Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2014/2015

TP3: méthodes de Monte-Carlo

Le but de ce TP est de proposer une illustration de certaines méthodes d'intégration dites de Monte-Carlo.

1. On se propose tout d'abord d'estimer l'intégrale $I(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx$ par une méthode composite des trapèzes, du point milieu, de Simpson et de Monte-Carlo (de base) dans les cas suivants:

   (a) $\varphi(x) = x$,

   (b) $\varphi(x) = x^2$,

   (c) $\varphi(x) = \cos(k\pi x)$ pour $k = 1, 2, 10, 50, 100$.

   Dans chaque cas, déterminer analytiquement $I(\varphi)$ puis estimer $I(\varphi)$ avec les différentes méthodes pour un nombre d'itérations n allant de 100 à 10000 par pas de 100. Dans le cas de la méthode de Monte-Carlo, estimer aussi la variance $V(\varphi)$ de l'estimateur $I(\varphi)$. Placer sur un graphique l'estimation de $I(\varphi)$ en fonction du nombre d'itérations puis l'estimation de $V(\varphi)$ en fonction du nombre d'itérations n et enfin l'intervalle de confiance pour $I(\varphi)$ toujours en fonction du nombre d'itérations n. Que constatez-vous?

2. Calculer une valeur approchée de π en utilisant le fait que les trois intégrales suivantes valent toutes π:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad I_2 = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx, \qquad I_3 = 4\int_0^1\int_0^1 I(x^2+y^2 \leq 1)dxdy.$$

   Dans le cas de I_3, utiliser, outre la méthode de Monte-carlo usuelle, la méthode du conditionnement et la méthode des variables antithétiques.

Elements de correction:
Question 1:

1. $\varphi(x) = x$

$$I(\varphi) = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(\varphi) = \int_0^1 x^2 dx - I(\varphi)^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{12}$$

2. $\varphi(x) = x^2$,

$$I(\varphi) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(\varphi) = \int_0^1 x^4 dx - I(\varphi)^2 = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \frac{1}{3^2} = \frac{4}{45}$$

3. $\varphi(x) = \cos(\pi x)$

$$I(\varphi) = \int_0^1 \cos(\pi x) dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = 0$$

$$V(\varphi) = \int_0^1 \cos(\pi x)^2 dx - I(\varphi)^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\pi x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{\sin(\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Question 2: Calcul de π:

$$\theta = \frac{\pi}{4} = \mathbb{P}(U^2 + V^2 < 1) = \mathbb{E}[I(U^2 + V^2 < 1)]$$

On tire un échantillon (U_i, V_i) dans $[0,1]^2$ pour $i = 1, ..., n$ avec U_i et V_i deux variables indépendantes de loi $\mathcal{U}(0,1)$. La méthode de Monte-Carlo usuelle consiste à proposer

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(U_i^2 + V_i^2 < 1)$$

Cet estimateur est de variance

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \frac{0.17}{n}.$$

Voyons maintenant la méthode du conditionnement. Notons $X_i = I(U^2 + V^2 < 1)$ puis conditionnons:

$$\mathbb{E}[X_i | U_i = u] = \mathbb{P}(u^2 + V^2 < 1) = \mathbb{P}(V < \sqrt{1-u^2}) = \sqrt{1-u^2}.$$

On propose alors l'estimateur

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{(1 - U_i^2)}$$

Cet estimateur est de variance

$$\mathrm{Var}\left(\widetilde{\theta}_n\right) = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{n} \approx \frac{0.05}{n}.$$

Voyons maintenant la méthode des variables antithétiques. On propose l'estimateur

$$\check{\theta}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(1 - U_i^2)} + \sqrt{1 - (1 - U_i^2)} \right)$$

Cet estimateur est de variance

$$\mathrm{Var}\left(\widetilde{\theta}_n\right) = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{n} \approx \frac{0.05}{n} \,.$$

par intégration numérique, on trouve

$$\mathrm{Var}\left(\check{\theta}_n\right) \approx \frac{0.007}{n} \,.$$