Équations Différentielles

Licence Mathématiques 3ème année - Magistère
Feuille 6

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 tel que $g(0) = g(1) = 0$ et $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$. Soit $-\alpha = g'(0)$, $\alpha > 0$. Soit $x_0 \in [0,1]$ et x une solution maximale non constante définie sur $]a,b[$ du problème $x' = g(x)$ et $x(0) = x_0$.
   (a) Montrer que $x(t) \in]0,1[$ pour tout $t \in [0,b[$.
   (b) En déduire que $b = \infty$ et montrer que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
   (c) Soit $\beta \in]0,\alpha[$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $x(t) \leq Ce^{-\beta t}$ pour tout $t \geq 0$.
2. On considère l'équation $y'(t) = t^2 + y(t)^2$.
   (a) Justifier l'existence d'une solution maximale y vérifiant $y(0) = 0$.
   (b) Montrer que y est une fonction impaire.
   (c) Étudier la monotonie et la convexité de y.
   (d) Démontrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
   (e) Étudier le comportement de y aux bornes de son intervalle de définition.
3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions maximales de l'équation différentielle $y' = F(t,y)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t) < g(t)$.