
Contrôle continu

La durée de l'épreuve est 2h.

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Les notes de cours (comme tout autre document) et les calculatrices ne sont pas autorisées.

La qualité de la rédaction sera largement prise en compte.

Exercice 1.

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d. de variable parente X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On souhaite estimer le paramètre $\theta = \mathbb{P}(X \leq t_0)$ où $t_0 > 0$ est fixé et connu.

1. Déterminer l'estimateur de θ par la méthode des moments et étudier ses propriétés.
2. Déterminer l'estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance et étudier ses propriétés. Vous obtiendrez le comportement asymptotique de l'estimateur par deux méthodes différentes.
3. Dédurre de la question précédente l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance et étudier ses propriétés.
4. Exhiber une statistique exhaustive pour θ .
5. Déterminer l'amélioré de Rao-Blackwell de l'estimateur $\hat{\eta} = I(X_1 \leq t_0)$ de θ .

Indication : on admettra que la loi de X_1 sachant que $\sum_{i=1}^n X_i = y$ pour $y > 0$ est la loi du minimum d'un échantillon i.i.d. (U_1, \dots, U_{n-1}) de loi uniforme sur $[0, y]$.

Exercice 2.

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien d'espérance $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de variance $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle(s) condition(s) sur a et b , le vecteur $\begin{pmatrix} aX \\ bY \end{pmatrix}$ et la variable Z sont-ils indépendants ?
2. Conditionnellement à X , les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?