
Examen de probabilités et statistique

La durée de l'épreuve est 2h.

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Les notes de cours (comme tout autre document) ne sont pas autorisées.

La qualité de la rédaction sera largement prise en compte.

Exercice 1.

Vingt livres, deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte trois livres fixés de la collection ?

Exercice 2.

Calculer

$$(i) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k, \quad (ii) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Exercice 3.

On dispose d'un lot de n ampoules électriques, toutes de fabrication identique et supposées indépendantes entre elles. On suppose que la durée de vie d'une ampoule prise au hasard (exprimée en heures) est représentée par une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la probabilité qu'une ampoule s'éteigne avant un temps T de fonctionnement ?
2. Déterminer le temps moyen d'éclairage.
3. On branche les n ampoules simultanément à un instant noté $t_0 = 0$.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'à un instant T toutes les ampoules fonctionnent encore ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'à un instant T toutes les ampoules soient éteintes ?
 - (c) Quelle est la probabilité qu'à un instant T au moins une ampoule fonctionne encore ?
 - (d) On note N_T le nombre d'ampoules fonctionnant encore à l'instant T . Déterminer la loi de N_T .
4. On branche une première ampoule à un instant noté $t_0 = 0$. Dès que celle-ci meurt (on dit alors qu'il y a panne), on la remplace par une seconde ampoule et ainsi de suite jusqu'à épuisement des n ampoules.
 - (a) Quel est le temps moyen total d'éclairage ?
 - (b) Soit N_T le nombre de pannes durant un temps T . Quelle est la loi de probabilité de N_T ?

On admettra qu'une somme de k variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre λ est une variable à densité donnée par :

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} I(x \geq 0)$$

Exercice 4.

Un laboratoire pharmaceutique met en place la production d'un nouveau médicament sous forme de comprimé. Il faut déterminer le dosage du principe actif dans chaque comprimé. Pour cela, plusieurs techniques industrielles sont envisageables. Toutes fournissent un dosage en principe actif (exprimé en μg) qui suit une loi gaussienne de paramètres notés $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Si la teneur en principe actif est trop importante, le médicament peut devenir dangereux. Le laboratoire considère ainsi que le dosage doit être inférieur à $60\mu g$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.999. Inversement, si la teneur en principe actif est trop faible, le médicament n'est pas efficace. Le laboratoire considère ainsi que le dosage doit être supérieur à $40\mu g$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.

1. Que représentent ici les paramètres μ et σ .
2. Traduire les exigences du laboratoire concernant la sécurité et l'efficacité des comprimés.
3. En déduire un système de deux inégalités pour μ et σ .
4. A quel intervalle, dépendant de σ doit alors appartenir μ ? En déduire la valeur maximale possible pour le choix de σ notée σ_{\max} .
5. Plus une technique industrielle de dosage est précise, plus elle est chère à mettre en oeuvre. Pour minimiser les coûts de production, le laboratoire a intérêt à choisir une technique industrielle associée au σ le plus grand possible tout en respectant les exigences de sécurité et d'efficacité. Supposons que le laboratoire choisit une technique industrielle associée à σ_{\max} . Quelle valeur du dosage moyen devra-t-il choisir pour respecter les exigences? On note μ_{opt} cette valeur.
6. La direction du laboratoire pharmaceutique affirme donc calibrer son procédé industriel de dosage sur μ_{opt} et σ_{\max} . L'ingénieur d'usine décide un contrôle qualité. Il teste la teneur en principe actif de 40 comprimés. Il obtient une moyenne empirique de $45\mu g$ et un écart-type empirique de $5\mu g$. Que peut-il conclure de ces observations au sujet de la teneur moyenne en principe actif?