Équations Différentielles

Licence Mathématiques 3ème année - Magistère
Feuille 1

1. On considère l'équation :
$$x'(t) = ax(t).$$
   (a) Dessiner le champ de vecteurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec coordonnées $(1, ax)$.
   (b) Trouver les solutions constantes (dites aussi *stables* ou *stationnaires*).
   (c) Trouver toutes les solutions et discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le comportement asymptotique (i.e. quand $t \to \infty$).

2. On considère la fonction $f(x) = \tan x$ pour $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
   (a) Montrer que $f' = 1 + f^2$.
   (b) Y a-t-il d'autres fonctions dérivables satisfaisant cette relation ?

3. On considère l'équation differentielle
$$tx'(t) = x(t).$$
   On appelle solution de l'équation différentielle ci-dessus un couple (x, I) formé d'un intervalle non-vide $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction x dérivable sur I satisfaisant la relation ci-dessus. On dit aussi que x est une solution sur I.
   (a) Montrer qu'étant donné I intervalle non-vide de $\mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}(I)$ des solutions sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_{>0}$ et sur $\mathbb{R}_{<0}$. En tracer quelques unes.
   (c) Quelle est la dimension de $\mathcal{S}(I)$ pour $I := \mathbb{R}_{>0}$ et $I := \mathbb{R}$?
   (d) Reprendre ces questions avec l'équation
$$t^3 x'(t) = x(t)$$
   et comparer les conclusions.

4. Résoudre (donner l'intervalle où la solution est définie) :
   (a) $x' + x = \cos t - \sin t$
   (b) $x' + x \tan t = 2t + t^2 \tan t$
   (c) $x' + \frac{2}{t+1} x = (t+1)^{5/2}$
   (d) $(1 + t)x' + x = 1 + \ln(1 + t)$

5. On considère l'équation differentielle
$$(t + 1)(t + 2)x' - x = 0. \tag{1}$$
   (a) Quelle est la dimension sur $\mathbb{R}$ de l'espace des solutions de (1) qui sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$?
   (b) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (1) qui sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$?

6. Résoudre :
   (a) $t(t^2 + 1)x' + (t^2 - 1)x = \frac{t^3}{1+t+t^2}$
   (b) $tx' + (1 + t)x = e^{-2t}$
   (c) $x' \sin t - 2x \cos t = 0$

7. On considère l'équation différentielle
$$2tx' + x = 2t + \cos(t^2).$$
   Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont de classe C^∞, puis donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $t = 1$, de la solution satisfaisant la condition initiale $x(1) = 0$.

8. (a) Intégrer, c'est-à-dire trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' + x = \exp(it)$, puis $x'' + x = 2\cos t$.
   (b) Intégrer l'équation différentielle $x^{(3)} + x^{(2)} - 9x' - 9x = t^2$.
   (c) Résoudre les équations différentielles

$$\begin{aligned} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= 0 \\ ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= 1, \end{aligned}$$

   si a, b, c sont des constantes réelles.
   (d) Résoudres les équations différentielles

$$\begin{aligned} x''(t) + x'(t) + x(t) &= 0 \\ x''(t) - 2x'(t) + x(t) &= t^2 + t + 1. \end{aligned}$$

9. On considère l'équation différentielle

$$x' = (1 - x)x$$

   définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   (a) Trouver deux solutions constantes.
   (b) Esquisser le champ de vecteurs associé à l'équation.
   (c) Esquisser les courbes intégrales.
   (d) Justifier tout ceci en résolvant l'équation.