Équations différentielles

Enseignant référent : Loïc Teyssier

Licence Mathématiques - 3ème année (Semestre 6)

Résumé du cours

1 Introduction

1.1 Programme

Une **solution** (f, I) d'une **équation différentielle ordinaire** d'ordre $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$E\left(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

est une fonction f de classe C^n sur un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ satisfaisant cette relation en tout $x \in I$. Les objectifs généraux d'un cours d'équations différentielles sont les suivants :

1. Déterminer explicitement les solutions de (E) dans les cas classiques (linéaire à coefficients constants, variables séparables, Bernoulli...)
2. Assurer théoriquement l'existence d'une solution (théorème de Peano)
3. Étudier l'unicité des solutions ayant une condition initiale donnée (théorème de Cauchy-Lipschitz)
4. Stabilité des solutions (théorème de Lyapunov)
5. Approximation numérique des solutions de (E) (méthodes d'Euler et de Kutta-Runge)

Le point (1) a été traité en L2 et ne sera vu qu'en rappel.

1.2 Contexte

Les équations différentielles dans les sciences déterministes se retrouvent principalement comme équations d'évolutions.

— Principe fondamental de la dynamique (loi de Newton)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}(x(t))$$

— Datation au carbone 14

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t) = -\lambda\alpha(t)$$

— Loi de vitesse en cinétique chimique

$$-\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = k[A]^{\alpha}$$

Plus généralement les lois de la physique classique peuvent s'exprimer sous la forme d'**équations aux dérivées partielles** :

— Corde vibrante :

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

— Conduction de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

Ce cours ne traitera pas de ce dernier type d'équations différentielles, dans lequel les dérivées de l'inconnue apparaissent par rapport à plusieurs variables indépendantes.

1.3 Notations et prérequis

1.3.1 Notations

— On écrit $x \mapsto f(x)$ une fonction f dépendant de la variable x. On dit que $f(x)$ est l'image de x.

— On écrit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'$. Plus généralement on définit $y^{(k)} := \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}$ et $f^{(k)} := \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1.3.2 Prérequis

— Analyse des fonctions numériques d'une variable réelle.

— Topologie des espaces normés, en particulier en dimension fine : ouvert, fermé, connexe de $\mathbb{R}^n$. Propriétés topologiques des fonctions continues.

— Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$, en particulier la continuité et les classes de différentiabilité des fonctions dépendant d'un nombre fini de variables réelles.

— Résolution des équations différentielles classiques (ordre 1, linéaires à coefficients constants, à variables séparables, système linéaire à coefficients constant)

1.4 Généralités

Définition 1.1.

1. Un **système de** m **équations différentielles d'ordre** $k \in \mathbb{N}$ **et de dimension** n est une relation de la forme

$$E\left(t, x(t), \dot{x}(t), \cdots, x^{(k)}(t)\right) = 0 \qquad \text{(E)}$$

avec t un nombre réel, $x(t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et E une fonction de $k+2$ variables vectorielles réelles

$$(t, x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(k+1) \text{ fois}}$$

à valeurs vectorielles

$$E : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(k+1) \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}^m .$$

L'ensemble de définition effectif et la régularité (continuité, classe de dérivabilité...) de l'application E seront des facteurs détreminants dans la suite, on précisera cela en temps utile.

2. On étudiera plus particulièrement les **systèmes résolus en** $x^{(k)}$, c'est-à-dire de la forme

$$x^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right) \qquad \text{(F)}$$

avec

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

Dans ce cas $m = n$ et $E(t, x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_k - F(t, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$.

3. Lorsque $n = 1$ on parle de **système d'équations différentielles scalaire**s.

Définition 1.2. Une **solution de** (E) est un couple (x, I), où $I \subset \mathbb{R}$ est un <u>intervalle</u> et $x : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle k-fois dérivable, tel que :

- $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$,
- $E\left(t, x(t), \dot{x}(t), \cdots, x^{(k)}(t)\right) = 0$ pour tout $t \in I$.

1.5 Hypothèses générales

- Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On étudiera les équations différentielles d'ordre 1 résolues en $\dot{x}$:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

avec

$$F : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

<u>continue</u>, pour un <u>intervalle ouvert</u> $J \subset \mathbb{R}$ et un <u>ouvert connexe</u> $\Omega \subset \mathbb{K}^n$. Dans la plupart des situations raisonnables on peut se ramener à ce cas.

1.6 Théorèmes principaux du cours

On cherche à décrire du mieux possible trois types d'objets.

- L'intervalle maximal $I_{\max}$ sur lequel une solution (x, I) donnée peut se prolonger en une solution de (F)

$$x : I_{\max} \longrightarrow \Omega .$$

On dit que $(x, I_{\max})$ est une **solution maximale**.

- La structure de l'**espace des solutions** maximales

$$\mathtt{Sol}(F) := \{(x, I_{\max}) : (x, I_{\max}) \text{ solution maximale de (F)}\} .$$

En particulier on s'intéresse au **problème de Cauchy** : étant donné une **condition initiale** $(t_*, x_*) \in J \times \Omega$, existe-t-il une solution $(x, I_{\max})$ telle que $t_* \in I_{\max}$ et $x(t_*) = x_*$? Si oui, cette solution est-elle unique ?

- La **stabilité** des solutions maximales, plus précisément la question suivante. Soit $(x, I_{\max})$ une solution de condition initiale $x(t_*) = x_*$, et prenons une solution ayant une condition initiale voisine $\tilde{x}(t_*) = \tilde{x}_* \simeq x_*$. À quelle condition $\tilde{x}(t)$ reste proche de $x(t)$ lorsque t s'éloigne de t_* ?

1.6.1 Cas linéaire

Système différentiel linéaire. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $L \in \mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathsf{C}^0(J \to \mathbb{K})\right)$ une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les coefficients $\left(\ell_{i,j}\right)_{i\le n, j\le n}$ sont des fonctions continues $\ell_{i,j} : t \in J \mapsto \ell_{i,j}(t) \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = L(t)\, x(t) \qquad \text{(L)}$$

*est appelée **système différentiel linéaire**. Il est dit à **coefficients constants** lorsque chaque $\ell_{i,j}$ est une fonction constante. Ici $\Omega = \mathbb{K}^n$ est l'espace tout entier.*

1. *Il existe une application de classe C^1 à valeurs dans le groupe des matrices inversibles de taille n, appelée **résolvante** du système,*

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_{\bullet\leftarrow\star} : J \times J &\longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \\ (t_0, t_1) &\longmapsto \mathsf{R}_{t_1\leftarrow t_0} \end{aligned}$$

telle que (x, I) est solution de (L) si, et seulement si, pour tout $t_* \in I$ fixé et tout $t \in I$

$$x(t) = \mathsf{R}_{t\leftarrow t_*} x(t_*) .$$

*(Ici $\mathsf{R}_{t\leftarrow t_*} x(t_*)$ représente le vecteur obtenu en multipliant le vecteur $x(t_*)$ par la matrice $\mathsf{R}_{t\leftarrow t_*}$.) Cette dernière formule prouve que toute solution locale s'étend de manière unique en une solution définie sur J (on dit que la solution est **globale**) puisque le membre de droite de (R) est solution sur J.*

2. *L'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Plus particulièrement, à chaque $t_* \in J$ fixé l'application «conditions initiales»*

$$\begin{aligned} \mathtt{CI}_{t_*} \ : \ \mathtt{Sol}(\mathrm{L}) &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto x(t_*) \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire. Son inverse est l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathtt{Sol}(\mathrm{L}) \\ x_* &\longmapsto \left(t \mapsto \mathsf{R}_{t\leftarrow t_*} x_*\right) . \end{aligned}$$

Cela signifie en particulier que le problème de Cauchy admet une unique solution pour chaque condition initiale (t_*, x_*).

La résolvante vérifie les propriétés suivantes :
— $\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_0} = \mathrm{Id}$,
— $\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}\mathsf{R}_{t_1\leftarrow t_2} = \mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_2}$ si $t_0,\ t_1,\ t_2 \in J$,
— en particulier $\left(\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}\right)^{-1} = \mathsf{R}_{t_1\leftarrow t_0}$.

1.6.2 Cas non-linéaire

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ un ouvert et $F \in \mathtt{C}^1(J \times \Omega \to \mathbb{K}^n)$. On considère l'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) . \tag{F}$$

1. *Tout $(t_*, x_*) \in J \times \Omega$ admet un voisinage ouvert $I \times W \subset J \times \Omega$ sur lequel est définie une application continue*

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_{\bullet\leftarrow\star} \ : \ I \times I \times W &\longrightarrow \Omega \\ (t_0, t_1, x_0) &\longmapsto \mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}(x_0) , \end{aligned}$$

satisfaisant pour chaque (t_0, x_0) fixé que l'application partielle $t \mapsto \mathsf{R}_{t\leftarrow t_0}(x_0)$ est de classe $\mathtt{C}^1$ sur I, telle que toute solution (x, I) de (F) *s'écrive comme*

$$x(t) = \mathsf{R}_{t\leftarrow t_*}(x(t_*)) \quad (\forall t \in I) .$$

*On l'appelle **résolvante** de l'équation différentielle.*

2. *Pour toute condition initiale $(t_*, x_*) \in J \times \Omega$ il existe une unique solution maximale $(x, I_{\max}) \in \mathtt{Sol}(\mathrm{F})$ telle que $x(t_*) = x_*$. En particulier le problème de Cauchy admet une unique solution. En général $I_{\max}$ est strictement plus petit que J et dépend de la condition initiale.*

La résolvante vérifie les propriétés suivantes :
— $\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_0} = \mathrm{Id}$,
— $\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}\left(\mathsf{R}_{t_1\leftarrow t_2}(x_0)\right) = \mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_2}(x_0)$ si $t_0,\ t_1,\ t_2 \in I$,
— en particulier, à $(t_0, t_1) \in I \times I$ fixé, l'application $x_0 \mapsto \mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}(x_0)$ est inversible et $\left(\mathsf{R}_{t_0\leftarrow t_1}(\bullet)\right)^{-1} = \mathsf{R}_{t_1\leftarrow t_0}(\bullet)$.

Remarque 1.3. La différence entre cet énoncé et celui sur les systèmes linéaire est qu'ici la résolvante est *locale* (et pas *globale*) : elle n'est définie que sur un voisinage d'une condition initiale choisie. La taille de ce voisinage peut être estimée en fonction du maximum de $\left\|\frac{\partial F}{\partial y}\right\|$.

2 Rappels

— linéaire ordre 1
— ordre 1 à variables séparables
— linéaires à coefficients constants
— système linéaire à coefficients constant

3 Systèmes linéaires

— Cas des équations à coefficients constants, exponentielles de matrice
— Résolvante : existence et propriétés

4 Équations d'ordre 1

— Théorèmes d'existences (Cauchy-Peano-Arzelà, Cauchy-Lipschitz)
— Solutions maximales
— Singularités mobiles

5 Champs de vecteurs

— Notion de courbe intégrale/trajectoire
— Théorème d'existence du flot
— Sortie d'un compact
— Étude des singularités linéaires
— Stabilité des trajectoires, exposants de Lyapunov