^2}, \quad \mathbf{u} = \frac{(3\chi - 1)\mathbf{f}}{2|\mathbf{f}|^2}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{u}S$$

C. Buet et B. Després propose une reformulation du modèle comme un système de la dynamique des gaz :

- pour utiliser un schéma aux noeuds Lagrange+projection et obtenir un schéma limite consistant,
- pour utiliser l'entropie afin de contrôler le principe du maximum.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 & \text{cons. de la masse,} \\ \partial_t \rho \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rho \mathbf{v} & \text{cons. de la quantité de mouvement,} \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e + \mathbf{q}) = 0 & \text{cons. de l'énergie total,} \\ \partial_t \rho s + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} s) \geq 0 & \text{inégalité d'entropie,} \end{array} \right.$$

où $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ le flux radiatif, $E = \rho e$ l'énergie radiative et $S = \rho s$ l'entropie.

- $q = \frac{1 - \chi}{2} E.$
- $\mathbf{u} = \frac{3\chi - 1}{2} \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|^2},$ avec $\mathbf{f} = \frac{|\mathbf{v}|}{e}.$
- La reformulation est indépendante de la densité.
- $\mathbf{F} = \mathbf{u} E + \mathbf{q} \mathbf{u}, \quad \hat{P} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{F} + q I_d.$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- On utilise des schémas **aux noeuds** pour les phases Lagrange (schéma GLACE) et de projection.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t \rho_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) \rho_{jr} \right) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{v}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) (\rho \mathbf{v})_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{G}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r k_r l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{e}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) (\rho \mathbf{e})_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (\mathbf{u}_r, \mathbf{G}_{jr}) = 0. \end{array} \right.$$

Les flux Lagrangien sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{jr} = l_{jr} \mathbf{q}_j \mathbf{n}_{jr} + r_{jr} l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ \left(\sum_j r_{jr} l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{u}_r = \sum_j l_{jr} \mathbf{q}_j \mathbf{n}_{jr} + r_{jr} l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_j. \end{array} \right. \quad (4)$$

les flux upwind sont définis par

$$f_{jr} = \mathbf{1}_{(R^+ = \{(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) > 0\})} f_j + \mathbf{1}_{(R^- = \{(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) < 0\})} \frac{\sum_{R^+} l_{ir}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{ir}) f_i}{\sum_{R^+} l_{ir}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{ir})},$$

$$k_r = \frac{2E_r |\mathbf{f}_r|^2}{(3\chi - 1)}, \quad r_{jr} = \frac{1}{N(r)} \sum_j \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{E_j}{3 + |\mathbf{u}_j|^2}.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- On obtient le schéma non linéaire et positif suivant en régime de diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t E_j(t) + \sum_r \frac{1}{12\sigma} (l_{jr}(E_j \mathbf{n}_{jr} - \sigma \hat{\beta}_{jr} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_r}{E_r}) \tilde{\mathbf{u}}_r, \mathbf{n}_{jr}) + \frac{1}{4\sigma} \sum_r l_{jr} (\frac{\tilde{\mathbf{u}}_r}{E_r}, \mathbf{n}_{jr}) E_{jr} = 0, \\ \sigma \left(\sum_j l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right) \tilde{\mathbf{u}}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}. \end{cases} \quad (5)$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- E_{jr} est donné par le flux upwind, E_r est une moyenne de E_j autour du noeud r .
- Le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_r)$ définit par

$$\sigma \left(\sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_r) = \sum_j l_{jr} E(\mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr}$$

est une **approximation consistante du gradient** $-\frac{1}{\sigma} \nabla E(\mathbf{x}_r)$.

- Le second terme de (5) est homogène à $(E(\mathbf{x}_j) - (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j, \nabla E(\mathbf{x}_r))) (\frac{\nabla E(\mathbf{x}_r)}{E(\mathbf{x}_r)}, l_{jr} \mathbf{n}_{jr}) \simeq E(\mathbf{x}_r) (\frac{\nabla E(\mathbf{x}_r)}{E(\mathbf{x}_r)}, l_{jr} \mathbf{n}_{jr}) = (\nabla E(\mathbf{x}_r), l_{jr} \mathbf{n}_{jr})$.

- **Remarque** : La reformulation donne une équation non linéaire sur E .
- Cela permet d'obtenir **un schéma non linéaire et positif pour la diffusion**.
- Le schéma limite venant de la phase de projection et le schéma total sont d'ordre 1.
- Pour obtenir un schéma d'ordre deux on introduit un MUSCL avec limiteur pour conserver la positivité.
- **La méthode MUSCL ne permet pas de conserver $\| \mathbf{F} \| \leq E$** .
- Par conséquent on active la méthode MUSCL seulement en régime de diffusion car \mathbf{F} tend vers 0.
- **Remarque** : On peut utiliser **un autre schéma d'advection** (schéma aux arêtes, schéma anti-dissipatif).

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Lemme

On suppose

$$E_j(t=0) > 0, \quad \|\mathbf{f}_j(t=0)\| < 1 \quad (6)$$

et $\widehat{\beta}_{jr}$ défini positif alors le schéma est entropique au sens ou

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R^+} l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_j + \sum_{R^-} l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{k(r)} \right) \geq 0, \text{ pour tout temps } (7)$$

et préserve le principe du maximum

Idée de preuve :

- Un calcul classique montre que l'inégalité d'entropie est satisfaite si $\widehat{\beta}_{jr}$ et E sont positifs. De plus le flux est \mathbf{u}_r borné.
- $S = \frac{E^{3/4}(1-|\mathbf{u}|^2)}{(3+|\mathbf{u}|^2)^2} \geq Cts$ implique que E et $(1-|\mathbf{u}|^2)$ sont positifs et minorés.
- Avec une condition initiale du type (6) et en utilisant des résultats de système dynamique (théoreme des bouts, de Cauchy) on montre que le résultat en tout temps.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

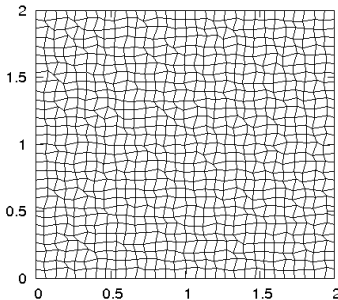
Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

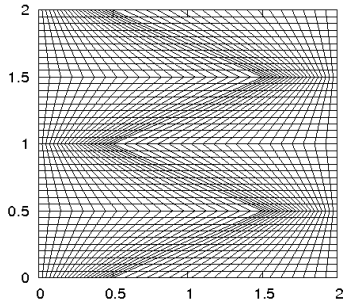
Résultats numériques

Deux exemples classiques de maillages non structurés.

Maillage Cartésien bruité



Maillage Kershaw



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



Cas test 1 : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale au temps initial $t=0.001$. Temps final $t_f = 0.010$.

Maillage	Cartésien	aléatoire quad.	Kershaw
q	2.00	1.98	2.00

Introduction

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D

Maillage	Triang. rég.	Triang. rég. mod.	aléatoire triang.
q	2.00	1	1.32

Cas test 2 : $E(t, x, y) = \exp(-2\pi^2 t) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$, $\Omega =]0, 2[\times]0, 2[$.

Maillage	Cartésien	aléatoire quad.	Kershaw
q	2.08	2.07	2.85

Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

Schémas AP pour des modèles linéaires généraux

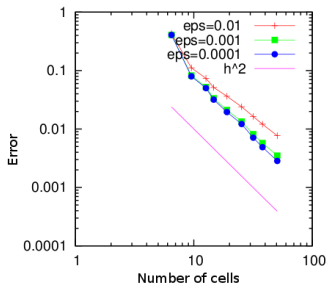
Maillage	Triang. rég.	Triang. rég. mod.	aléatoire triang.
q	2.23	1.02	1.25

Schéma AP pour un modèle non linéaire en transfert

Pour le second cas test, en temps long, sur des maillages triangulaires des modes parasites apparaissent.

- Pour le régime de transport $\varepsilon = O(1)$ et $\sigma = O(1)$ le schéma converge.
- Ordre 1 classique.
- Régime asymptotique : cas test 1 pour la diffusion. On calcul l'erreur par rapport à la solution de l'équation de diffusion.

Courbe de convergence pour différents ε



- ε suffisamment petit, on retrouve l'ordre 2.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

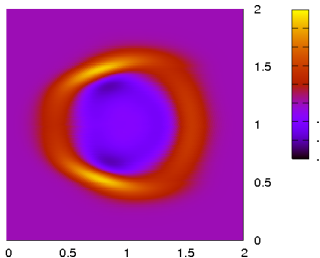
Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

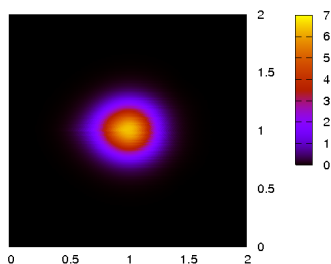
Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- On résout le modèle P_1 avec la solution fondamentale de la chaleur comme condition initiale et $\varepsilon = 0.001$. La solution est la solution de l'équation de la chaleur à ε près. On résout le schéma GLACE AP sur maillage de Kershaw.

Solution avec schéma classique



Solution avec schéma AP



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

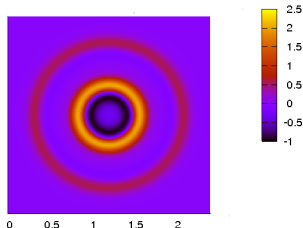
Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

- Test 1 : résultat en régime de diffusion. On reprend le cas test 1 de diffusion. Tableau de convergence :

Mesh ε	0.001	0.0001
Cartésien	1.79	1.97
Aléa. quad.	1.85	2
Triang. reg.	1.89	1.99
Aléa. trig.	1.37	1.37
Kershaw K=1	1.86	1.97

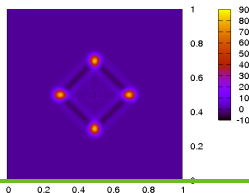
- Test 2 : calcul numérique de la solution fondamentale de P_3 avec le schéma GLACE stabilisé.



- Modèle a 4 vitesses : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.
- **Régime de transport** : Ordre 1 de convergence pour les solutions régulières.
- Test 1 : **régime asymptotique**, cas test 1 de diffusion. Tableau de convergence :

Mesh ε	0.001	0.0001
Cartésien	1.81	1.97
Aléa. quad.	1.85	1.98
Triang. reg.	1.9	1.99
Random trig.	1.37	1.37
Kershaw	1.85	1.97

- Test 2 : calcul numérique de la solution fondamentale de S_2 avec le schéma GLACE sur maillage aléatoire :



- La condition initiale est la solution fondamentale de la chaleur au temps $t=0.001$. Le temps final est $T_f = 0.01$.
- On compare le schéma linéaire limite du schéma P_1 , le schéma non-linéaire limite de M_1 et le schéma VF4.

Schéma	non-linéaire		VF4		Linéaire	
Maillage	ordre	$E_j < 0$	order	$E_j < 0$	order	$E_j < 0$
Cartésien	1.92	0	2	0	2	0
Aléa. quad.	1.9	0	0.31	0	1.98	4
Régulier. tri.	2.23	0	2	0	2.	0
Aléa. tri.	2.16	0	0.96	0	1.32	4453
Kershaw	1.93	0	0	0	2	96664

TAB.: Ordre de convergences.

On compare la solution numérique du schéma pour M_1 avec la solution de diffusion sur maillage aléatoire. $\varepsilon = 0.0001$.

Nombre de mailles	40	50	80	100
Erreur	0.0328	0.02228	0.00901	0.00610

TAB.: Erreur sur différents maillages. Ordre de convergence $\simeq 1.85$

- On souhaite tester le principe du maximum. On propose le test de transport suivant : $\sigma = 0$, $E(0) = F_x(0) = \mathbf{1}_{[0.4:0.6]^2}$ et $F_y(0) = 0$. La solution est $E(t) = F_x(t) = \mathbf{1}_{[0.4+t:0.6+t]^2}$ et $F_y(t) = 0$.

Maillage	ordre	Nb coef $E < 0$	Nb coef $\ \mathbf{f} \ > 1$
Cartésien	0.45	0	0
Aléatoire quad.	0.43	0	0
Kershaw K=1	0.4	0	0

TAB.: Ordre de convergence pour le test de transport.

- L'ordre théorique pour une solution discontinue est 0.5.
- En raffinant plus on approche cette ordre.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Conclusion



● Conclusion

- On a obtenu des schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique sur maillages non structurés.
- On a montré la convergence du schéma limite de diffusion GLACE et la stabilité du schéma AP GLACE.
- En utilisant la décomposition présentée on obtient des schémas AP simples pour les systèmes S_n et P_n .
- Pour le modèle M_1 on obtient un schéma préservant le principe du maximum, entropique et AP.

Publications

- C. Buet, B. Després, E. Franck *Design of asymptotic preserving schemes fore hyperbolic heat equation on unstructured meshes* Numerish Mathematik, accepted.
- E. Franck, P. Hoch, G. Samba, P. Navarro *An asymptotic preserving scheme for P_1 model using classical diffusion schemes on unstructured polygonal meshes* ESAIM : Proceedings, October 2011, Vol. 32, p. 56-75.
- C. Buet, B. Després, E. Franck *AP schemes for Friedrichs systems with stiff relaxation on unstructured meshes. Applications to the angular discretization in transport.* In progress.

- **Perspectives pour la fin de thèse**

- Schémas basés sur un formalisme Lagrange+projection AP et "well-balanced" pour les systèmes d'Euler et de Saint Venant avec gravité et friction.
- Preuve de convergence pour le schéma P_1 GLACE.
- Schémas positif et "asymptotic preserving" pour les modèles S_n .
- Schémas d'ordre deux dans tout les régimes.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires
généraux

Schéma AP
pour un
modèle non
linéaire en
transfert

Merci de votre attention