Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2013/2014

Feuille d'exercices n° 2: vecteurs gaussiens

Rappels sur les vecteurs aléatoires:
Si $\mathbf{X}$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et si $\mathbf{Y}$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^q$, alors la matrice de covariance entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ est définie par:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{Y}-\mathbb{E}[\mathbf{Y}])^t\right] .$$

Si l'on note $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(p)} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ \vdots \\ Y^{(q)} \end{pmatrix}$, alors on peut écrire que

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} X^{(1)}-\mathbb{E}[X^{(1)}] \\ \vdots \\ X^{(p)}-\mathbb{E}[X^{(p)}] \end{pmatrix} . \left(Y^{(1)}-\mathbb{E}[Y^{(1)}],...,Y^{(q)}-\mathbb{E}[Y^{(q)}]\right)\right]$$

de sorte que

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\left(X^{(1)},Y^{(1)}\right) & ... & \mathrm{Cov}\left(X^{(1)},Y^{(q)}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}\left(X^{(p)},Y^{(1)}\right) & ... & \mathrm{Cov}\left(X^{(p)},Y^{(q)}\right) \end{pmatrix} .$$

Attention, on n'a plus

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \neq \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \qquad \text{mais} \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{X})^t$$

puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{X}) &= \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} Y^{(1)}-\mathbb{E}[Y^{(1)}] \\ \vdots \\ Y^{(q)}-\mathbb{E}[Y^{(q)}] \end{pmatrix} . \left(X^{(1)}-\mathbb{E}[X^{(1)}],...,X^{(p)}-\mathbb{E}[X^{(p)}]\right)\right] \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\left(Y^{(1)},X^{(1)}\right) & ... & \mathrm{Cov}\left(Y^{(1)},X^{(p)}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}\left(Y^{(q)},X^{(1)}\right) & ... & \mathrm{Cov}\left(Y^{(q)},X^{(p)}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et que l'on a l'égalité terme à terme pour les composantes (qui sont réelles):

$$\mathrm{Cov}\left(X^{(i)},Y^{(j)}\right) = \mathbb{E}\left[\left(X^{(i)}-\mathbb{E}\left[X^{(i)}\right]\right)\left(Y^{(j)}-\mathbb{E}\left[Y^{(j)}\right]\right)\right] = \mathrm{Cov}\left(Y^{(j)},X^{(i)}\right) .$$

La variance ou plutôt la matrice de variance de $\mathbf{X}$ est définie par:

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}]).(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])^t\right] .$$

C'est une matrice symétrique à coefficients réels (donc diagonalisable) semi-définie positive (ce qui signifie que toutes ses valeurs propres sont ≥ 0).

Rappelons également que si $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ sont deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et si $\mathbf{Y_1}$ et $\mathbf{Y_2}$ sont deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^q$, alors

$$\mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}, \mathbf{Y_1}+\mathbf{Y_2}\right) = \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_2}\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_2}, \mathbf{Y_1}\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_2}, \mathbf{Y_2}\right)$$

et, en particulier,

$$\mathrm{Var}\left(\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}\right) = \mathrm{Var}\left(\mathbf{X_1}\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathbf{X_2}, \mathbf{X_1}\right) + \mathrm{Var}\left(\mathbf{X_2}\right) .$$

Exercice 1.
Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de matrice de variance égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Soit $\mathbf{Y}$ le vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ 2X^{(2)} \\ 3X^{(3)} \end{pmatrix} .$$

1. Vérifier que (1) définit bien la matrice de variance d'un vecteur aléatoire.
2. Déterminer la matrice de covariance $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Que remarquez vous?
3. Déterminer la matrice de variance $\mathrm{Var}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$.

Exercice 2.
Parmi les matrices suivantes, lesquelles peuvent être la matrice de variance d'un vecteur aléatoire $\mathbf{U}$ de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On pose

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| < 1, \\ -X & \text{si } |X| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que Y est une variable aléatoire gaussienne mais que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 4.
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien dont l'espérance et la variance sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Montrer que (X, Y, Z) appartient presque-sûrement à un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 5.
Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de matrice de variance l'identité. Calculer $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$.

Exercice 6.
Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de matrice de variance $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$. En déduire la loi de $\mathbb{E}[X|Y]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X|Y - X]$. En déduire la loi de $\mathbb{E}[X|Y - X]$.

Exercice 7.
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien centré de matrice de variance $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la loi de chacune des variables aléatoires X, Y et Z?
2. Montrer que $(X - Y, Y + Z)$ est un vecteur gaussien.
3. Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$.
4. Quelle est la loi du vecteur (Z, X, Y)?
5. Déterminer l'ensemble des variables $\eta_{a,b,c} = aX + bY + cZ$ indépendantes de U.

Exercice 8.
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien dont l'espérance et la variance sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la loi marginale de X.
2. Donner la loi de X sachant Z et celle de Y sachant X.
3. Calculer $\mathbb{E}[Y|X, Z]$.
4. Est-ce que Y et Z sont indépendants conditionnellement à X?
5. Calculer $\mathbb{E}[XY|Z]$.
6. Donner la loi de Y sachant $(X, Z)^t$.
7. Donner la loi de X sachant $2Y + Z$.
8. Donner la loi de (X, Y) sachant $X + Z$.
9. Ces lois sont-elles absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue? Si oui, donner leur densité.

Exercice 9.
Soient U_1, U_2 et U_3 des variables aléatoires indépendantes normales centrées et réduites.

1. Quelle est la loi du vecteur
$$\begin{pmatrix} U_1 - 2U_2 \\ U_1 + U_2 + U_3 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix} ?$$

2. Quelle est la loi de la variable $X = \frac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3)^2 + \frac{1}{2}(U_2 - U_3)^2$?

3. Quelle est la loi de la variable $Y = \dfrac{(U_1 + U_2 + U_3)^2}{(U_2 - U_3)^2}$?

4. Quelle est la loi de la variable $Z = \dfrac{U_1 + U_2 + U_3}{|U_2 - U_3|}$?