Équations Différentielles

Licence Mathématiques 3ème année - Magistère
Feuille 5

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considr̀e l'équation différentielle
$$X' = XAX \tag{1}$$
où X est une application d'un intervalle I à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Cette équation est-elle linéaire ? Vérifie-t-elle les conditions du théorème dexistence et d'unicité locales ?
   (b) Soit (I, ϕ) la solution maximale de (1) telle que $\phi(0) = Id$. On note J l'intervalle maximal contenant 0 sur lequel est déefini la fonction $t \mapsto (I - At)^{-1}$. Pour $t \in I$ on pose $\psi(t) = \phi(t)(I - At)$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par ψ. En déduire que $(I, \phi) = (J, (Id - At)^{-1})$.
   (c) Quelles sont les autres solutions maximales de (1)?

2. On considère la fonction $f(x) = x^2$. Est-elle lipschitzienne ? localement lipschitzienne ?
   Donner un exemple d'une fonction lipschitzienne qui ne soit pas C^1.

3. On considère l'équation différentielle
$$x' = f(t, x), \tag{2}$$
où $f : [\alpha, \beta[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1. Soit $(t_0, x_0) \in]\alpha, \beta[\times\mathbb{R}^n$ et soit $(]a, b[, \phi)$ la solution maximale de (2) passant par (t_0, x_0). On suppose de plus qu'il existe une fonction continue v définie sur $[t_0, \beta[$ telles que pour tout $t \in [t_0, b[$ on ait $\|\phi(t)\| \leq v(t)$. Montrer qu'alors $b = \beta$.

4. On considère l'équation différentielle
$$x' = f(t, x), \tag{3}$$
où $f : [\alpha, \beta[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1. On suppose de plus que f est bornée. Montrer que les solutions maximales de (3) sont définies sur $]\alpha, \beta[$.

5. On considère l'équation différentielle
$$x''(t) = 2tx'(t) + 4x(t).$$
   (a) Trouver la solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ et qui soit développable en série entière au voisinage de 0. Calculer le rayon de convergence de la série obtenue.
   (b) Ecrire cette solution en utilisant des fonctions bien connues.

6. Résoudre l'équation différentielle $tx' - 2x = (t - 1)(t + 1)^3$ sur $] - \infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.