TD 3 : Séries de Fourier

Exercice 1.

1. Pour chacune des fonctions 2π-périodiques f suivantes, tracer la représentation graphique de f, calculer sa série de Fourier (sous forme trigonométrique et sous forme complexe), étudier la convergence de la série de Fourier et en déduire sa valeur en cas de convergence.

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $f(x) = \cos^2 x$

c) $f(x) = x - \pi$ sur $[0, 2\pi[$

d) $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$

e) $f(x) = \begin{cases} -\pi/2 + x \text{ si } x \in [0, \pi[\\ -\pi/2 - x \text{ si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$

f) $f(x) = \max(0, \sin x)$

g) $f(x) = e^x$ sur $[-\pi, \pi[$

2. Que valent les sommes suivantes ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Exercice 2.

1. Etant donné $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, déterminer la série de Fourier (sous forme trigonométrique) de la fonction 2π-périodique f_a définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f_a(x) = \cos(ax)$.

2. En déduire que pour $x \in]-\pi; \pi[$, on a :

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} \tag{1}$$

3. En intégrant l'expression (1), prouver la formule pour $t \in]-\pi; \pi[$:

$$\sin t = t \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$$

4. En dérivant l'expression (1), prouver la formule pour $t \in]-\pi; \pi[$:

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - n\pi)^2}$$

Exercice 3.
1. Déterminer la série de Fourier (sous forme trigonométrique) associée à la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = (3x^2 - \pi^2)/12$. Etudier la convergence de cette série et en déduire sa valeur en cas de convergence.
2. Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut intégrer f deux fois. Déterminer F la primitive de f qui s'annule en 0 et G la primitive de F qui s'annule en 0.
3. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par G ? En déduire une équation différentielle satisfaite par f. En déduire la valeur de la série $f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Montrer que l'équation différentielle (E) : $y'' + ye^{ix} = 0$ admet des solutions de période 2π. Préciser l'ensemble de ces solutions.

Exercice 5.
1. Déterminer la série de Fourier (sous forme trigonométrique) associée à la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |\sin x|$. Etudier la convergence de cette série et en déduire sa valeur en cas de convergence.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y = |\sin x|$. Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6.
Trouver les fonctions de classe c^∞ et 2π-périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2 \sin x f'(x)$.