

Contrôle Continu n°1 d'Équations Différentielles
Licence de Mathématiques
6^{ème} semestre, période de printemps

20 février 2015

Durée : 1 heure
Barème : 20 points
Ce sujet comporte 2 pages
Documents autorisés : aucun
Bidules électroniques autorisés : aucun

Enseignant référent : L. Teyssier

Exercice 1 (6 points)

Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes de :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 0 \\ \ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 1 \end{cases}.$$

Exercice 2 (6 points)

On se donne le système différentiel linéaire suivant :

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (\text{S})$$

1. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ une matrice diagonale de valeurs propres λ_1 et λ_2 . Prouver la formule

$$\exp D = \text{diag}(\exp \lambda_1, \exp \lambda_2)$$

en utilisant la représentation en série entière de l'exponentielle de matrice.

2. Diagonaliser la matrice A .
3. En déduire l'expression de $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
4. Donner finalement toutes les solutions de (S) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (10 points)

On va étudier l'équation différentielle donnée par :

$$\frac{1}{2}t\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t) \quad . \quad (\text{E})$$

1.

- (a) Montrer que $x = 0$ et $x = 1$ sont les seules solutions constantes de (E) sur $\mathbb{R}$.
- (b) En déduire que l'espace des solutions de (E) n'est pas un espace vectoriel.

2. Prenons $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ avec $t_0 \neq 0$.

- (a) Caractériser au maximum le type de l'équation différentielle (E). Énoncer alors un théorème garantissant l'existence et l'unicité locale de la solution x de (E) qui vérifie $x(t_0) = x_0$.
- (b) Mener les calculs permettant de déterminer que

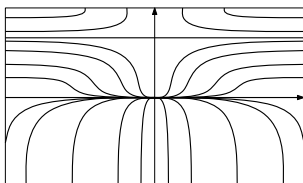
$$x(t) = \frac{x_0 t^2}{x_0 t^2 - t_0^2 (x_0 - 1)}$$

(une réponse consistant seulement à vérifier que le résultat ci-dessus est solution sera considérée comme fausse).

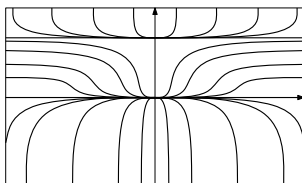
- (c) Quel est le plus grand intervalle $I_{\max}$ contenant t_0 sur lequel x s'étend en une solution de (E) ?

3. Soit (x, I) une solution de (E) telle que $0 \in I$.

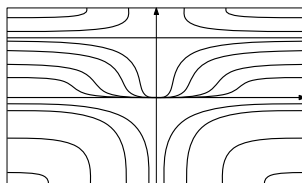
- (a) Justifier que $x(0) = 0$ ou $x(0) = 1$.
- (b) Prouver que $x = 1$ est la seule solution vérifiant $x(0) = 1$ (on pensera à se servir de la question 3).
- (c) Parmi les diagrammes ci-dessous représentant plusieurs solutions d'une équation différentielle, un seul correspond à l'équation (E). Déterminer duquel il s'agit en justifiant la réponse.



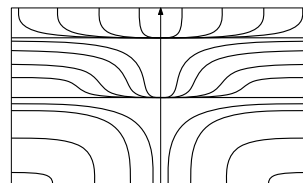
(a)



(b)



(c)



(d)