Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - étude de cas

Ségolen Geffray
Année 2013/2014
Mardi 13 mai 2014

Contrôle continu - Epreuve de substitution

La durée de l'épreuve est 2h.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Les notes de cours (comme tout autre document) et les calculatrices ne sont pas autorisées.
La qualité de la rédaction sera largement prise en compte.

Exercice 1.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $P_{\alpha,\lambda}$ admettant la densité $f_{\alpha,\lambda}$ pour $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ définie par
$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha\lambda^{\alpha}x^{-\alpha-1}I(x \geq \lambda)\,.$$
Le modèle $(P_{\alpha,\lambda})_{(\alpha,\lambda)\in(\mathbb{R}^{*+})^2}$ est-il homogène, exponentiel, régulier ?
2. Soit Y une variable aléatoire de loi admettant la densité $f_{\alpha,1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Le modèle $(P_{\alpha,1})_{\alpha\in\mathbb{R}^{*+}}$ est-il homogène, exponentiel, régulier ?
3. Déterminer $\mathbb{E}[\log Y]$ et $\mathrm{Var}(\log Y)$.
4. Montrer que si X suit la loi de densité $f_{\alpha,\lambda}$, alors $Y = \dfrac{X}{\lambda}$ suit la loi de densité $f_{\alpha,1}$. En déduire $\mathbb{E}[\log X]$ et $\mathrm{Var}(\log X)$.
5. Calculer si possible la matrice d'information de Fisher du modèle.
6. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. de variable parente X. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α, λ) noté $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\lambda}_n)$.
7. Etablir le comportement asymptotique de $\widehat{\lambda}_n$.
8. Etablir la consistance forte de $\widehat{\alpha}_n$.