Contrôle Continu n°1 d'Équations Différentielles – Correction
Licence de Mathématiques
6$^{\text{ème}}$ semestre, période de printemps

20 février 2015

Exercice 1

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ses solutions maximales sont donc définies sur $\mathbb{R}$ en entier. Pour déterminer ces solutions on cherche les racines de son polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)$, c'est-à-dire $\lambda_0 := 0$ et $\lambda_\pm := \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$. Toute solution est donc de la forme

$$x(t) = c_0 + c_- \exp(\lambda_- t) + c_+ \exp(\lambda_+ t) \qquad , \ c_0,\ c_\pm \in \mathbb{C} \ .$$

La constante c_0 est arbitraire. Les constantes $c_\pm$ sont déterminées par les conditions initiales. On calcule en effet $\dot{x}(t) = c_-\lambda_- \exp(\lambda_- t) + c_+\lambda_+ \exp(\lambda_+ t)$ et $\ddot{x}(t) = c_-\lambda_-^2 \exp(\lambda_- t) + c_+\lambda_+^2 \exp(\lambda_+ t)$, ce qui nous mène (en évaluant à $t := 0$ ces expressions) à résoudre le système affine

$$\begin{bmatrix} \lambda_- & \lambda_+ \\ \lambda_-^2 & \lambda_+^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_- \\ c_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

On détermine alors sans peine $c_\pm = -1$.

Exercice 2

1. Trivial puisque $\mathtt{diag}(\lambda_1, \lambda_2)^n = \mathtt{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$ et $\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$.
2. Les valeurs propres de A sont 0 et 5. Elles sont distinctes donc A est diagonalisable. Comme A est symétrique et réelle, on peut effectuer cette diagonalisation dans une base orthogonale. On trouve sans peine une matrice de passage

$$P := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   telle que $P^{-1}AP = D = \mathtt{diag}(0, 5)$.
3. Comme $A = PDP^{-1}$ on sait que $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(5t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \exp(5t) & 2\exp(5t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 + \exp(5t) & 2(-1 + \exp(5t)) \\ 2(-1 + \exp(5t)) & 1 + 4\exp(5t) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

4. Le système (S) est un système différentiel linéaire à coefficients constants. Ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier, et sont toutes de la forme $\exp(tA)\,X_0$ avec $X_0 \in \mathbb{C}^2$ arbitraire.

Exercice 3

1.

   (a) Une solution constante x a une dérivée nulle, elle satisfait donc la relation $0 = x - x^2 = x(1-x)$. La réciproque est immédiate.

   (b) Si c'était un espace vectoriel, pour toute solution (x, I) et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la fonction $(\lambda x, I)$ serait aussi solution. Mais ceci n'est pas vérifié pour $x := 1$ et $I := \mathbb{R}$ dès que $\lambda \notin \{0, 1\}$, d'après la question précédente.

2.

   (a) (E) est une équation différentielle scalaire à variables séparables (de type Bernoulli). Le théorème du cours associé est le suivant, avec $f(x) := \frac{1}{x-x^2}$ et $g(t) := \frac{2}{t}$:

   Théorème. *On considère l'équation différentielle $f(x(t))\dot{x}(t) = g(t)$ où f et g sont continues sur un intervalle ouvert respectif I_f et I_g. Soit $(t_0, x_0) \in I_g \times I_f$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Il existe un intervalle $J \ni t_0$ et une unique solution (x, J) telle que $x(t_0) = x_0$. Celle-ci est définie implicitement par la relation*

   $$F(x(t)) = G(t)$$

   où F est la primitive de f vérifiant $F(x_0) = 0$ et G est celle de g vérifiant $G(t_0) = 0$.

   Remarque. Il n'était pas faux d'invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, mais en plus ici on obtient un moyen de calculer les solutions.

   (b) D'après le théorème rappelé on a

   $$\ln\left|\frac{x(t)}{1-x(t)} \times \frac{1-x_0}{x_0}\right| = \ln\frac{t^2}{t_0^2}$$

   puisque $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|$. Au voisinage de x_0 la valeur de $\frac{x}{1-x}$ est du même signe que $\frac{x_0}{1-x_0}$, on peut donc enlever les valeurs absolues. Le reste n'est qu'un calcul élémentaire.

   (c) La fonction est solution tant que $x_0 t^2 \neq t_0^2(x_0 - 1)$. Cette inéquation est toujours satisfaite si $\frac{x_0-1}{x_0} < 0$, c'est-à-dire $x_0 \in]0, 1[$, auquel cas la fonction est solution sur $I_{\max} = \mathbb{R}$. Sinon on doit éviter $t \in \left\{\pm t_0\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0}}\right\}$. Ainsi $I_{\max} = \left]-\infty\ ,\ t_0\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0}}\right[$ si $t_0 < 0$ et $x_0 > 1$, $I_{\max} = \left]t_0\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0}}\ ,\ +\infty\right[$ si $t_0 > 0$ et $x_0 > 1$, ou encore $I_{\max} = \left]-|t_0|\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0}}\ ,\ |t_0|\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0}}\right[$ si $x_0 < 0$.

3.

   (a) En remplaçant t par 0 dans (E) on obtient $0 = x(0) - x(0)^2$ (puisque par hypothèse $\dot{x}(0) \in \mathbb{R}$), et la conclusion suit.

   (b) Soit $t_0 \in I \setminus \{0\}$ et $x_0 := x(t_0)$. De la question 3. on déduit immédiatement (en remplaçant t par 0) que si $x_0 \notin \{0, 1\}$ alors $x(0) = 0$. Si $x_0 = 0$ alors on obtient $x = 0$, de sorte que seule l'éventualité $x_0 = 1$ persiste. Mais t_0 est arbitraire, donc $x = 1$.

   (c) Il ne peut pas s'agir de (b) ou (d) puisque sur ces diagrammes une infinité de solution passant par $(0, 1)$. On a montré ci-dessus que toute solution avec $x_0 < 0$ était définie sur un voisinage de 0 en s'annulant en 0. C'est donc le diagramme (a) qui correspond à (E).