Contrôle Continu n°2 d'Équations Différentielles
Licence de Mathématiques
$6^{\text{ème}}$ semestre, période de printemps

24 avril 2015

Durée : **2 heure**s
Barème : 20 points
Ce sujet comporte 3 pages
Documents autorisés : **aucun**
Bidules électroniques autorisés : **aucun**
Enseignant référent : L. Teyssier

Merci de ne pas recopier l'énoncé dans les copies.
Le correcteur a un exemplaire du sujet… et vous avez probablement mieux à faire !

Exercice 1 (7 points)

On se donne l'équation différentielle scalaire linéaire :

$$\dot{x}(t)\ \sin^3 t = 2x(t)\ \cos t$$

avec $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ formé des solutions globales est de dimension infinie.

1. Quelle est la définition d'une solution globale ?
2. Combien existe-t-il de solution(s) locale(s) passant par le point (t_*, x_*) pour $t_* \in]0,\infty[\backslash\pi\mathbb{N}$ et $x_* \in \mathbb{R}$? Et par le point $(k\pi, x_*)$ pour $x_* \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ et $k \in \mathbb{N}_{>0}$? Il faudra justifier précisément les réponses.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit l'intervalle

$$I_k :=]k\pi\ ,\ (k+1)\pi[\ .$$

   Montrer que (x, I_k) est une solution si, et seulement si,

$$(\forall t \in I_k) \qquad x(t) = c_k \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)$$

   pour une certaine constante $c_k \in \mathbb{R}$.
4. Soient (x_k, I_k) et (x_{k+1}, I_{k+1}) deux solutions. Trouver la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que

$$\begin{aligned} x\ :\ ]k\pi\ ,\ (k+2)\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \in I_k &\longmapsto x_k(t) \\ (k+1)\pi &\longmapsto \alpha \\ t \in I_{k+1} &\longmapsto x_{k+1}(t) \end{aligned}$$

soit solution sur $]k\pi\ ,\ (k+2)\,\pi[$.

5. Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit les formes linéaires

$$\begin{aligned} C_k\ :\ \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \ . \end{aligned}$$

   (a) Soit $x \in \mathcal{S}$ une solution globale. Prouver que la solution $(x|_{I_k}, I_k)$ donnée en 3. satisfait

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad c_k = e \times C_k(x) \quad .$$

   (b) Conclure en démontrant que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto (C_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Exercice 2 (7 points)

Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$ fixé on considère l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

où $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On suppose f **sous-linéaire** par rapport à x, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue et positive $M\ :\ I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$(\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n) \qquad ||f(t,x)|| \leq M(t)\,||x||$$

(en fait l'hypothèse de continuité est superflue). Le but de cet exercice est de montrer que toute solution maximale est globale.

Pour simplifier le problème (sans enlever de généralité, car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie) on prendra ici la norme euclidienne induite par le produit scalaire standard (exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

$$||x|| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \ .$$

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\ \langle u|v\rangle\ | \leq ||u|| \times ||v|| \ \ .$$

1.
   (a) Montrer que la fonction nulle est solution sur I.

   (b) En déduire que toute solution x qui s'annule en un point t_* de I est la solution nulle.

2. Donnons-nous un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ et une fonction $x \in C^1(J \to \mathbb{R}^n)$.

   (a) Expliquer pourquoi

$$\varphi\ :\ t \longmapsto ||x(t)||^2$$

   est de classe C^1 sur J.

(b) Démontrer alors la relation

$$(\forall t \in J) \qquad \dot{\varphi}(t) = 2 \langle \dot{x}(t) | x(t) \rangle \ .$$

3. Soit $(x, I_{\max})$ une solution maximale de condition initiale $(t_*, x_*) \in I_{\max} \times \mathbb{R}^n$ avec $x_* \neq 0$.

(a) En utilisant les notations de la question précédente, prouver :

$$(\forall t \in I_{\max}) \qquad |\dot{\varphi}(t)| \leq 2M(t)\varphi(t) \ .$$

(b) Pourquoi φ ne s'annule-t-elle jamais sur $I_{\max}$?

(c) En déduire l'inégalité :

$$(\forall t \in I_{\max}) \qquad ||x(t)|| \leq ||x_*|| \exp \left| \int_{t_*}^{t} M(s) \, \mathrm{d}s \right| \ .$$

4. Conclure en utilisant le théorème de sortie des compacts.
5. (Bonus +1pt) Ce résultat persiste-t-il en supposant f sous-quadratique par rapport à x, c'est-à-dire $||f(t,x)|| \leq M(t) ||x||^2$?

Exercice 3 (7 points)

Dans cet exercice n est un entier supérieur à 1 et l'étude se déroule dans l'ensemble $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ des matrices complexes carrées de taille n qui sont diagonalisables. On admet que $\mathcal{M}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle non linéaire et autonome

$$\dot{A}(t) = \exp A(t)$$

où $t \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}$. Dans la suite $(A, I_{\max})$ désigne une solution maximale de condition initiale $(0, A_*)$ et nous cherchons à déterminer précisément $I_{\max}$.

1. On dit que $L \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ est un **logarithme** de $M \in \mathcal{M}$ lorsque $M = \exp L$. On remarquera que les notations «log» ou «ln» ne figurent pas dans ce texte ; ce n'est pas un hasard.

(a) Établir que $M \in \mathcal{M}$ admet un logarithme si, et seulement si, M est inversible. Dans ce cas, on prouvera que le logarithme peut être choisi diagonalisable. *Indication* : travailler dans une base dans laquelle M est diagonale.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}$ inversible. Prouver que M admet une infinité de logarithmes distincts. *Indication* : que penser des matrices de la forme $\mathtt{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$?

(c) (Bonus +1pt) En calculant $\exp \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer qu'il existe des matrices réelles admettant une infinité de logarithmes dès que $n \geq 2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que $A^k \in C^1(I_{\max} \to \mathcal{M})$ puis calculer

$$\frac{\mathrm{d}A^k}{\mathrm{d}t} = k\dot{A}A^{k-1} \ .$$

Indication : on commencera par démontrer le cas $k = 2$. Attention, la formule est fausse en toute généralité, il faut se servir ici des propriétés supplémentaires satisfaites par A.

3. On pose $E_A(t) := \exp(-A(t))$. En utilisant le développement en série entière de $\exp A$, montrer que E_A est de classe C^1 sur $I_{\max}$, puis que $\dot{E}_A = -\dot{A}\exp(-A)$.
4. En déduire

$$(\forall t \in I_{\max}) \qquad E_A(t) = \exp(-A_*) - t\mathrm{Id} \ .$$

5. Désignons par $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres réelles de M. Démontrer que $I_{\max}$ est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}\backslash\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\exp(-A_*))$ qui contient 0.