

Construction et analyse de schémas de type volume finis valides en régime de diffusion sur maillages tordus

C. Buet¹, B. Després², E. Franck³, T. Leroy⁴

Séminaire modélisation et calcul scientifique, Lyon, 04 Février 2014

¹CEA, DAM, DIF, France

²LJLL, UMPC, Paris, France

³Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, Allemagne

⁴CEA, DAM, DIF et LJLL, UPMC, Paris, France

Plan

- 1 Contexte physique et mathématique
- 2 Schémas AP sur maillages non structurés pour le modèle P_1
- 3 Systèmes de Friedrichs et transport linéaire
- 4 Extension non linéaire: modèle M_1 et équations d'Euler

Contexte physique et mathématique

Systèmes hyperboliques raides

- Systèmes hyperboliques raides avec termes sources:

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F(\mathbf{U}) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_y G(\mathbf{U}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\sigma > 0$.

- Limite de diffusion pour $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\partial_t \mathbf{V} - \operatorname{div}(K(\nabla \mathbf{V}, \sigma)) = 0, \quad \mathbf{V} \in \operatorname{Ker} R.$$

- Applications: biologie, neutronique, dynamique des fluides, physique des plasmas, **Hydrodynamique Radiative pour la FCI** (Hydrodynamique + transport linéaire).

Schémas Asymptotic preserving

- Modèle P_1 :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left(\frac{1}{\sigma} \partial_x E \right) = 0. \quad (1)$$

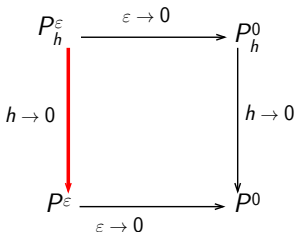


Figure: Diagramme AP:

- Consistance des schémas de type **Godunov**: $O(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t)$.
- Condition CFL: $\Delta t (\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}) \leq 1$.
- Consistance des schémas AP: $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL: $\Delta t \leq \Delta x^2 + \varepsilon \Delta x$
- Schémas AP vs non AP : **réduction très importante du coût CPU.**

- Les schémas AP de type Godunov sont obtenus **en incorporant les termes sources dans les flux** (S. Jin-D. Levermore, L.Gosse and al, C. Berthon, R. Turpault et co ..)
- Le problème de consistance vient de la **viscosité numérique homogène à $O(\frac{\Delta x}{\varepsilon})$.**

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**

- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.

- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_j - x_{j+\frac{1}{2}})\partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}})\partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**

- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**

- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.

- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On couple ces relations avec les flux

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**

- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.

- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- Schéma de Jin-Levermore

- Principe: introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\epsilon} F$ dans les flux.

Schéma de Jin Levermore:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\epsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\epsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\epsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\epsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\epsilon^2} F_j^n = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\epsilon}{2\epsilon + \sigma \Delta x}$.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**

- **Principe:** introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux.

Schéma de Jin Levermore:

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Jin-Levermore**:

- première équation: $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$,

- seconde équation: $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.

- Condition CFL du schéma explicite: $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon^2} \right) \leq 1$.

- Condition CFL du schéma semi-implicite: $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Gosse-Toscani**

- **Principe:** Le schéma de Jin-Levermore (2) avec la discrétisation du terme source $\frac{1}{2}(F_{j+\frac{1}{2}} + F_{j-\frac{1}{2}})$ est égal au schéma de Gosse-Toscani.

Schéma de Gosse Toscani:

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{cases} \quad (3)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani**: $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \Delta x^2} \right) \leq 1$.

Exemple numérique

- **Test de validation des schémas AP:** les données sont $E(0, x) = G(x)$ avec $G(x)$ une Gaussienne, $F(0, x) = 0$ et $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0.001$.

Schéma AP

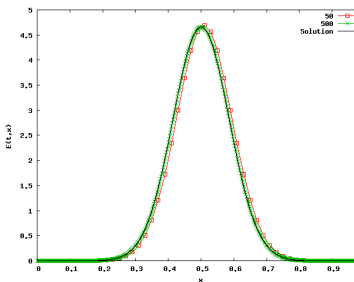


Schéma Godunov

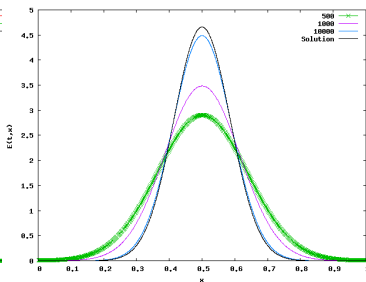
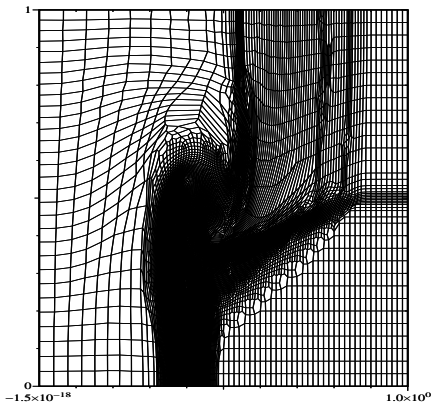


schéma	Erreur L^1	temps CPU
Godunov, 10000 mailles	0.0366	1485m4.26s
Godunov, 500 mailles	0.445	0m24.317s
AP, 500 mailles	0.0001	0m15.22s
AP, 50 mailles	0.0065	0m0.054s

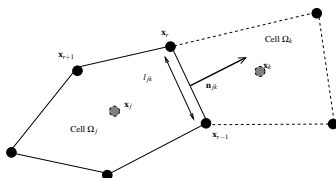
Pourquoi sur maillages non structurés ?

- **Applications** : couplage entre les radiations et l'hydrodynamique.
- **Certains codes d'hydrodynamique**: schémas "cell-centered" de types Lagrangien ou ALE pour des problèmes multi-matériaux.
- Exemple de maillage obtenu avec un code ALE (droite).
- **But**: Construire et analyser des schémas AP "cell-centered" pour le transport linéaire sur maillages généraux.



Schémas "Asymptotic preserving" 2D

- **Extension classique en 2D du schéma de Jin-Levermore** : modifier le flux upwind (flux 1D écrit dans la direction normale) en incorporant les états stationnaires dans les flux.



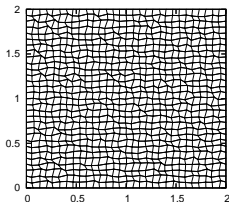
- l_{jk} et \mathbf{n}_{jk} sont la longueur et la normale associées à l'arête $\partial\Omega_{jk}$.

Limite asymptotique du schéma AP:
$$|\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \frac{1}{\sigma} \sum_k l_{jk} \frac{E_k^n - E_j^n}{d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)} = 0.$$

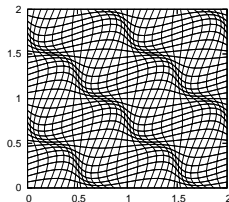
- $\|P_h^0 - P_h\| \rightarrow 0$ seulement sous des contraintes géométriques fortes.
- Les schémas AP **ne convergent pas** en 2D sur maillages généraux $\forall \varepsilon$.

Exemples de maillages non structurés

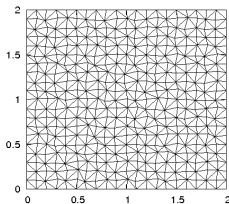
Maillage aléatoire



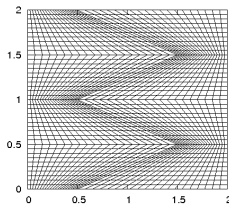
Maillage "smooth"



Maillage aléatoire triang.



Maillage Kershaw

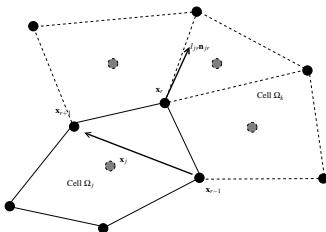


Schémas AP sur maillages non structurés pour le modèle P_1

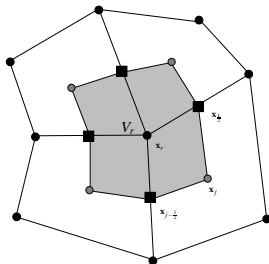
Schémas AP 2D: Principe et notations

Idée: Formulation **aux noeuds** des méthodes de volumes finis (flux localisés aux noeuds) pour le modèle P_1 + la méthode de Jin-Levermore.

Quantités géométriques



Volume de controle



- Quantités géométriques définies par $l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \nabla_{x_r} |\Omega_j|$ (Gauche).
- $\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}$.
- Volume de controle V_r (Droite).

Schémas AP 2D

Schémas AP aux noeuds:

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{cases}$$

- Flux aux noeuds classique:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

with $\hat{\alpha}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$.

- Nouveaux flux obtenus en incorporant l'état stationnaire $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{F}$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$.

- Terme source: (1) $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j$ ou (2) $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r$, $\sum_r \hat{\beta}_{jr} = \hat{l}_d |\Omega_j|$.

Discrétisation en temps pour le schéma AP

- Nouvelle formulation du schéma avec le terme source (2) et discrétisation semi-implicite locale:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

$$M_r = \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right)$$

- Le schéma semi-implicite est stable sous une condition CFL indépendante de ε (numériquement).
- Le schéma implicite est stable.

Hypothèses pour la preuve de convergence

Hypothèses géométriques

- $(\mathbf{u}, (\sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{u}) \geq \beta h(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$
 - $(\mathbf{u}, (\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{u}) \geq \gamma h(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$
 - $(\mathbf{u}, (\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)) \mathbf{u}) \geq \alpha V_r(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$
- Deux premières hypothèses: vérifiées sur tous maillages non dégénérés.
 - Dernière hypothèse: on obtient des conditions suffisantes non nécessaires sur le maillage.
 - Exemple: pour les triangles tous les angles doivent être plus grand que 12 degrés.

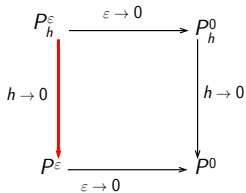
Hypothèses sur la régularité des solutions et des conditions initiales

- $\mathbf{F}(t = 0, \mathbf{x}) = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla E(t = 0, \mathbf{x})$
- Régularité des solutions: $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = (E(t, \mathbf{x}), \mathbf{F}(t, \mathbf{x})) \in W^{3, \infty}(\Omega)$ et $\mathbf{V}(0, \mathbf{x}) \in H^3(\Omega)$
- Régularité des conditions initiales pour le schéma: $\mathbf{V}_h(t = 0, \mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$

Convergence uniforme en espace: principe

- Estimation de convergence naive : $\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{naive} \leq C\varepsilon^{-b}h^c$
- **Idee:** Utiliser des estimations intermédiaires et des inégalités triangulaires (Jin-Levermore-Golse).

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq \min(\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{naive}, \|P_h^\varepsilon - P_h^0\| + \|P_h^0 - P^0\| + \|P^\varepsilon - P^0\|)$$



- Estimations intermédiaires :

- $\|P^\varepsilon - P^0\| \leq C_a \varepsilon^a,$
- $\|P_h^0 - P^0\| \leq C_d h^d,$
- $\|P_h^\varepsilon - P_h^0\| \leq C_e \varepsilon^e,$
- $d > c, e = a.$

- On obtient:

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \min(\varepsilon^{-b}h^c, \varepsilon^a + h^d + \varepsilon^e)$$

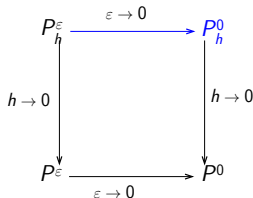
- En comparant ε et $\varepsilon_{threshold} = h^{\frac{ac}{a+b}}$ On obtient l'estimation finale:

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq h^{\frac{ac}{a+b}}$$

Schéma limite de diffusion

Schéma limite de diffusion (P_h^0):

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr} \mathbf{F}_j = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$

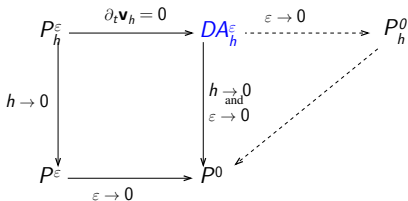


- **Problème:** estimation de $\|P_h^\epsilon - P_h^0\|$.
- En pratique on obtient $\|P_h^\epsilon - P_h^0\| \leq C \frac{\epsilon}{h}$.

Schéma limite de diffusion

Schéma limite de diffusion (P_h^0):

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr}(\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr} \mathbf{F}_j = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$



- **Problème:** estimation de $\|P_h^\epsilon - P_h^0\|$.
- En pratique on obtient $\|P_h^\epsilon - P_h^0\| \leq C \frac{\epsilon}{h}$.
- Introduction d'un **schéma intermédiaire de diffusion** DA_h^ϵ .
- DA_h^ϵ : schéma P_h^ϵ avec $\partial_t \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$.
- Dans les estimations introduites précédemment on remplace P_h^0 par DA_h^ϵ .

Condition H et résultat final

Condition H: La matrice Hessienne discrète du schéma P_h^0 peut être majorée ou l'estimation d'erreur $\|P_h^\varepsilon - P_h^0\|$ peut être obtenue indépendamment de la Hessienne discrète.

- Condition H respectée : on utilise P_h^0 dans les estimations.
- Condition H non respectée : on utilise DA_h^ε dans les estimations.
- Condition H respectée sur grilles Cartésiennes ou sur grilles non uniformes en 1D.

Résultat final: On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante $C(\mathcal{T}) > 0$ tel que:

$$\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq C \min \left(\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}, \varepsilon \max \left(1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \right) + h + (h + \varepsilon) + \varepsilon \right) \leq Ch^{\frac{1}{4}}. \quad (4)$$

- Cas $\varepsilon \leq h$: $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_1 \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}, 1) \leq C_1 h$
- Cas $\varepsilon \geq h$: $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_1 \min(\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{h}})$
- En introduisant $\varepsilon_{thresh} = h^{\frac{1}{2}}$ on montre que le pire cas est $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_2 h^{\frac{1}{4}}$.

Résultats intermédiaires I

- \mathbf{V}^ε solution exacte de P^ε , \mathbf{V}_h^ε solution numérique de P_h^ε .

Estimation de $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante $C > 0$ tel qu'on obtienne l'estimation

$$\|\mathbf{V}_h^\varepsilon - \mathbf{V}^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq C \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}.$$

- Principe de la preuve:
 - Contrôler la stabilité des quantités discrètes \mathbf{F}_r et \mathbf{F}_j par ε
 - On définit l'erreur $E(t) = \|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|_{L^2}$ et on estime $E'(t)$ en utilisant les inégalités de Young et Cauchy-Schwartz, les estimations de stabilité, les propriétés géométriques et beaucoup de calculs.
 - Intégration en temps de l'estimation sur $E'(t)$.

Résultats intermédiaires II

- \mathbf{V}_h^0 solution de DA_h^ε , \mathbf{V}^0 solution exacte de P^0 .

Estimation de $\|DA_h^\varepsilon - P^0\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante positive $\forall T > 0$ $C_1(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}_h^0 - \mathbf{V}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(T)(h + \varepsilon), \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

- Principe de la preuve:
 - Estimations de stabilité pour les quantités discrètes E_j et pour les gradients discrets aux noeuds.
 - Etude de consistance des différent opérateurs: divergence et gradient.
 - Estimation L^2 en utilisant les erreurs de consistance + lemme de Gronwall.

Résultats intermédiaires III

- \mathbf{V}_h^ε solution of P_h^ε , \mathbf{V}_h solution numérique de DA_h^ε .

Estimate $\|P_h^\varepsilon - DA_h^\varepsilon\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe $\forall T > 0$ une constante, $C_2(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}_h^\varepsilon - \mathbf{V}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2(T)\varepsilon \max\left(1, \sqrt{\varepsilon h^{-1}}\right) + Ch, \quad 0 < t \leq T. \quad (6)$$

- \mathbf{V}^ε solution de P^ε , \mathbf{V}^0 solution numérique de P^0 .

Estimation de $\|P^\varepsilon - P^0\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe $\forall T > 0$ une constante, $C_3(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3(T)\varepsilon, \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

- Principe de la preuve:

- Écrire $P^0 = P^\varepsilon + R$ (resp $DA_h^\varepsilon = P_h^\varepsilon + R$) avec R un résidu.
- Obtenir une majoration par ε du résidu.
- Estimation L^2 de la différence entre les modèles ou les deux schémas.

Schéma AP vs schéma classique

- Cas test: solution fondamentale de la chaleur, $\varepsilon = 0.001$. Résultats donnés par différents schémas pour le modèle P_1 sur maillage de Kershaw.

Solution de diffusion

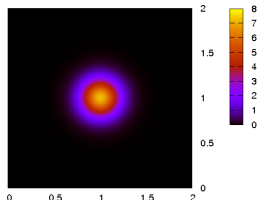


Schéma non AP

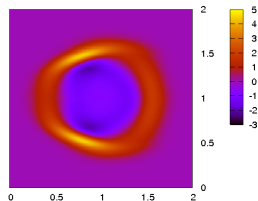


Schéma AP standard

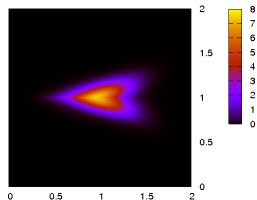
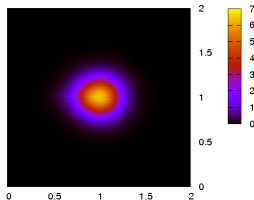
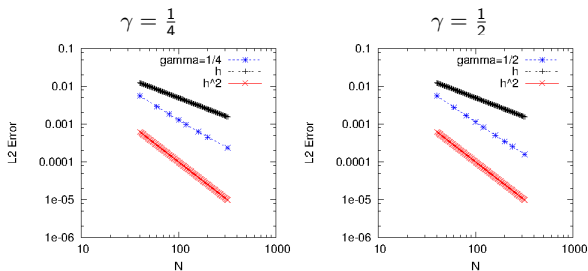


Schéma AP aux noeuds



Convergence pour le système P_1

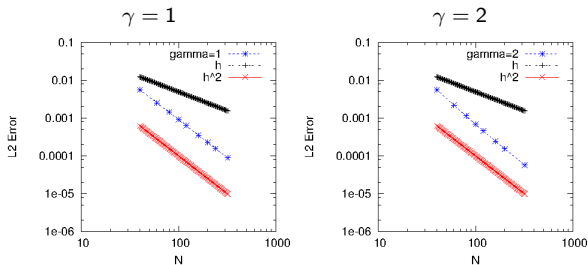
- Solution périodique pour le système P_1 dépendant de ε .
- $E(t, x) = (\alpha(t) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \alpha'(t)) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
- $F(t, x) = (-\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi x) \cos(\pi y), -\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi y) \cos(\pi x))$
- Étude de convergence pour $\varepsilon = h^\gamma$ sur un maillage aléatoire quadrangulaire.



- Les résultats numériques montrent que l'erreur est homogène $O(h\varepsilon + h^2)$.
- Estimation théorique espérée $O((h\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + h)$.
- Estimation obtenue n'est pas optimale dans le régime intermédiaire.

Convergence pour le système P_1

- Solution périodique pour le système P_1 dépendant de ε .
- $E(t, x) = (\alpha(t) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \alpha'(t)) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
- $F(t, x) = (-\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi x) \cos(\pi y), -\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi y) \cos(\pi x))$
- Étude de convergence pour $\varepsilon = h^\gamma$ sur un maillage aléatoire quadrangulaire.



- Les résultats numériques montrent que l'erreur est homogène $O(h\varepsilon + h^2)$.
- Estimation théorique espérée $O((h\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + h)$.
- Estimation obtenue n'est pas optimale dans le régime intermédiaire.

Systemes de Friedrichs et transport linéaire

Systèmes de Friedrichs avec termes sources

- Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R matrices symétriques et R symétrique positive.

Systèmes de Friedrichs avec termes sources

- Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R matrices symétriques et R symétrique positive.

Théorème

On note \mathbf{E}_i les vecteurs propres de R avec $\text{Ker } R = \text{vect}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p)$. On suppose qu'il existe deux vecteurs particuliers indépendants associés aux valeurs propres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}$ de R satisfaisant

$$\begin{cases} A \mathbf{E}_i = \gamma_i \mathbf{E}_{p+1}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \\ B \mathbf{E}_i = \delta_i \mathbf{E}_{p+2}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \end{cases} \quad (H_1)$$

alors $((\mathbf{U}, \mathbf{E}_1), \dots, (\mathbf{U}, \mathbf{E}_p))$ tend vers $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^p$ quand ε tend vers zéro avec

$$\partial_t \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+1} \sigma} K_1 \partial_{xx} \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+2} \sigma} K_2 \partial_{yy} \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

et K_1, K_2 des matrices symétriques définies positives.

Modèles P_n et S_n

- Équation de transport linéaire (transfert radiatif, neutronique): soit $f(t, \mathbf{x}, \Omega) \geq 0$ la fonction de distribution des particules localisées en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et de direction $\Omega = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{S}^{d-1}$. On considère l'équation de transport

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}, \Omega) + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}, \Omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int_S \left(f(t, \mathbf{x}, \Omega') - f(t, \mathbf{x}, \Omega) \right) d\Omega'.$$

- **Modèles S_n :** (méthode des ordonnées discrètes) obtenue par approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés du modèles S_n :** A, B matrices diagonales, $\dim \text{Ker } R = 1$ et R symétrique positive.
- **Modèles P_n :** obtenus par projection de l'équation de transport sur les harmoniques sphériques.
- **Propriétés du modèles P_n :** système symétrisable, R matrice diagonale définie par $R_{11} = 0$ et $R_{ii} = 1$ ($i \neq 0$).

Théorème

Les modèles P_n et S_n satisfont l'hypothèse de structure (H_1) .

Décomposition des systèmes de Friedrichs

Théorème:

Lorsqu'on écrit les modèles P_n ou S_n dans la base des vecteurs propres de R , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V} \quad (8)$$

avec D diagonale, définie par $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices associées au modèle P_1 .

Décomposition des systèmes de Friedrichs

Théorème:

Lorsqu'on écrit les modèles P_n ou S_n dans la base des vecteurs propres de R , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V} \quad (8)$$

avec D diagonale, définie par $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices associées au modèle P_1 .
- **Conclusion:** Les modèles P_n et S_n peuvent être décomposés entre le modèle P_1 et un système qui n'intervient pas en régime de diffusion.
- **Méthode numérique (micro-macro décomposition ?):** Diagonalisation du système, décomposition du système, discrétisation du modèle P_1 avec un schéma AP et l'autre système avec un schéma classique.

Résultats numériques sur les systèmes de Friedrichs

- Régime de diffusion: cas test précédent.

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Table: Ordre de convergence. Modèle P_3 **Table:** Ordre de convergence. Modèle S_2

Résultats numériques sur les systèmes de Friedrichs

- Régime de diffusion: cas test précédent.

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

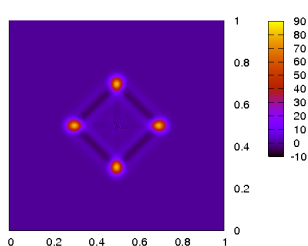
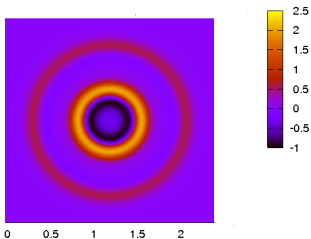
Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Table: Ordre de convergence. Modèle P_3 Table: Ordre de convergence. Modèle S_2

- Cas test de transport: solution fondamentale

Solution fondamentale du modèle P_3

Solution fondamentale du modèle S_2



Extension non linéaire: modèle M_1 et équations d'Euler

Equations d'Euler avec friction et gravité

- Équations d'Euler avec friction et gravité:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = \frac{1}{\varepsilon} (\rho \mathbf{g} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}), \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{1}{\varepsilon} (\rho (\mathbf{g}, \mathbf{u}) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \|\mathbf{u}\|^2). \end{cases}$$

Propriétés :

- Inégalité d'entropie: $\partial_t \rho S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} S) \geq 0$.
- États stationnaires:

$$(E_1) \begin{cases} \mathbf{u} = 0, \\ \nabla p = \rho \mathbf{g}. \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \mathbf{u} = 0, & \rho = \rho_c, \\ \nabla p = \rho_c \mathbf{g} \end{cases} \quad (\text{cas simple}).$$

- Limite de diffusion:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho e + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \frac{1}{\sigma} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right). \end{cases}$$

Schéma AP pour les équations Euler

Idée :

Schéma aux noeuds Lagrange + projection couplé avec la méthode de Jin-Levermore.

● Discrétisation :

- Phase Lagrangienne: schéma GLACE (B. Després et Co.) ou schéma EUCCLYD (P H. Maire et Co.).
- Modification des flux en incorporant la relation $\nabla p = \rho \mathbf{g} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}$.
- Discrétisation du terme source en utilisant les flux aux noeuds.
- Phase de projection: schéma d'advection aux noeuds.

● Propriétés :

- Schéma AP avec un schéma limite de diffusion d'ordre un (vérifié dans le cas Barotrope avec une pression linéaire).
- Discrétisation en temps semi-implicite avec une condition CFL indépendante de ε (vérifié numériquement)
- Positivité de la densité sous une condition CFL indépendante de ε .
- **Inégalité d'entropie préservée** ???

Propriété "well-balanced"

Définition :

- Schéma WB exact : préserve exactement les états stationnaires.
 - Schéma q-WB: schéma qui converge avec l'ordre q pour les états stationnaires.
 - Schéma WB discret: préserve exactement les états stationnaires discrets définis aux interfaces.
- états stationnaires discrets = états stationnaires continus implique qu'un schéma WB discret est un schéma WB exact (exemple équations de Saint Venant).

Résultat I:

Si les conditions initiales satisfont l'état stationnaire discret $\nabla_r p = \rho_r \mathbf{g}$ alors $\rho_j^{n+1} = \rho_j^n$, $(\rho_j \mathbf{u}_j)^{n+1} = (\rho_j \mathbf{u}_j)^n$ et $(\rho_j e_j)^{n+1} = (\rho_j e_j)^n$.

Résultat II:

- Le schéma AP est un schéma WB discret et un schéma 2-WB pour les équilibres hydrostatiques.
- Le schéma AP est un schéma WB exact dans le cas d'une densité constante.

Schéma WB: résultats

- Données initiales pour le cas test (1): $\rho_j = 1$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ et $e_j = \frac{1}{\gamma-1}(\mathbf{x}_j, \mathbf{g}) + C$
- Données initiales pour le cas test (2): $\rho_j(t, \mathbf{x}) = y + b$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ et $p_j(t, \mathbf{x}) = -(\frac{y^2}{2} + by)$.
- La gravité est définie par $\mathbf{g} = (0, -1)$.

Schémas	LP-AP			LP		
	40	80	160	40	80	160
Cartésien	5.9×10^{-17}	1×10^{-16}	7.1×10^{-17}	0.00470	0.00239	0.00121
Aléatoire	1.1×10^{-16}	1.5×10^{-16}	3×10^{-16}	0.01519	0.00947	0.00526
Kershaw	1.4×10^{-16}	2.2×10^{-16}	3.2×10^{-16}	0.08503	0.050	0.02908

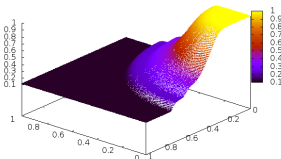
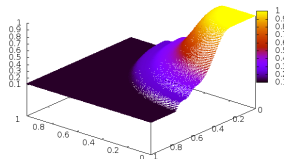
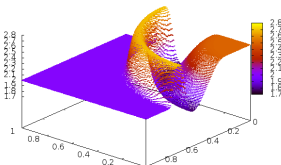
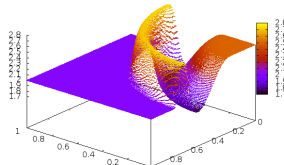
Ordre de convergence pour le cas test (1).

Schémas	LP-AP			LP		
	80	160	320	80	160	320
Cartésien	2.3×10^{-15}	9.4×10^{-15}	3.4×10^{-14}	0.0034	0.0017	0.000085
Aléatoire	3.5×10^{-5}	1×10^{-5}	2.8×10^{-6}	0.0097	0.0053	0.0028
Kershaw	1.1×10^{-6}	1.8×10^{-7}	4.3×10^{-8}	0.037	0.0084	0.00205

Ordre de convergence pour le cas test (2).

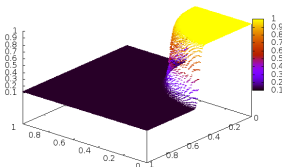
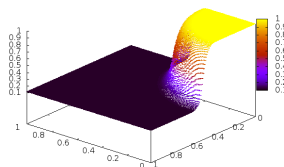
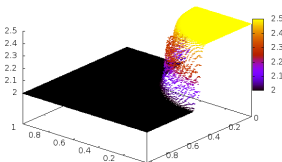
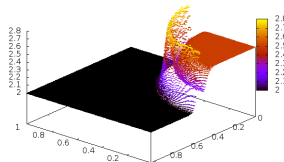
Résultats pour les équations d'Euler

- Cas test: problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 1$ et $g = 0$ (limite en temps court).
- $\sigma = 1$, maillage aéatoire 160×160

Schéma AP, ρ Schéma non AP, ρ Schéma AP, ε Schéma non AP, ε 

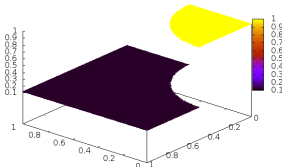
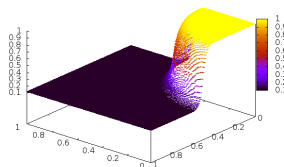
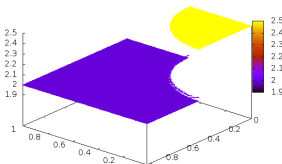
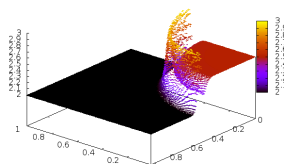
Résultats pour les équations d'Euler

- Cas test: problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 1$ et $g = 0$ (limite en temps court).
- $\sigma = 10^3$, maillage aéatoire 160×160

Schéma AP, ρ Schéma non AP, ρ Schéma AP, ε Schéma non AP, ε 

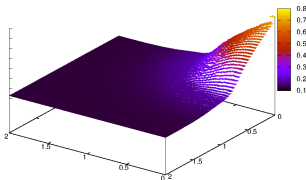
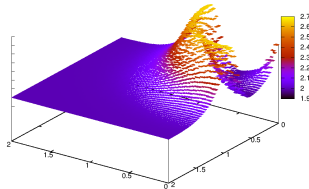
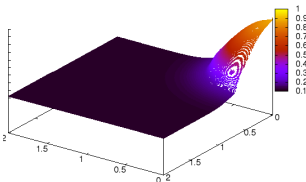
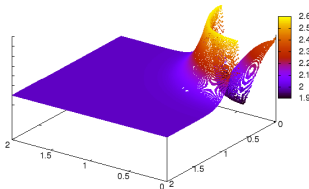
Résultats pour les équations d'Euler

- Cas test: problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 1$ et $g = 0$ (limite en temps court).
- $\sigma = 10^6$, maillage aéatoire 160×160

Schéma AP, ρ Schéma non AP, ρ Schéma AP, ε Schéma non AP, ε 

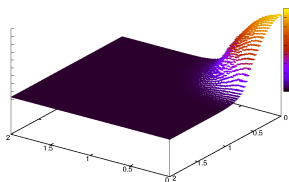
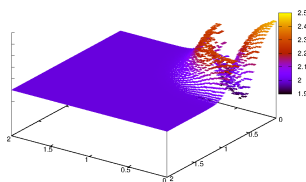
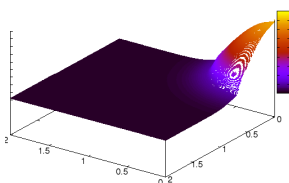
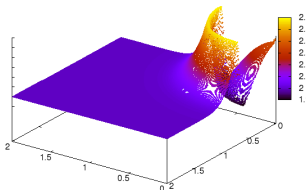
Résultats pour les équations d'Euler

- Cas test: problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 0.005$ et $g = 0$ (limite en temps long).
- Schéma classique sur grille grossière Vs schéma classique sur grille fine

Schéma non AP, ρ Schéma non AP, E Schéma classique, ρ Schéma classique, E 

Résultats pour les équations d'Euler

- Cas test: problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 0.005$ et $g = 0$ (limite en temps long).
- Schéma AP sur grille grossière Vs schéma classique sur grille fine

Schéma AP, ρ Schéma AP, E Schéma classique, ρ Schéma classique, E 

Transfert radiatif: modèle M_1

- Modèle aux moments en transfert radiatif: modèle M_1 .

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\widehat{P}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases} \quad (9)$$

- E énergie, \mathbf{F} le flux radiatif et $\widehat{P} = \frac{1}{2}((1 - \chi(\mathbf{f}))Id + (3\chi(\mathbf{f}) - 1)\frac{\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|})E$ la pression.
- $\mathbf{f} = \|\mathbf{F}\|/E$ and $\chi(\mathbf{f}) = \frac{3+4\mathbf{f}^2}{5+2\sqrt{4-3\mathbf{f}^2}}$.

Propriétés :

- Limite de diffusion, $\varepsilon \rightarrow 0$: $\partial_t E - \operatorname{div}(\frac{1}{3\sigma} \nabla E) = 0$,
- Inégalité d'entropie: $\partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{Q}) \geq 0$,
- Principe du maximum: $E > 0$, $\|\mathbf{f}\| < 1$.

Formulation comme un système de la dynamique du gaz

- On formule le modèle M_1 comme un système de la dynamique du gaz:
 - pour utiliser un schéma aux noeuds Lagrange+projection et un schéma limite consistant,
 - pour préserver le principe du maximum l'aide de l'inégalité d'entropie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{F}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \\ \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(E\mathbf{u} + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u}S) \geq 0, \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho\mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rho\mathbf{v} \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}e + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho s + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}s) \geq 0, \end{array} \right.$$

- avec $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ le flux, $E = \rho e$ l'énergie et $S = \rho s$ l'entropie.
- $q = \frac{1-\chi}{2} E$, $\mathbf{u} = \frac{3\chi-1}{2} \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2}$ avec $\mathbf{f} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{e}$
- $\mathbf{F} = \mathbf{u}E + q\mathbf{u}$ $\hat{P} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{F} + q\hat{l}_d$.

Schéma et propriétés

- **Propriétés :**

- **Schéma AP** avec un schéma limite de diffusion d'ordre 1.
- Version semi-implicite stable indépendamment de ε .
- **Schéma limite de diffusion d'ordre 2** en utilisant un schéma d'advection d'ordre 2.
- **Inégalité d'entropie et principe du maximum préservés.**

- **Idées pour la preuve d'entropie (schéma semi-discret en espace):**

- On suppose $(E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0)) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$
- Par le théorème de Cauchy on sait que la solution $(E_j(t), \mathbf{F}_j(t)) \in \Omega$ sur $[0, T[$.
- On commence par montrer que le schéma est entropique si $\hat{\beta}_{jr}$ est positif.
- En montrant que \mathbf{u}_r est bornée et $S = \frac{E^{3/4}(1-\|\mathbf{u}\|^2)}{(3+\|\mathbf{u}\|^2)^2}$ est minorée sur $[0, T[$, on obtient que E et $(1 - \|\mathbf{u}\|^2)$ sont positifs et bornés sur $[0, T[$.
- En utilisant des résultats classiques des systèmes dynamiques on obtient le résultat $\forall T > 0$.

Résultats pour modèle M_1

- **Cas test de diffusion:** Les données sont $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ avec $G(\mathbf{x})$ une Gaussienne $F(0, \mathbf{x}) = 0$ (cas M_1) et $\sigma = 1$.

schémas	NL		VF5		Linéaire		M_1	
	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$
Maillages								
Cartésien	1.9	oui	2	oui	2	oui	2.0	oui
Aléa. quad	1.9	oui	0.3	oui	1.98	non	2.	oui
Aléa. tri.	2.15	oui	1.	oui	1.32	non	1.9	oui
Kershaw	1.9	oui	0	oui	2	non	1.9	oui

- NL : Schéma limite du schéma pour M_1 . M_1 : Schéma AP pour M_1 avec $\varepsilon = 10^{-3}$.
- **Principe du maximum:** Les données sont $\sigma = 0$, $E(0, \mathbf{x}) = F_x(0, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4:0.6]^2}$ et $F_y(0, \mathbf{x}) = 0$. La solution est $E(t, \mathbf{x}) = F_x(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4+t:0.6+t]^2}$ and $F_y(t, \mathbf{x}) = 0$.

Maillages	ordre	$E_j > 0$	$\ \mathbf{f}_j \ < 1$
Cartésien	0.5	oui	oui
Aléa. quad	0.5	oui	oui
Kershaw	0.49	oui	oui

Conclusion et perspectives

● Conclusion

- **Modèle P_1** : Schéma AP sur maillages non structurés avec une stabilité indépendante de ε .
- **Modèle P_1** : Convergence uniforme sur maillages non structurés pour le schéma semi-discret.
- Schémas AP pour des systèmes linéaires généraux avec des termes sources (modèles P_N , S_N) en utilisant une décomposition type "micro-macro".
- **Modèles non linéaires** : Schéma AP avec principe du maximum pour le modèle M_1 . Schéma AP et WB pour les équations d'Euler.
- **Tous les modèles** : Modes parasites dans certains cas (exemple: maillage Cartésien + Dirac comme donnée initiale).

● Perspectives

- Analyse théorique pour le modèle P_1 : Estimation en temps de convergence, condition CFL.
- Analyse du schéma AP pour Euler: Stabilité non linéaire, inégalité d'entropie.
- Extension du schéma AP pour Euler pour des termes de friction plus compliqués et un vecteur de gravité non constant.
- Trouver une méthode générique pour stabiliser les schémas aux noeuds

Merci

Merci pour votre attention