Quelques tests...

Ségolen Geffray

IUT Carquefou

Année 2008-2009

segolen.geffray@univ-nantes.fr

Exemple introductif

- Situation : L'entreprise Métalex fabrique des tiges métalliques. L'un des clients exige que les tiges aient en moyenne une longueur de 70mm. L'ingénieur d'usine vient vérifier le réglement de la machine produisant ces tiges afin de s'assurer que la norme fixée par le client est respectée. Il prélève un échantillon de 40 tiges qu'il mesure. Il trouve une moyenne empirique de $\overline{X} = 69$mm avec un écart-type de 3mm.
- Question : La différence observée entre la moyenne empirique et la norme fixée peut-elle être attribuée aux fluctuations d'échantillonnage ou doit-elle être attribuée à un mauvais règlement de la machine ?

Principe des tests statistiques

- On compare une moyenne (ou une variance ou un paramètre de distribution) à une valeur de référence sur la base des valeurs d'un échantillon.
- A l'issue de la comparaison, on décide si l'on accepte l'égalité proposée ou non.
- Pour déterminer si une telle assertion sur une caractéristique de la population doit être acceptée ou rejetée, on utilise un test statistique.
- Un test statistique spécifie les hypothèses en compétition et le risque associé à la décision prise.

Démarche

- Etape 1 : on formule l'**hypothèse nulle** H_0 sous la forme $H_0 : \theta = \theta_0$ où θ désigne une **caractéristique de la population** et où θ_0 désigne une **valeur de référence**.
- Etape 2 : on formule l'**hypothèse alternative** H_1 en contradiction avec H_0 sous la forme $H_1 : \theta \neq \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$.
- Etape 3 : on fixe α le risque (de 1$^{\text{ère}}$ espèce) accepté
- Etape 4 : on utilise les données issues de l'échantillon pour tester les deux hypothèses en compétition H_0 contre H_1.

Décision et erreur associée

		Etat réel de la population	
		H_0 est vraie	H_1 est vraie
Décision	Accepter H_0	Décision correcte	Erreur de 2$^{\text{nde}}$ espèce
	Refuser H_0	Erreur de 1$^{\text{ère}}$ espèce	Décision correcte

- Le **risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce**, noté α, est la probabilité de commettre une erreur de 1ère espèce : c'est la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie
- Le risque de 2$^{\text{nde}}$ espèce, noté β, est la probabilité de commettre une erreur de 2nde espèce : c'est la probabilité d'accepter H_0 alors que H_0 est fausse
- Le statisticien choisit la valeur de α mais pas celle de β !
- Pour de nombreux tests, il n'est pas possible de calculer la valeur de β.
- En contrôle industriel, α s'appelle le risque du producteur (ou du fournisseur) alors β s'appelle le risque du consommateur (ou du client).

Prise de décision

- On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$.
- On fixe la valeur de α
- On calcule un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ à partir des données.
- On détermine une **région de rejet** $\mathcal{R}$ telle que :
  - Si $\widehat{\theta} \in \mathcal{R}$, alors on décide de rejeter H_0 (d'accepter H_1). Le risque de se tromper est inférieur ou égal à α.
  - Si $\widehat{\theta} \notin \mathcal{R}$, alors on décide d'accepter H_0.
- Lorsque H_1 est de la forme $H_1 : \theta \neq \theta_0$, le test est dit **bilatéral**. Lorsque H_1 est de la forme $H_1 : \theta > \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$, le test est dit **unilatéral**.

Comparer une moyenne à une valeur de référence avec un grand échantillon

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un grand échantillon ($n \geq 30$).
- On teste $H_0 : \mathbb{E}[X] = m_0$ contre H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$\mathbb{E}[X] \neq m_0$	Rejeter H_0 si $\overline{X} < m_0 - F_N^{-1}(1-\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ou si $\overline{X} > m_0 + F_N^{-1}(1-\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}$
$\mathbb{E}[X] > m_0$	Rejeter H_0 si $\overline{X} > m_0 + F_N^{-1}(1-\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$
$\mathbb{E}[X] < m_0$	Rejeter H_0 si $\overline{X} < m_0 - F_N^{-1}(1-\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$

Le fractile d'ordre γ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est noté $F_N^{-1}(\gamma)$ et est défini comme étant le réel x tel que $F_N(x) = \gamma$ ou encore $\mathbb{P}[X \leq x] = \gamma$ pour X de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice : longueur de tiges métalliques

L'entreprise Métalex fabrique des tiges métalliques. L'un des clients exige que les tiges aient en moyenne une longueur de 70mm. L'ingénieur d'usine vient vérifier le réglement de la machine produisant ces tiges afin de s'assurer que la norme fixée par le client est respectée. Il prélève un échantillon de 50 tiges qu'il mesure. Il trouve une moyenne empirique de $\overline{X} = 69$mm avec un écart-type de 3mm.

1. Tester au risque $\alpha = 5\%$ si la différence observée entre la moyenne empirique et la norme fixée peut être attribuée aux fluctuations d'échantillonnage ou si elle doit être attribuée à un mauvais règlement de la machine ?
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la longueur moyenne de la population des tiges au niveau de confiance 95%.

Exercice : modification de procédé de fabrication

Le responsable du procédé de fabrication de tiges métalliques de l'entreprise Kablex suggère au chef du département de métallurgie d'introduire un nouvel alliage dans le procédé de fabrication des tiges. Cette modification pourrait permettre d'obtenir une résistance moyenne à la rupture plus élevée et ainsi assurer une meilleure sécurité aux utilisateurs de ces tiges. Les tiges présentaient, avant l'introduction du nouvel alliage, une résistance moyenne à la rupture de 50kg/cm^2. Une nouvelle fabrication a été effectuée et un échantillon de 40 tiges a été prélevé au hasard de cette production. Une résistance moyenne à la rupture de 54.4 kg/cm^2 ainsi qu'un écart-type de 2.4 kg/cm^2 ont été obtenus.

1. L'écart observé dans la résistance moyenne à la rupture avant et après l'introduction du nouvel alliage est-il suffisamment élevé pour conclure au seuil de signification $\alpha = 0.01$ qu'il y a une augmentation significative de la résistance moyenne à la rupture ?
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la résistance moyenne à la rupture de la population des tiges au niveau de confiance 99%.

Exercice : résistance à la rupture

L'entreprise Fabrikix achète au fournisseur Kablex des câbles d'acier dont la résistance moyenne à la rupture doit être supérieure ou égale à 250 kg/cm^2. Une résistance moyenne à la rupture inférieure à 250 kg/cm^2 est inadéquate pour les besoins de l'entreprise Fabrikix. Lors de la réception d'un lot, l'ingénieur de la firme Fabrikix vérifie la qualité des câbles sur la base d'un échantillon de taille 40. Il obtient une résistance moyenne à la rupture de 246 kg/cm^2 ainsi qu'un écart-type de 46 kg/cm^2.

1. Tester au risque $\alpha = 0.05$ l'hypothèse selon laquelle la résistance moyenne à la rupture de la production rencontre les normes exigées par Fabrikix.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la résistance moyenne à la rupture de la population des supports au niveau de confiance 95%.

Comparer une variance à une valeur de référence avec un grand échantillon ($n \geq 30$)

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un grand échantillon.
- On teste l'hypothèse nulle H_0 : $\text{Var}(X) = \sigma_0^2$ contre l'hypothèse alternative H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$\text{Var}(X) \neq \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $S^2 < \sigma_0^2 - F_N^{-1}(1-\alpha/2)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\sigma_0^2$ ou si $S^2 > \sigma_0^2 + F_N^{-1}(1-\alpha/2)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\sigma_0^2$
$\text{Var}(X) > \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $S^2 > \sigma_0^2 + F_N^{-1}(1-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\sigma_0^2$
$\text{Var}(X) < \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $S^2 < \sigma_0^2 - F_N^{-1}(1-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\sigma_0^2$

Exercice : norme requise pour la dispersion de la longueur des supports

Une machine automatique fabrique des supports métalliques de diverses longueurs. La longueur requise peut être réglée facilement à l'aide d'un simple ajustement. Pour assurer que la production présente une homogénéité raisonnable, on a établi que la variance de la longueur des supports ne doit pas excéder 0.36 mm^2. La fabrication a été interrompue pour permettre une réparation importante au bras d'ajustement servant à la coupe des supports. La production étant reprise, on veut s'assurer que la variance de la longueur des supports n'excède pas la norme requise. Un échantillon de 100 supports est prélevé au hasard de la production. On obtient comme variance de la longueur $S^2 = 0.42$ mm^2.

1. Tester au risque $\alpha = 0.05$ l'hypothèse selon laquelle la variance de la production après réparation du bras d'ajustement n'excède pas 0.36 mm^2.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la variance de la population des supports au niveau de confiance 95%.

Comparer une proportion à une valeur de référence

- Comparer une proportion à une valeur de référence revient à comparer le paramètre d'une loi de Bernoulli à une valeur de référence.
- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$.
- On teste l'hypothèse nulle $H_0 : p = p_0$ contre H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$p \neq p_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{p} < p_0 - F_N^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ ou si $\widehat{p} > p_0 + F_N^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
$p > p_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{p} > p_0 + F_N^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
$p < p_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{p} < p_0 - F_N^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

- Ce test est un test approché valable dès que $n \geq 30$ (et $np_0 \geq 5$ et $n(1-p_0) \geq 5$).

Exercice : traitement contre les vers du bois

Le laboratoire Sanvers a développé un traitement contre les vers du bois. La direction du laboratoire affirme que ce traitement a un taux de réussite de 80%. Parmi la clientèle du laboratoire Sanvers concernée par le problème de présence de vers du bois, le traitement est administré dans 200 habitations particulières. A l'issue d'une certaine période, on note que, pour 152 habitations, le traitement a permis de réduire de façon notable cette présence inopportune.

1. Estimer ponctuellement et par intervalle (au niveau de confiance 95%) la proportion d'habitations traitées avec succès.
2. Tester au niveau de risque $\alpha = 0.05$ l'affirmation faite par le laboratoire Sanvers.
3. En utilisant une approximation de loi et en admettant que l'affirmation de la direction est exacte, déterminer la probabilité que, parmi 200 habitations traitées contre les vers, plus de 152 le soient avec succès. De la même façon, déterminer la probabilité que, parmi 200 habitations traitées contre les vers, 152 exactement le soient avec succès.

Exercice : qualité de tubes de verre

L'entreprise Simtech fabrique des tubes de verre pour l'entreprise Gescom. Gescom exige que les lots expédiés par Simtech contiennent au plus 2% de défectueux. Avant d'expédier les lots, Simtech effectue un contrôle en prélevant au hasard 200 tubes.

1. En utilisant un risque $\alpha = 0.05$ de rejeter à tort un lot dont la proportion de défectueux est 2% (ou moins), quelle est la valeur critique de la proportion de défectueux dans un échantillon de taille 200 qui ne doit pas être dépassée pour considérer un lot comme acceptable ?
2. Simtech doit expédier un lot de 5000 tubes. Lors du contrôle final, on a observé 4 tubes défectueux dans un échantillon de 200 tubes. Est-ce que ce lot peut être considéré comme acceptable d'après les exigences de Gescom ?
3. En utilisant les données recueillies par Simtech, déterminer un intervalle au niveau de confiance 95% la proportion de tubes défectueux dans l'ensemble de la production.
4. Gescom réceptionne des lots de Simtech en prélevant également 200 tubes et fait usage de la même règle de décision que Simtech. Quelles sont les chances d'accepter un lot comportant 6% de défectueux avec cette règle de décision ? Comment appelle-t-on cette erreur ?

Comparer le paramètre λ d'une loi de Poisson à une valeur de référence

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
- On teste l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre l'hypothèse alternative H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$\lambda \neq \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{\lambda} < \lambda_0 - F_N^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ ou si $\widehat{p} > p_0 + F_N^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$
$\lambda > \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{\lambda} > \lambda_0 + F_N^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$
$\lambda < \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{\lambda} < \lambda_0 - F_N^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$

- Ce test est un test approché valable dès que $n \geq 30$.

Exercice : pommes

Une exploitation agricole commercialise des pommes destinées aux grandes surfaces. Avant l'expédition d'un chargement, 30 pommes sont prélevées et le nombre d'impacts par pomme est relevé. L'exploitant obtient les données suivantes : 1 1 1 3 0 1 1 4 1 0 0 1 0 1 2 1 0 1 2 1 0 0 0 0 2 5 1 0 2 0. On admet que le nombre d'impacts par pomme suit une loi de Poisson.

1. Estimer ponctuellement et par intervalle le nombre moyen d'impacts par pommes.
2. Le producteur affirme que le nombre moyen nominal d'impacts par pommes est 1. Tester cette affirmation au niveau $\alpha = 0.05$.

Exercice : tissage

La société Ty'Saj produit des tissus qu'elle commercialise sous la forme de lots de 10 rouleaux de 2m par 100m. Avant chaque livraison, le qualiticien prélève un rouleau au hasard et compte le nombre de défauts par m^2 de tissu, et ce, sur 15m de longueur. On admet que le nombre de défauts par m^2 suit une loi de Poisson. Lors d'un contrôle, le qualiticien obtient les données suivantes : 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 3 1 1 2 0 0 2 0 1 2 1 0 1 1.

1. Estimer ponctuellement et par intervalle de confiance à 99% de confiance le nombre moyen de défauts par m^2 de tissu.
2. La société Ty'Saj affirme que le nombre moyen nominal de défauts par m^2 de tissu n'excède pas 0.5. Tester cette affirmation au risque α=0.01.
3. Lors du contrôle, si le nombre moyen de défauts observés n'excède pas la valeur critique calculée pour le test précédent, le lot est expédié à l'acheteur. Sinon, le lot entier est vérifié et les rouleaux défectueux sont vendus dans une braderie. Qu'advient-il du lot contrôlé par le qualiticien ?
4. Déterminer la probabilité de livrer un lot dont le nombre moyen de défauts par m^2 de tissu est 1 avec cette règle de décision. Comment s'appelle ce type d'erreur ?
5. Un acheteur applique le plan de contrôle suivant : un rouleau est prélevé au hasard et le nombre de défauts par m^2 de tissu est compté sur 20m de longueur. Si le nombre total de défauts observés excède 24, le lot est retourné à la société Ty'Saj. Déterminer la probabilité d'accepter un lot dont le nombre moyen de défauts par m^2 de tissu est 1 avec ce plan de contrôle.

Comparer le paramètre m d'une loi normale à une valeur de référence

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- On teste l'hypothèse nulle H_0 : $m = m_0$ contre l'hypothèse alternative H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$m \neq m_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{m} < m_0 - F^{-1}_{T(n-1)}(1-\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ou si $\widehat{m} > m_0 + F^{-1}_{T(n-1)}(1-\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}$
$m > m_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{m} > m_0 + F^{-1}_{T(n-1)}(1-\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$
$m < m_0$	Rejeter H_0 si $\widehat{m} < m_0 - F^{-1}_{T(n-1)}(1-\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$

Le fractile d'ordre γ de la loi $T(d)$ est noté $F^{-1}_{T(d)}(\gamma)$ et est défini comme étant le réel x tel que $F_{T(d)}(x) = \gamma$ ou encore $\mathbb{P}[X \leq x] = \gamma$ pour X de loi $T(d)$.

Exercice : contrôle d'un procédé de remplissage

L'entreprise Cérépak met en boîtes des corn-flakes. Le procédé de remplissage est ajusté de telle sorte que les contenants pèsent en moyenne 400g. Pour vérifier si le procédé de remplissage se maintient à 400g en moyenne, on prélève au hasard de la production un échantillon de 16 contenants. Le poids de chaque contenant est vérifié et le poids moyen de l'échantillon est calculé. Des études antérieures ont montré que le poids des contenants est distribué normalement et que l'écart-type vaut environ 8g pour tous les échantillons.

1. On veut établir une règle de décision qui permettrait dans 99% des cas de considérer que le procédé est vraisemblablement centré à 400g, et ceci basé sur une taille d'échantillon $n = 16$. Entre quelles valeurs critiques doit se situer la moyenne de l'échantillon pour considérer que le procédé opère selon la norme requise au risque $\alpha = 0.01$?
2. Lors d'un récent contrôle, on a obtenu un poids moyen de 395g sur un échantillon de 16 contenants ? Doit-on poursuivre ou arrêter la production ?
3. Avec cette règle de décision, quel est le risque d'accepter l'hypothèse selon laquelle le procédé opère à 400g en moyenne, alors qu'en réalité il est centré à 394g ?
4. On opte alors pour une autre règle de décision qui permettrait dans 95% des cas de considérer que le procédé est vraisemblablement centré à 400g, et ceci basé sur une taille d'échantillon $n = 16$. Entre quelles valeurs critiques doit se situer la moyenne de l'échantillon pour considérer que le procédé opère selon la norme requise au risque $\alpha = 0.05$?
5. Avec cette nouvelle règle de décision, quel est le risque d'accepter l'hypothèse selon laquelle le procédé opère à 400g en moyenne, alors qu'il est centré à 394g ?

Exercice : résistance ohmique

La résistance ohmique d'une composante électronique doit être en moyenne de 400 ohms. Un échantillon de 16 composantes prélevées dans un grand lot conduit aux résultats suivants : 392 388 401 394 396 387 391 406 386 403 400 406 389 397 402 400. On admet que la distribution de la résistance ohmique est celle d'une loi normale.

1. Peut-on considérer au seuil de risque $\alpha = 0.05$ que le lot respecte la norme de 400 ohms ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% pour la résistance ohmique moyenne dans la production. Est-ce que cet intervalle contient la norme spécifiée ?

Comparer le paramètre σ d'une loi normale à une valeur de référence

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- On teste l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contre l'hypothèse alternative H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$\sigma \neq \sigma_0$	Rejeter H_0 si $S^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(\alpha/2)$ ou si $S^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha/2)$
$\sigma > \sigma_0$	Rejeter H_0 si $S^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)$
$\sigma < \sigma_0$	Rejeter H_0 si $S^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}(\alpha)$

Le fractile d'ordre γ de la loi $\chi^2(d)$ est noté $F^{-1}_{\chi^2(d)}(\gamma)$ et est défini comme étant le réel x tel que $F_{\chi^2(d)}(x) = \gamma$ ou encore $\mathbb{P}[X \leq x] = \gamma$ pour X de loi $\chi^2(d)$.

Exercice : épaisseur d'isolants

L'entreprise Gescom utilise une matière isolante dans l'assemblage d'un certain type de moteurs électriques. Il est important que non seulement l'épaisseur moyenne des composants rencontre les exigences de l'entreprise mais également que la variabilité de l'épaisseur ne présente pas de trop fortes fluctuations. Un échantillon est prélevé au hasard de la production et fournit les épaisseurs suivantes (en mm) : 5.6 5.9 6.2 6.1 6.6 5.9 5.9 5.6 6.2 5.8 5.5 5.6 6.0 6.3 6.2 5.9 6.2 6.0 6.2 6.3. On admet que l'épaisseur de cette matière isolante est distribuée selon une loi normale.

1. Estimer ponctuellement puis par intervalle l'écart-type de l'épaisseur de l'ensemble de la population. Utiliser le niveau de confiance 95%.
2. Estimer ponctuellement puis par intervalle la moyenne de l'épaisseur de l'ensemble de la population. Utiliser le niveau de confiance 95%.
3. Selon les normes de l'entreprise, un lot est acceptable si la valeur de 6.05 mm pour l'épaisseur moyenne et la valeur de 0.3 mm pour l'écart-type de l'épaisseur peuvent être considérées comme vraisemblables au seuil de signification $\alpha = 0.05$. Le lot est refusé si l'une ou l'autre de ces valeurs n'est pas supportée par les résultats d'un échantillon de taille 20. Selon les résultats de l'échantillonnage, devrait-on refuser ou accepter le lot ?

Comparer le paramètre λ d'une loi exponentielle à une valeur de référence

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
- On teste l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre l'hypothèse alternative H_1.
- L'erreur de 1ère espèce est fixée à α.
- La forme de la région de rejet dépend de la forme de H_1.

H_1	Décision
$\lambda \neq \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\frac{1}{\bar{\lambda}} < \frac{1}{2(n-1)\lambda_0} F^{-1}_{\chi^2(2n)}(\alpha/2)$ ou si $\frac{1}{\bar{\lambda}} > \frac{1}{2(n-1)\lambda_0} F^{-1}_{\chi^2(2n)}(1-\alpha/2)$
$\lambda > \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\frac{1}{\bar{\lambda}} < \frac{1}{2(n-1)\lambda_0} F^{-1}_{\chi^2(2n)}(\alpha)$
$\lambda < \lambda_0$	Rejeter H_0 si $\frac{1}{\bar{\lambda}} > \frac{1}{2(n-1)\lambda_0} F^{-1}_{\chi^2(2n)}(1-\alpha)$

Exercice : fiabilité

Dans le cadre du suivi de production, l'ingénieur d'usine de l'entreprise Electrotek étudie la durée de vie d'un composant électronique. Le service de maintenance lui a fourni les données suivantes (en jours) :
493 353 6208 2234 4108 205 1442 2322 1939 8308 587 1182 3987 5496 391
On admet que la durée de vie (en jours) des composants électroniques est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Tester au niveau de risque $\alpha = 0.05$ l'hypothèse H_0 : λ=0.0006.
2. Tester au niveau de risque $\alpha = 0.01$ l'hypothèse H_0 : λ=0.0006.

Exercice : pneus pour vélos

La société Bycyclet a passé un contrat avec la société Michel pour que celle-ci livre des pneus dont la durée de vie nominale est 2000 km. Le qualiticien de la société Bycyclet prélève 25 pneus dont il mesure la durée de vie au banc d'essai. Il obtient les données suivantes : 2178 147 11643 1744 4345 764 2960 326 6051 4205 194 133 2829 1678 4448 1732 346 5308 3526 53 6590 1970 6079 464 1190. On admet que la durée de vie (en km) des pneus Michel suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Proposer un estimateur de λ.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour λ au niveau de confiance 95%.
3. Tester au niveau $\alpha = 0.05$ l'hypothèse nulle $H_0 : \lambda = 1/2000$ contre $H_1 : \lambda > 1/2000$. Que conclure sur la qualité des pneus Michel ?
4. Estimer la probabilité qu'un pneu tiré au hasard de la production ait une durée de vie inférieure ou égale à 1000 km.