Contrôle Continu n°2 d'Équations Différentielles – Correction
Licence de Mathématiques
$6^{\text{ème}}$ semestre, période de printemps

24 avril 2015

Exercice 1

1. Une solution globale est une solution (x, I) de l'équation différentielle avec $I =]0, +\infty[$.
2. On écrit l'équation sous la forme $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ avec

$$f(t, x) := 2x \frac{\cos t}{\sin t}.$$

La fonction f est clairement de classe C^1 sur $(]0, +\infty[\setminus \pi\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique pour tout (t_*, x_*) dans cet ensemble : il y a une et une seule solution locale passant par ce point. Au contraire si $t_* = k\pi \in \pi\mathbb{N}_{>0}$ on a la relation

$$0 = 2x_* (-1)^k$$

de sorte que $x_* = 0$. Ainsi pour $x_* \neq 0$ il n'y a aucune solution locale avec cette condition initiale.

3. On vérifie en dérivant x que toutes ces fonctions sont solutions. Par ailleurs, $\frac{\cos}{\sin}$ est continue sur I_k. Le théorème sur la structure des solutions des équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1 nous assure alors que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. Ce sont donc les seules solutions sur I_k.
4. Puisque $\frac{1}{\sin^2 t} \to -\infty$ lorsque $t \to \pi(k+1)$ il faut et il suffit de prendre $\alpha = 0$ pour rendre la fonction x continue. Elle sera dès lors solution sur $]k\pi, (k+2)\pi[$ si, et seulement si, elle est de classe C^1 sur cet intervalle. Or pour $t \in I_k \cup I_{k+1}$ on a

$$\dot{x}(t) = 2\frac{\cos t}{\sin t} x(t) = 2\cos t \frac{\exp\left(\frac{-1}{\sin^2 t}\right)}{\sin t} \ .$$

Comme $\lim_{u \to 0} \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{1}{u^2}\right) = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances) on a

$$\lim_{t \to (k+1)\pi} \dot{x}(t) = 0 \ ,$$

de sorte que le théorème du prolongement de la dérivée garantit d'une part que x est dérivable en $(k+1)\pi$ et d'autre part que x est de classe C^1 comme attendu.

5.

   (a) Trivial.

(b) D'une part cette application est surjective car étant donnée $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_{>0}$ par

$$t \in \pi\mathbb{N} \longmapsto 0$$
$$t \in I_k \longmapsto e\alpha_k \exp\frac{-1}{\sin^2 t}$$

est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_{>0}$ (question 3.) qui satisfait l'équation. D'après 5.(a) on a $C_k(x) = \alpha_k$ pour tout k. Par ailleurs, cette fonction est injective puisque la solution $x = 0$ est la seule solution globale pour laquelle $c_k = eC_k(x)$ s'annule pour tout k (car $e \neq 0$).

Exercice 2

1.
   (a) On a $||f(t,0)|| \leq M(t)\,||0|| = 0$ donc $0 = \dot{x}(t) = f(t,x(t)) = 0$ si $x(t) = 0$.

   (b) Comme f est de classe C^1 le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique au point $(t_*, 0)$. D'après 1.(a) l'unique solution locale passant par ce point est la solution nulle 0.

2.
   (a) La fonction φ est un polynôme en les composantes $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ de x.

   (b) On écrit $\varphi(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t)^2$ et on applique la règle de Leibniz : $\dot{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^n 2\dot{x}_j(t)\,x_j(t) = 2\langle\dot{x}(t)\,|x(t)\rangle$.

3.
   (a) C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque $|\dot{\varphi}(t)| = 2\,|\langle f(t,x(t))\,|x(t)\rangle| \leq 2M(t)\,||x(t)|| \times ||x||$.

   (b) Si φ s'annulait sur $I_{\max}$, disons en t_0, la question 1.(b) donnerait $||x(t_0)|| = 0$ donc $x(t_0) = 0$ donc $x = 0$. Mais on a supposé $x \neq 0$.

   (c) On peut alors diviser l'inégalité par $\varphi(t) > 0$, c'est-à-dire $\left|\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(t)\right| \leq 2M(t)$. Mais en intégrant entre t_* et $t \geq t_*$ cela donne, en utilisant l'inégalité triangulaire pour les intégrales,
$$\int_{t_*}^t \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s \leq \left|\int_{t_*}^t \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_{t_*}^t \left|\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\right|\,\mathrm{d}s \leq 2\int_{t_*}^t M(s)\,\mathrm{d}s\ .$$
   De même pour $t \leq t_*$ on a
$$\int_{t_*}^t \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s \leq \left|\int_{t_*}^t \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_{t}^{t_*} \left|\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}(s)\right|\,\mathrm{d}s \leq 2\int_{t}^{t_*} M(s)\,\mathrm{d}s = -2\int_{t_*}^t M(s)\,\mathrm{d}s\ .$$
   Finalement on a montré pour tout $t \in I_{\max}$ l'inégalité
$$\ln\varphi(t) - \ln\varphi(t_*) \leq 2\left|\int_{t_*}^t M(s)\,\mathrm{d}s\right|\ .$$
   En appliquant à l'inégalité la fonction croissante exp on trouve le résultat attendu.

4. Si $(x, I_{\max})$ n'est pas globale alors $I_{\max} =]a,b[$ avec a ou b dans I (on rappelle que I est ouvert donc a ou b n'est pas une borne de I). Par soucis de concision, traitons seulement le cas $b \in I$, l'autre cas étant analogue. Le théorème de sortie des compacts nous dit alors que pour tout compact $K \subset I \times \mathbb{R}^n$ il existe $t_0 \in [t_*, b] \subset I_{\max}$ tel que $x(t_0) \notin K$. Mais l'ensemble $K := \left\{(t,x)\ :\ t_* \leq t \leq b\ ,\ ||x|| \leq \exp\left|\int_{t_*}^t M(s)\,\mathrm{d}s\right|\right\}$ est compact puisque M est continue sur $[t_*, b]$ (et donc $t \mapsto \exp\left|\int_{t_*}^t M(s)\,\mathrm{d}s\right|$ aussi). L'existence de t_0 contredit l'inégalité obtenue en 3.(c). Donc $I_{\max} = I$.

5. Non, l'équation différentielle $\dot{x}(t) = x^2(t)$ a des solutions maximales qui ne sont pas globales (définies sur $I := \mathbb{R}$), par exemple $x(t) := \frac{-1}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3

1.

(a) Soit $P \in \mathtt{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP =: D$ soit diagonale. M est inversible si, et seulement si, D n'a que des termes $\lambda_j \neq 0$ sur la diagonale. Chaque complexe non nul z admet un logarithme, par exemple $\ell := \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ pour un choix de l'argument de z. Notons ℓ_j un tel logarithme complexe de λ_j. Dans ce cas $\mathtt{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est un logarithme de M puisque $\exp \mathtt{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \mathtt{diag}(\exp \ell_1, \ldots, \exp \ell_n)$. Réciproquement, si $\exp L = M$ alors M est inversible puisqu'une exponentielle de matrice est toujours inversible.

(b) Chaque matrice $\hat{D} := \mathtt{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$ est un logarithme de l'identité. Soit L un logarithme de M donné par la construction précédente : $L = P\mathtt{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_n) P^{-1}$. Alors L et $\hat{L} := P\hat{D}P^{-1}$ commutent (puisque deux matrices diagonales commutent toujours), donc $\exp\left(L + \hat{L}\right) = \exp L \exp \hat{L} = MP\left(\exp \hat{D}\right) P^{-1} = MPP^{-1} = M$.

(c) On calcule aisément $\exp \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, par exemple en identifiant $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ avec le complexe $\mathrm{i}\alpha$ (on rappelle que l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \mapsto \beta + \mathrm{i}\alpha \in \mathbb{C}$ est aussi un morphisme d'algèbres). La conclusion suit en prenant $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2. Les composantes de la matrice A^k sont des polynômes de degré k en les composantes de A, donc si A est C^1 il en va de même pour A^k. La règle de Leibniz s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = \dot{A}A + A\dot{A} \ .$$

En général $\dot{A}$ et A ne commutent pas, mais ici $\dot{A} = \exp A$, puisque $(A, I_{\max})$ est solution de l'équation différentielle, et bien sûr $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ commute avec A. Ainsi $\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = 2\dot{A}A$. On effectue alors une récurrence sur k.

3. La série entière matricielle $\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-A)^n}{n!}$ est normalement convergente pour toute norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, en particulier $||\exp A|| \leq \exp ||A||$. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n\left(-\dot{A}\right)(-A)^{n-1}}{n!}$ est majorée en norme par $\left|\left|\dot{A}\right|\right| \exp ||A||$, donc normalement convergente de somme continue sur $I_{\max}$ (puisque $\dot{A}A^n$ est continue d'après la question 2.). Les théorèmes généraux sur les séries de fonctions assurent alors que $\exp(-A)$ est de classe C^1, et que sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme :

$$\frac{\mathrm{d}\exp(-A)}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\dot{A}\right)(-A)^n}{n!} = -\dot{A}\exp(-A) \ .$$

4. En résumé on obtient $\dot{E}_A = -\dot{A}\exp(-A) = -\mathrm{Id}$ puisque $\dot{A} = \exp A$. Cette équation admet trivialement l'unique solution $E_A(t) = \exp(-A_*) - t\mathrm{Id}$, définie pour $t \in \mathbb{R}$.

5. D'une part $E_A(t)$ est diagonalisable pour tout t puisque A_* l'est par hypothèse. En effet si $P^{-1}A_*P =: D_*$ est diagonale alors $P^{-1}E_A(t)P = \exp(-D_*) - t\mathrm{Id}$ est aussi diagonale. Donc $E_A(t)$ admet un logarithme (diagonalisable) si, et seulement si, $E_A(t)$ est inversible d'après la question 1. La matrice $A(t)$ est un logarithme de E_A tant que $\det E_A(t) \neq 0$, auquel cas $A(t) \in \mathcal{M}$. Puisque $E_A(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ cela signifie que $t \mapsto A(t)$ est solution tant que $\det(\exp(-A_*) - t\mathrm{Id}) \neq 0$. Le cas contraire n'arrive que lorsque t est une valeur propre de $\exp(-A_*)$. C'est bien ce qu'il fallait démontrer.